Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Бочкин, А. И. Зенчук, Оптимизация удаленного создания одно- и двухкубитных состояний посредством унитарных преобразований передатчика и расширенного приемника, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 2, 343–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:26:33

© 2018 г.

Г. А. Бочкин*, А. И. Зенчук*

ОПТИМИЗАЦИЯ УДАЛЕННОГО СОЗДАНИЯ ОДНО- И ДВУХКУБИТНЫХ СОСТОЯНИЙ ПОСРЕДСТВОМ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРЕДАТЧИКА И РАСШИРЕННОГО ПРИЕМНИКА

Исследуется проблема оптимизации удаленного создания одно- и двухкубитных состояний с помощью однородной коммуникационной линии, состоящей из частиц со спином $1/2$, с использованием локальных унитарных преобразований многокубитного передатчика и расширенного приемника. Показано, что максимальная длина коммуникационной линии, используемой для создания нужного состояния (критическая длина), растет с ростом размерности передатчика и расширенного приемника. Для создания однокубитного состояния используется модель с передатчиком и расширенным приемником, состоящими из не более 10 кубитов, при этом рассматривается создание двух конкретных состояний: почти чистого состояния и максимально смешанного. Для создания двухкубитных состояний численно изучена зависимость критической длины от конкретной триады создаваемых независимых собственных чисел. Для этого используется модель с четырехкубитным передатчиком без расширенного приемника.

Ключевые слова: создание квантового состояния, многокубитный передатчик, расширенный приемник, коммуникационная линия, оптимизирующее преобразование, создаваемые собственные числа, критическая длина.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9315>

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема переноса квантового состояния [1] изучалась во многих работах. Основной целью этих исследований является увеличение точности передачи состояния в длинных цепочках. Так, идеальный перенос состояния возможен в цепочках со

Работа частично поддержана программой РАН “Элементная база квантовых компьютеров” (грант № 0089-2015-0220) и РФФИ (грант № 15-07-07928).

*Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия.
E-mail: zenchuk@itp.ac.ru

специальным образом подобранными константами связи, управляемых XY -гамильтонианом в приближении взаимодействий ближайших соседей [2]–[4], перенос состояния с высокой вероятностью можно осуществить более простым способом с помощью цепочки с удаленными концами [5]–[10] или специально настроенного неоднородного магнитного поля [11]. Перенос состояния с высокой точностью вдоль однородных цепочек спинов, рассмотренный в работах [12], [13], достигается кодировкой однокубитного состояния в состоянии многокубитного передатчика оптимальным образом. В качестве метода оптимизации используется сингулярное разложение некоторой матрицы.

Проблема удаленного создания смешанного состояния [14]–[20] представляет собой дальнейшее развитие проблемы передачи состояния. Изначально этот процесс изучался в системах фотонов [17], [18], [20], однако и другого рода двухуровневые системы, например системы взаимодействующих спинов [21], представляют интерес.

В настоящей работе рассматривается удаленное создание однокубитных состояний в однородной коммуникационной линии с многокубитным передатчиком. Создание нужного состояния на большом расстоянии достигается с помощью пары оптимизированных локальных унитарных преобразований на стороне передатчика и приемника. Такая оптимизация основана на сингулярном разложении некоторой матрицы, элементы которой выражаются через амплитуды перехода между различными узлами коммуникационной линии.

Среди создаваемых однокубитных состояний рассматриваются почти чистое состояние (аналог переноса состояния с высокой вероятностью, т. е. переноса возбужденного состояния с вероятностью > 0.9) и максимально смешанное состояние (т. е. состояние с двумя равными собственными числами $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$). Интерес ко второму из указанных состояний мотивирован тем, что, имея коммуникационную линию, позволяющую создать максимально смешанное состояние, можно также создать состояние с произвольным собственным значением λ_1 , просто используя подходящий набор параметров начального состояния передатчика [22]. Далее в статье максимальную длину цепочки, позволяющей создать конкретное состояние, будем называть критической длиной N_c создания этого состояния. Таким образом, критическая длина создания максимально смешанного состояния также является критической длиной создания состояния с произвольным (из допустимых) собственным значением.

Целью нашей работы является развитие метода, позволяющего существенно улучшить результаты работы [22], где показано, что создаваемая область состояний однокубитного приемника, связанного с двухкубитным передатчиком с помощью однородной линии передачи, состоящей из частиц со спином $1/2$, существенно сжимается с ростом длины этой линии, и критическая длина создания максимально смешанного состояния, как показатель такого сжатия, довольно маленькая: $N_c = 34$. Этот параметр увеличен до $N_c = 109$ в работе [23] с помощью оптимизирующего унитарного преобразования так называемого расширенного приемника, двухкубитной подсистемы. В нашей работе мы увеличиваем этот параметр до $N_c = 5473$ (и это не предел) в цепочке с 10-кубитными передатчиком и расширенным приемником. Кроме того, критическая длина создания почти чистого состояния увеличивается до 776 в нашем примере. Заметим, что обе упомянутые критические длины увеличиваются с дальнейшим увеличением размерностей передатчика и расширенного приемника.

Выполнив спектральный анализ проекции эволюционирующего состояния на спин приемника, мы показываем, что результат оптимизации заключается в локализации больших спектральных амплитуд вокруг центрального собственного значения и в минимизации разброса фаз, соответствующих этим большим амплитудам. Полученное увеличение длины эффективного создания состояний в однородных цепочках является важным результатом, поскольку такие системы наиболее просты в реализации, в отличие от цепочек со специально подобранными константами связи.

Также рассматривается удаленное создание двухкубитного состояния. Поскольку это состояние многопараметрическое, мы ограничиваемся изучением создания собственных чисел, отбросив остальные параметры состояния, а также рассматриваем только модель с четырехкубитным передатчиком и двухкубитным приемником без привлечения расширенного приемника. Очевидно, все допустимые собственные числа образуют тетраэдр в пространстве трех независимых собственных чисел состояния приемника. Снова результат значительно улучшается с помощью оптимизирующих унитарных преобразований передатчика и расширенного приемника. Мы показали, что указанный тетраэдр может быть полностью заполнен только в коротких коммуникационных линиях с $N \leq 16$. Мы также нашли критические длины N_c создания состояний, соответствующих вершинам этого тетраэдра, и показали, что создаваемые собственные числа лежат вблизи ребра тетраэдра, лежащего в плоскости двух наибольших собственных чисел. Кроме того, численно получены критические длины N_c создания состояний, соответствующих некоторому набору точек внутри тетраэдра.

Статья имеет следующую структуру. Основной протокол удаленного создания состояния с помощью коммуникационной линии, содержащей многокубитный передатчик и расширенный приемник, построен в разделе 2. Оптимизация основана на сингулярном разложении. Этот протокол применяется для создания однокубитного состояния в разделе 3, где используется коммуникационная линия с передатчиком и расширенным приемником, содержащими до 10 кубитов. Мы рассмотрим создание почти чистого состояния с высокой вероятностью, а также создание максимально смешанного состояния. Создание собственных чисел двухкубитного приемника изучается в разделе 4. Выводы представлены в разделе 5. Оптимизация момента времени регистрации состояния и некоторые подробности создания двухкубитного состояния приводятся в приложениях А, Б.

2. СПИНОВАЯ ДИНАМИКА С ОДНИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ И МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ

Начнем с однокубитного приемника и рассмотрим проблему создания почти чистого состояния с высокой вероятностью [24]–[33], а также создание собственных чисел [22], [23] в длинной цепочке спинов $1/2$ с N_S -кубитным передатчиком, однокубитным приемником и N_R -кубитным расширенным приемником, как показано на рис. 1.

Далее в настоящем разделе и в разделе 3 рассматривается спиновая динамика с одним возбуждением под управлением гамильтониана H , сохраняющего z -проекцию полного спина. Поэтому вместо общей эволюции чистого состояния системы N спинов в 2^N -мерном гильбертовом пространстве мы имеем дело с эволюцией чистого состояния с одним возбуждением в N -мерном подпространстве, натянутом на

Рис. 1. Коммуникационная линия с N_S -кубитным передатчиком S, однокубитным приемником R и N_R -кубитным расширенным приемником R^{ext} .

следующие базисные векторы:

$$|n\rangle, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где n означает состояние с поляризованным n -м спином. Поэтому интересующее нас начальное состояние $|\Psi_0\rangle$ имеет следующий общий вид:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{i=1}^{N_S} a_i |i\rangle, \quad \sum_{i=1}^{N_S} |a_i|^2 = 1. \quad (2)$$

Его эволюция описывается уравнением Лиувилля

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH_1 t} |\Psi_0\rangle, \quad (3)$$

где $H_1 - (N \times N)$ -блок гамильтониана, отвечающий за эволюцию с одним возбуждением. Гамильтониан H_1 можно диагонализировать:

$$H_1 = W \Lambda W^+, \quad (4)$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ и W – матрицы собственных значений и собственных векторов соответственно. Если применить унитарное преобразование V к расширенному приемнику в момент времени t_0 , то полученное состояние Ψ^V примет вид

$$|\Psi^V\rangle = \tilde{V} W e^{-i\Lambda t_0} W^+ |\Psi_0\rangle. \quad (5)$$

Здесь оператор $\tilde{V}$ в базисе (1) имеет блочно-диагональный вид, $\tilde{V} = \text{diag}(I_{\text{rest}}, V)$, где $I_{\text{rest}} - (N - N_R)$ -мерный тождественный оператор, а V – унитарный $(N_R \times N_R)$ -оператор. Состояние однокубитного приемника ρ^R определяется частичным следом состояния (3), погруженного в 2^N -мерное гильбертово пространство системы N спинов, по 2^{N-1} -мерному подпространству всех спинов, за исключением приемника. При этом мы заменим векторное представление чистого состояния (3) матрицей плотности

$$\rho^R = \text{Tr}_{1, \dots, N-1} |\Psi^V\rangle_{2^N} {}_{2^N} \langle \Psi^V|, \quad (6)$$

где $|\Psi^V\rangle_{2^N}$ – погружение N -мерного состояния $|\Psi^V\rangle$ в указанное выше 2^N -мерное гильбертово пространство. Легко показать (см., например, [22]), что это состояние имеет следующий диагональный вид (представленный в однокубитном базисе $|0\rangle, |1\rangle$):

$$\rho^R = \begin{pmatrix} 1 - |f_N|^2 & 0 \\ 0 & |f_N|^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где проекция f_N определяется по формуле

$$f_N = \langle N | \Psi^V \rangle, \quad (8)$$

а собственные числа состояния (7) имеют вид

$$\lambda_1 = 1 - |f_N|^2, \quad \lambda_2 = |f_N|^2. \quad (9)$$

Ниже рассматривается создание двух конкретных состояний. Первым является состояние, максимально приближающееся к чистому состоянию $|N\rangle$, точнее, состояние с

$$|f_N|^2 > 0.9. \quad (10)$$

Вторым является максимально смешанное состояние, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, которое соответствует

$$|f_N|^2 = \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Причина изучения такого состояния указана в разделе 1. Выбор двух указанных состояний и соответствующие условия (10) и (11) оправдывают наш отказ от вклада в начальное состояние (2) от основного состояния (т.е. от состояния без возбуждения), поскольку этот вклад уменьшает $|f_N|$ [22].

2.1. Сингулярное разложение как метод оптимизации. Для создания нужного состояния используется метод оптимизации на основе сингулярного разложения [12] (см. также работу [23]). Приведем некоторые подробности этого метода. Проекцию f_N , которая определяется по формуле (8), можно представить в виде

$$f_N = \langle N | \Pi_R^+ V \mathcal{P} \Pi_S | \Psi_0 \rangle, \quad \mathcal{P}_{nm} = \sum_{k=1}^N W_{(N-N_R+n)k} e^{-i\lambda_k^H t} W_{mk}, \quad (12)$$

$$n = 1, \dots, N_R, \quad m = 1, \dots, N_S,$$

где учтена вещественность W и используется укороченный базис: $|n\rangle_S$, $n = 1, \dots, N_S$ (для нумерации столбцов матрицы $\mathcal{P}$), и $|n\rangle_R$, $n = 1, \dots, N_R$ (для нумерации строк матрицы $\mathcal{P}$), вводимый с помощью прямоугольных $(N_S \times N)$ -оператора Π_S и $(N_R \times N)$ -оператора Π_R по формулам

$$\begin{aligned} |n\rangle_S &= \Pi_S |n\rangle, & n &= 1, \dots, N_S, & \Pi_S |n\rangle &= |0\rangle_S, & n &> N_S, \\ |n\rangle_R &= \Pi_R |N - N_R + n\rangle, & n &= 1, \dots, N_R, & \Pi_R |j\rangle &= |0\rangle_R, & j &\leq N - N_R. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, Π_S и Π_R являются соответственно первыми N_S и последними N_R строками единичной $(N \times N)$ -матрицы. Сингулярное разложение матрицы $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\mathcal{P} = V^{\text{SVD}} \Lambda^{\text{SVD}} (U^{\text{SVD}})^+, \quad (14)$$

где $\Lambda^{\text{SVD}} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots)$ – диагональная матрица сингулярных значений. Потребуем, чтобы первое сингулярное значение было максимально. Отметим два симметричных свойства сингулярного разложения.

1. Сингулярное разложение определено с точностью до фазового преобразования

$$(V_{kn}^{\text{SVD}}, U_{mn}^{\text{SVD}}) \rightarrow (V_{kn}^{\text{SVD}} e^{i\varphi_n}, U_{mn}^{\text{SVD}} e^{i\varphi_n}) \quad \forall \varphi_n \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

2. Рассматриваемая система симметрична относительно обращения порядка узлов цепочки (гамильтониан симметричен относительно побочной диагонали). Поэтому если рассмотреть цепочку с параметрами

$$N_S = N_1, \quad N_R = N_2 \quad (\mathcal{P}_1 = V_1^{\text{SVD}} \Lambda_1^{\text{SVD}} (U_1^{\text{SVD}})^+)$$

и еще одну с параметрами $N_S = N_2, N_R = N_1$ ($\mathcal{P}_2 = V_2^{\text{SVD}} \Lambda_2^{\text{SVD}} (U_2^{\text{SVD}})^+$), то (с точностью до указанного фазового преобразования)

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{\text{SVD}} &= (\Lambda_1^{\text{SVD}})^T, & (V_2^{\text{SVD}})_{n,m} &= (U_1^{\text{SVD}})_{N_1-n+1,m}^*, \\ (V_1^{\text{SVD}})_{n,m} &= (U_2^{\text{SVD}})_{N_1-n+1,m}^*, \end{aligned} \quad (16)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. В частности, если $N_1 = N_2$, то обе цепочки эквивалентны и

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{\text{SVD}} &\equiv \Lambda_2^{\text{SVD}}, \\ (V_1^{\text{SVD}})_{n,m} &= (V_2^{\text{SVD}})_{n,m} = (U_1^{\text{SVD}})_{N_1-n+1,m}^* = (U_2^{\text{SVD}})_{N_1-n+1,m}^*. \end{aligned} \quad (17)$$

Найдем такой унитарный $(N_S \times N_S)$ -оператор U , что $\Pi_S |\Psi_0\rangle = U \Pi_S |1\rangle$, и перепишем соотношение (12) в виде

$$f_N = {}_R \langle N_R | V V^{\text{SVD}} \Lambda^{\text{SVD}} (U^{\text{SVD}})^+ U | 1 \rangle_S. \quad (18)$$

Заметим, что оператор $\mathcal{P}$ (14) не зависит от параметров a_i и полностью определяется гамильтонианом. Для максимизации $|f_N|$ потребуем, чтобы выполнялось условие

$$U | 1 \rangle_S = U^{\text{SVD}} | 1 \rangle_S, \quad (19)$$

$${}_R \langle N_R | V = {}_R \langle 1 | (V^{\text{SVD}})^+, \quad (20)$$

которое выполняется в том случае, если операторы U и V удовлетворяют уравнениям

$$U = U^{\text{SVD}}, \quad \sum_{j=1}^{N_R} V_{nj} V_{jk}^{\text{SVD}} = \delta_{N_R-n+1,k}. \quad (21)$$

Теперь, подставляя выражения (19) и (20) в (18), окончательно получим

$$f_N = \omega_1. \quad (22)$$

Заметим, что вектор-столбец $U \Pi_S | 1 \rangle$ (19) и вектор-строка $\langle N | \Pi_R^+ V$ (20) в соотношении (18) определяются соответственно первым столбцом матрицы U (или U^{SVD}) и N_R -й строкой матрицы V (первым столбцом матрицы V^{SVD}). Векторы (19) и (20) будут использованы в качестве характеристик протокола оптимизации в разделе 3.

2.2. Спектральный анализ. Для пояснения механизма создания нужного состояния обратимся к спектральному представлению проекции f_N :

$$\begin{aligned} f_N &= \langle N | \Psi^V(t) \rangle = \langle N | \tilde{V} W e^{-i\Lambda t} W^+ | \Psi_0 \rangle = \\ &= \sum_k \sum_{m=1}^{N_R} V_{N_R m} W_{(N-N_R+m)k} e^{-i\lambda_k^H t} \sum_{j=1}^{N_S} W_{jk} a_j = \sum_k P_{Nk} e^{-i\lambda_k^H t + i\phi_{Nk}}, \end{aligned} \quad (23)$$

где спектральные амплитуды P_{Nk} и оптимизирующие спектральные фазы ϕ_{Nk} имеют вид

$$P_{Nk} = \left| \sum_{m=1}^{N_R} V_{N_R m} W_{(N-N_R+m)k} \sum_{j=1}^{N_S} W_{jk} a_j \right|, \quad (24)$$

$$\phi_{Nk} = \text{Arg} \left(\sum_{m=1}^{N_R} V_{N_R m} W_{(N-N_R+m)k} \sum_{j=1}^{N_S} W_{jk} a_j \right).$$

Уравнения (24) показывают, что для данного спектра P_{Nk} (который зависит от параметров начального состояния a_i , от локального унитарного преобразования V и от гамильтониана H_1) оптимизация должна быть нацелена на создание таких фаз ϕ_{ik} , чтобы в оптимальный момент времени t_0 в идеальном случае для любых значений k выполнялись условия

$$\Phi_{Nk} \equiv \phi_{Nk} - \lambda_k^H t_0 \approx 2\pi n_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Тогда все гармоники P_{Nk} дадут максимальный вклад в $|f_N|$. Разумеется, такой идеальный случай реализуется только при идеальном переносе состояния. В общем случае, имея унитарные преобразования U и V соответственно N_S -мерного передатчика и N_R -мерного расширенного приемника, невозможно настроить все N фаз. Но можно настроить те из них, которые соответствуют значительным спектральным амплитудам P_{Nk} ,

$$P_{Nk} > P_{\min}, \quad (26)$$

где $P_{\min}$ – некоторый условный параметр. Другими словами, максимизируя $|f_N|$, нужно обеспечить большие значения только тех амплитуд P_{Nk} , для которых

$$\phi_{Nk} - \lambda_k^H t_0 \approx 2\pi n_k. \quad (27)$$

Конечно, условиям (26), (27), вообще говоря, можно удовлетворить только на некотором спектральном интервале

$$k_{\min} < k < k_{\max}. \quad (28)$$

2.3. XY-гамильтониан. Рассмотрим спиновую динамику в конкретной модели коммуникационной линии под управлением XY-гамильтониана с учетом взаимодействий всех спинов:

$$H = \sum_{j>i} D_{ij} (I_{ix} I_{jx} + I_{iy} I_{jy}), \quad D_{ij} = \frac{\gamma^2 \hbar}{r_{ij}^3}, \quad (29)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, γ – гиромагнитное отношение, r_{ij} – расстояние между i -м и j -м спинами, $I_{i\alpha}$, $\alpha = x, y, z$, – оператор проекции i -го спина на ось α , D_{ij} – константа диполь-дипольного взаимодействия между i -м и j -м узлами. Далее мы используем безразмерное время, положив $D_{12} = 1$. Во всех описанных ниже численных экспериментах процедура оптимизации дает момент времени $t_0 \approx N$.

3. СОЗДАНИЕ ОДНОКУБИТНОГО СОСТОЯНИЯ

3.1. Создание возбужденного однокубитного состояния с высокой вероятностью. В данном разделе используется алгоритм, описанный в п. 2.1, для оптимизации длинной коммуникационной линии с целью создания чистого состояния $|N\rangle$ с высокой вероятностью (см. условие (10)). Оптимизируя сингулярное значение ω_1 в сингулярном разложении (14), мы найдем критическую длину N_c создания состояния при различных размерностях N_S и N_R . Результаты расчетов собраны в табл. 1. Вычисление N_c основано на его определении (10) и формуле (22). Численно строится проекция f_N как функция N в оптимальный момент времени t_0 (который, в свою очередь, находится с помощью оптимизации, описанной в приложении А) и определяется N_c как такая длина N , что условие (10) не удовлетворяется при $N > N_c$.

Как отмечалось в разделе 2, создание состояния можно охарактеризовать спектральными амплитудами P_{Nk} и фазами Φ_{Nk} . Мы покажем, что после оптимизации ω_1 условие (25) приближенно выполняется для тех k , для которых спектральные амплитуды P_{Nk} существенно больше нуля.

Например, рассмотрим коммуникационную линию с $N_S = 10$ без расширенного приемника (т.е. $N_R = 1$). В этом случае $N_c = 31$, соответствующий спектр показан на рис. 2а (жирная сплошная линия). На том же рисунке показаны оптимизирующие фазы ϕ_{Nk} и результирующие фазы $\Phi_{Nk} = \phi_{Nk} - \lambda_k^H t$ (соответственно штриховая и тонкая сплошная линии; для удобства восприятия вместо ϕ_{Nk} изображены смещенные фазы $\tilde{\phi}_{Nk} = \phi_{Nk} + \pi k$). Мы приходим к выводу, что почти весь спектр вовлечен в процесс передачи состояния (почти все P_{Nk} существенно ненулевые) и почти все гармоники появляются с соответствующими фазами. Действительно, предполагая, что условие (27) выполнено, если разброс фаз находится в интервале (горизонтальные пунктирные линии на рис. 2а)

$$-\frac{\pi}{6} < \Phi_{Nk} < \frac{\pi}{6}, \quad (30)$$

найдем соответствующий спектральный интервал $8 \leq k \leq 30$ (вертикальные пунктирные линии на рис. 2а), в который входят почти все гармоники.

На рис. 2б представлены амплитуды и фазы элементов вектор-столбца (19), которые появляются в соотношении (18) и поэтому являются элементами матрицы U , наиболее важные для алгоритма оптимизации. Профиль абсолютных значений проекций $|f_n(t_0)|$ показан на рис. 2в.

При фиксированном значении N_S критическая длина N_c растет с ростом N_R , при этом значительно меняются формы всех кривых, показанных на рис. 2. Например, те же характеристики для случая $N_S = N_R = 10$ изображены на рис. 3. В этом случае критическая длина коммуникационной линии возрастает до $N_c = 776$. Условие на фазу (30) (горизонтальные пунктирные линии на рис. 3а) выделяет спектральный интервал $457 \leq k \leq 574$ (вертикальные пунктирные линии на рис. 3а). Таким образом, все значительные гармоники вносят существенный вклад в создаваемую проекцию $|f_N|$ (см. также вставку в рис. 3а).

Амплитуды и фазы вектор-столбца (19) и вектор-строки (20) показаны, соответственно, на рис. 3б и рис. 3в (вставка). Эти рисунки подтверждают симметрию (17).

Рис. 2. Перенос состояния с высокой вероятностью (10) в коммуникационной линии из $N_c = 31$ узла при $N_S = 10$ и $N_R = 1$ в момент времени $t_0 = 39.3815$. а – Спектр P_{Ni} , оптимизирующие фазы $\tilde{\phi}_{Nk} = \phi_{Nk} + \pi k$ и результирующие фазы $\Phi_{Nk} = \phi_{Nk} - \lambda_k^H t_0$. б – Амплитуды и фазы элементов вектора (19) (или начальных проекций $f_n(0) = \langle n | \Pi_S^+ U \Pi_S | 1 \rangle$). в – Профиль абсолютных значений проекций $|f_n(t_0)|$.

Рис. 3. Перенос состояния с высокой вероятностью (10) в коммуникационной линии из $N_c = 776$ звеньев с $N_S = N_R = 10$ в момент времени $t_0 = 767.892$. а – Спектр P_{Nk} , оптимизирующие фазы $\tilde{\phi}_{Nk} = \phi_{Nk} + \pi k$ и результирующие фазы $\Phi_{Nk} = \phi_{Nk} - \lambda_k^H t_0$. На вставке изображен спектр P_{Nk} на всем спектральном интервале. б – Амплитуды (сплошная линия) и фазы (штриховая линия) элементов вектора (19) (или начальных проекций $f_n(0) = \langle n | \Pi_S^+ U \Pi_S | 1 \rangle$). в – Профиль абсолютных значений проекций $|f_n(t_0)|$, на вставке проведены амплитуды (сплошная линия) и фазы (штриховая линия) элементов вектора (20).

Таблица 1. Критическая длина N_c создания возбужденного однокубитного состояния с высокой вероятностью в зависимости от размерностей передатчика N_S и приемника N_R . Наблюдается симметрия относительно перестановки $R \leftrightarrow S$.

$N_R \backslash N_S$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	4	9	11	14	18	21	26	27	31
2	4	17	17	21	27	45	47	52	56	71
3	9	17	22	26	35	51	51	56	64	83
4	11	21	26	70	83	93	102	126	172	172
5	14	27	35	83	134	135	169	191	230	237
6	18	45	51	93	135	139	180	196	235	239
7	21	47	51	102	169	180	293	340	353	407
8	26	52	56	126	191	196	340	449	452	547
9	27	56	64	172	230	235	353	452	458	564
10	31	71	83	172	237	239	407	547	564	776

На рис. 3в показан также профиль абсолютных значений проекций $|f_k(t_0)|$. Подчеркнем, что проекции f_n , $n = N - N_R + 1 = 767, \dots, N - 1 = 775$, тождественно равны нулю, что следует из свойств (21) унитарных преобразований U и V в формуле (18).

Кроме того, следует заметить, что профиль вектора (19) на рис. 3б есть не что иное, как начальный профиль проекций $f_n(0)$. В некотором смысле он аналогичен полученному в работе [13] профилю

$$|\Psi_{N_S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_S}} \sum_{m=0}^{N_S-1} (-1)^m |2m+1\rangle$$

начального состояния, переносимого вдоль цепочки спинов $1/2$ с большой точностью. Однако в нашем случае наблюдается квазипериодичность с периодом, равным трем узлам.

3.2. Создание максимально смешанного состояния. В работе [22] показано, что удаленное создание собственных чисел квантового состояния является задачей особой важности, поскольку они не могут быть изменены локальными унитарными преобразованиями приемника, в отличие от других параметров состояния приемника. Вычисление величины N_c аналогично проведенному в п. 3.1 с точностью до замены условия (10) на (11). Снова численно построим f_N как функцию N в оптимальный момент времени t_0 (который найдем, следуя алгоритму, приведенному в приложении А) и определим N_c как такую длину, что $|f_{N_c+1}| < 1/2$ и $|f_{N_c}| \geq 1/2$.

Критическая длина создания максимально смешанного состояния с помощью однородной коммуникационной линии, в которой $N_S = 2$ и $N_R = 1$, равна $N_c = 34$ спином. Однако, привлекая унитарные преобразования двухкубитного расширенного приемника (т. е. $N_R = 2$), эту длину можно увеличить до $N_c = 109$ спинов (см. работу [23]). В настоящей работе мы покажем, что с помощью подходящего начального состояния N_S -мерного передатчика и унитарного преобразования N_R -мерного

ТАБЛИЦА 2. Критическая длина N_c создания максимально смешанного состояния в зависимости от размерностей передатчика N_S и расширенного приемника N_R . Наблюдается симметрия относительно перестановки $R \leftrightarrow S$.

$N_R \backslash N_S$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	22	37	45	63	69	106	106	129	145	164
2	37	109	110	191	256	257	294	320	410	422
3	45	110	115	207	265	268	314	335	424	434
4	63	191	207	459	620	639	876	1000	1018	1183
5	69	256	265	620	927	937	1316	1609	1616	1936
6	106	257	268	639	937	948	1344	1628	1639	1977
7	106	294	314	876	1316	1344	2031	2490	2524	3199
8	129	320	335	1000	1609	1628	2490	3178	3198	4086
9	145	410	424	1018	1616	1639	2524	3198	3223	4137
10	164	422	434	1183	1936	1977	3199	4086	4137	5473

расширенного приемника (матрицы U и V в уравнении (18)) можно увеличить N_c до $N_c = 164$ при десятикубитном передатчике (и при $N_R = 1$). Кроме того, увеличивая размерность расширенного приемника, можно достичь даже лучшего результата: $N_c = 5473$ при $N_S = N_R = 10$.

Критическая длина N_c для разных размерностей N_S и N_R представлена в табл. 2.

Для случая $N_c = 5473$ и $N_S = N_R = 10$ спектр P_{Nk} , фазы $\tilde{\phi}_{Nk} = \phi_{Nk} + \pi k$ и результирующие фазы $\Phi_{Nk} = \phi_{Nk} - \lambda_k^H t_0$ изображены на рис. 4а. Условие (30) (горизонтальные пунктирные линии на рис. 4а) выделяет спектральный интервал $3405 \leq k \leq 3886$ (вертикальные пунктирные линии). Поэтому, в отличие от случая создания однокубитного возбужденного состояния с высокой вероятностью, не все гармоники с большой амплитудой вовлечены в процесс создания состояния (см. также вставку на рис. 4а).

Наконец, амплитуды и фазы элементов вектор-столбца (19) и вектор-строки (20) изображены соответственно на рис. 4б и рис. 4в (вставка). Как и рис. 3б, 3в, эти рисунки подтверждают симметрию (17). На рис. 4в также показан профиль абсолютных значений проекций $|f_n(t_0)|$. Здесь f_n , $n = N - N_R + 1 = 5464, \dots, N - 1 = 5472$, тождественно равны нулю из-за унитарных преобразований U и V в формуле (18).

4. СОЗДАНИЕ ДВУХКУБИТНОГО СОСТОЯНИЯ

Чтобы покрыть большую область пространства состояний двухкубитного приемника, нужно заменить начальное состояние с одним возбуждением (2) на состояние с двумя возбуждениями:

$$|\Psi_0\rangle = a_0|0\rangle + \sum_{i=1}^{N_S} a_i|i\rangle + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{N_S} a_{ij}|ij\rangle, \quad \sum_{i=0}^N |a_i|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{N_S} |a_{ij}|^2 = 1, \quad (31)$$

Рис. 4. Максимально смешанное состояние (11) в коммуникационной линии, состоящей из $N_c = 5473$ спинов при $N_S = N_R = 10$ в момент времени $t_0 = 5404.02$. а – Спектр P_{Nk} , оптимизирующие фазы $\tilde{\phi}_{Nk} = \phi_{Nk} + \pi k$ и результирующие фазы $\Phi_{Nk} = \phi_{Nk} - \lambda_k^H t_0$. На вставке изображен спектр P_{Nk} на всем спектральном интервале. б – Амплитуды (сплошная линия) и фазы (штриховая линия) элементов вектора (19) (или начальных проекций $f_n(0) = \langle n | \Pi_S^+ U \Pi_S | 1 \rangle$). в – Профиль абсолютных значений проекций $|f_n(t_0)|$, на вставке приведены амплитуды (сплошная линия) и фазы (штриховая линия) элементов вектора (20).

Рис. 5. Трехмерная область независимых спектральных параметров λ_i , $i = 1, 2, 3$, пространства состояний двумерного приемника представляет собой тетраэдр с вершинами $L_1 = (1, 0, 0)$, $L_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 0)$, $L_3 = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$ и $L_4 = \frac{1}{4}(1, 1, 1)$. Весь тетраэдр состояний может быть создан только в коротких коммуникационных линиях с $N \leq 16$.

где $|ij\rangle$ – состояние с возбужденными i -м и j -м спинами. Теперь вместо (6) матрица плотности ρ^R задается формулой

$$\rho^R = \text{Tr}_{1,\dots,N-2} |\Psi^V\rangle_{2^N} {}_{2^N} \langle \Psi^V|, \quad |\Psi^V\rangle_{2^N} = e^{-iHt} |\Psi_0\rangle_{2^N}, \quad (32)$$

где след берется по всем спинам, за исключением спинов приемника. Прежде чем приступить к созданию состояния, нужно определить оптимальный момент времени t_0 для его регистрации. Возьмем момент времени, в который максимальна величина

$$\varkappa = \langle N | \rho^R | N \rangle + \langle N-1 | \rho^R | N-1 \rangle + \langle N, N-1 | \rho^R | N, N-1 \rangle, \quad (33)$$

усредненная по всем начальным состояниям вида (31),

$$\max_t \langle \varkappa \rangle = \langle \varkappa \rangle|_{t=t_0}, \quad (34)$$

где $\langle \varkappa \rangle$ – среднее значение $\varkappa$. Вычисление среднего значения $\langle \varkappa \rangle$ и формула, упрощающая вычисление t_0 , представлены в приложении А. Здесь только отметим, что величина $\langle \varkappa \rangle$ инвариантна относительно унитарных преобразований начального состояния.

Создание двухкубитных состояний требует использования динамики с двумя возбуждениями, поэтому такой случай становится более сложным для численных расчетов. Мы ограничимся четырехкубитным передатчиком ($N_S = 4$) и двухкубитным приемником без привлечения расширенного приемника ($N_R = 2$) и рассмотрим только создание собственных чисел. Все возможные значения трех независимых собственных чисел двухкубитного состояния образуют тетраэдр в трехмерном пространстве независимых собственных чисел λ_i , $i = 1, 2, 3$ (напомним, что

Рис. 6. Критическая длина N_c в зависимости от собственных чисел создаваемого состояния для решетки состояний (35). Длины N_c отмечены на плоскости (λ_1, λ_2) целыми числами, а λ_3 является параметром. Отсутствуют две критические длины. Первая соответствует $\lambda_3 = \frac{1}{3}$: $N_c(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 16$. Вторая критическая длина $N_c(1, 0, 0) = \infty$ должна быть в правом нижнем углу рис. 6а.

$\lambda_4 = 1 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i$), с вершинами $L_1 = (1, 0, 0)$, $L_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 0)$, $L_3 = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$ и $L_4 = \frac{1}{4}(1, 1, 1)$, связанными соответственно с состояниями $\rho_1^R = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$, $\rho_2^R = \frac{1}{2} \text{diag}(1, 1, 0, 0)$, $\rho_3^R = \frac{1}{3} \text{diag}(1, 1, 1, 0)$ и $\rho_4^R = \frac{1}{4} \text{diag}(1, 1, 1, 1)$, как показано на рис. 5.

Конечно, не все точки внутри тетраэдра могут быть созданы в длинных цепочках, и каждая точка $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ имеет свою собственную критическую длину $N_c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ такую, что эта точка не может быть создана в коммуникационной линии с $N > N_c$. Например, вершина L_1 может быть создана в коммуникационной линии любой длины, т.е. $N_c(L_1) = \infty$. Кроме того, длина $N_c(L_2) = 191$ была найдена в п. 3.2¹⁾. Прямые вычисления (подробности можно найти в приложении Б)

¹⁾Хотя длина $N_c(L_2)$ была подсчитана в п. 3.2 для случая динамики с одним возбуждением, численно проверено, что $N_c(L_2)$ остается той же, если обратиться к динамике с двумя возбуждениями.

показывают, что $N_c(L_3) = N_c(L_4) = 16$. Таким образом, весь тетраэдр состояний может быть создан в короткой коммуникационной линии с $N \leq 16$.

Чтобы дать представление о критической длине N_c как функции собственных значений, найдем ее для решетки состояний

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3, \quad \lambda_i = \frac{p_i}{12}, \quad p_i \in \mathbb{Z}, \quad (35)$$

как показано на рис. 6. Мы приходим к выводу, что с ростом N создаваемые точки собираются вблизи ребра тетраэдра, соединяющего вершины L_1 и L_2 (см. рис. 6а). Заметим, что для вычисления длины N_c , соответствующей случаю $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, показанному на рис. 6а, используются начальное состояние с одним возбуждением и протокол оптимизации на основе сингулярного разложения (см. п. 2.1 и раздел 3). Начальное состояние с двумя возбуждениями не меняет результат, который подтвержден численными расчетами. Заметим, что критическая длина растет с приближением к линии $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Рис. 6а построен с использованием начального состояния с одним возбуждением и протокола оптимизации на основе сингулярного разложения. Оптимизация для случая $\lambda_3 > 0$ (рис. 6б–г), проведена на основе подхода, изложенного в настоящем разделе.

5. ВЫВОДЫ

В настоящей работе рассмотрена проблема оптимизации удаленного создания квантовых состояний. В качестве метода оптимизации используются унитарные преобразования N_S -кубитного передатчика и N_R -кубитного расширенного приемника (в который приемник входит в качестве подсистемы). Для однокубитного состояния рассмотрено создание состояний двух типов: 1) (почти) чистое состояние с одним возбуждением однокубитного приемника (этот процесс аналогичен переносу чистого состояния с высокой вероятностью); 2) максимально смешанное состояние (состояние с двумя равными собственными числами). В обоих случаях исследована зависимость критической длины от размерности передатчика (N_S) и расширенного приемника (N_R) и показано, что N_c растет с ростом как N_S , так и N_R . Таким образом, ограничиваясь 10-кубитным передатчиком и расширенным приемником, мы достигли $N_c = 776$ для создания почти чистого состояния и $N_c = 5473$ для создания максимально смешанного состояния.

Рассматривая спектральное представление эволюционирующего состояния, мы явно показали, что оптимальные параметры начального состояния передатчика и унитарного преобразования расширенного приемника обеспечивают большие спектральные амплитуды вокруг центрального собственного значения гамильтониана и минимальный разброс спектральных фаз, соответствующих этим амплитудам. Показано, что почти все гармоники с большой амплитудой вовлечены в процесс создания почти чистого состояния (т. е. разброс их фаз удовлетворяет условию (30)), тогда как для создания максимально смешанного состояния служит только половина таких гармоник.

Исследование создания двухкубитных состояний сложнее, поскольку основано на динамике с двумя возбуждениями. Поэтому мы изучили только частный пример коммуникационной линии с четырехкубитным передатчиком и двухкубитным приемником (без расширенного приемника) и рассмотрели задачу создания собственных чисел. Создаваемая область образует тетраэдр в трехмерном пространстве независимых собственных чисел λ_i , $i = 1, 2, 3$. Изучена критическая длина N_c как

функция состояния внутри указанного тетраэдра (т.е. максимальная длина коммуникационной линии, позволяющая создать конкретное состояние внутри тетраэдра). В частности, для вершин тетраэдра мы нашли $N_c(L_1) = \infty$, $N_c(L_2) = 191$, $N_c(L_3) = N_c(L_4) = 16$. Поэтому любое состояние внутри тетраэдра можно создать с помощью коммуникационной линии с числом спинов $N \leq 16$. С ростом N создаваемые собственные числа стремятся к ребру, соединяющему две вершины на плоскости двух наибольших собственных чисел λ_1 и λ_2 .

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Оптимальный момент времени для регистрации состояния

Найдем момент времени, максимизирующий величину $\varkappa$ (33), усредненную по всем возможным начальным состояниям вида (31) (см. формулу (34)). Имеется всего $N_{\text{in}} = N_S + (N_S(N_S - 1)/2) + 1$ комплексных параметров начального состояния, удовлетворяющих условию нормировки (вторая формула в (31)). Кроме того, можно вынести общую фазу. Поэтому независимые параметры начального состояния (без учета общей фазы) покрывают $(2N_{\text{in}} - 2)$ -мерную единичную сферу. Таким образом, имеем

$$\langle \varkappa \rangle = \int \varkappa \Omega d\alpha_1 \dots d\alpha_{2N_{\text{in}}-1}, \quad (36)$$

где

$$\Omega = \prod_{i=2}^{2N_{\text{in}}-1} \sin^{i-1} \alpha_i.$$

По определению среднее значение инвариантно относительно унитарных преобразований начального состояния (31). Следующие рассуждения позволяют упростить вычисления.

Согласно определению (6) ρ^R является эрмитовой формой (точная формула для ρ^R дана в работе [34]). Следовательно, величина $\varkappa$ также является эрмитовой формой и может быть представлена в виде

$$\varkappa(|\Psi_0\rangle) = \langle \Psi_0 | \Pi_S^+ A \Pi_S | \Psi_0 \rangle, \quad (37)$$

где A – эрмитов оператор, не зависящий от параметров a_i и a_{ij} . Оператор A можно диагонализировать:

$$A = \mathcal{U} \Lambda^A \mathcal{U}^+, \quad (38)$$

где $\Lambda^A = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{N}_S})$ – диагональная матрица собственных значений, а $\mathcal{U}$ – соответствующая матрица, составленная из собственных векторов оператора A . Здесь $\tilde{N}_S = N_S(N_S + 1)/2 + 1$ есть размерность базиса пространства состояний передатчика, элементы которого имеют вид (31). Очевидно,

$$\begin{aligned} \langle \varkappa(|\Psi_0\rangle) \rangle &= \langle \langle \Psi_0 | \Pi_S^+ A \Pi_S | \Psi_0 \rangle \rangle = \langle \langle \Psi_0 | \Pi_S^+ \Lambda^A \Pi_S | \Psi_0 \rangle \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{\tilde{N}_S} \langle \langle \Psi_0 | \Pi_S^+ \text{diag}(\tilde{\lambda}_j \underbrace{0, \dots, 0}_{\tilde{N}_S-1}) \Pi_S | \Psi_0 \rangle \rangle = \\ &= \frac{1}{\tilde{N}_S} \sum_{j=1}^{\tilde{N}_S} \langle \langle \Psi_0 | \Pi_S^+ \text{diag}(\underbrace{\tilde{\lambda}_j, \dots, \tilde{\lambda}_j}_{\tilde{N}_S}) \Pi_S | \Psi_0 \rangle \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{\tilde{N}_S} \frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{N}_S} = \frac{\text{Tr } A}{\tilde{N}_S}. \end{aligned} \quad (39)$$

В свою очередь,

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^{N_S} \langle i | \Pi_S^+ A \Pi_S | i \rangle + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{N_S} \langle ij | \Pi_S^+ A \Pi_S | ij \rangle = \sum_{i=1}^{N_S} \varkappa(|i\rangle) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{N_S} \varkappa(|ij\rangle). \quad (40)$$

В итоге из (39) и (40) получим

$$\langle \varkappa(\Psi_0) \rangle = \frac{1}{\tilde{N}_S} \left(\sum_{i=1}^{N_S} \varkappa(|i\rangle) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{N_S} \varkappa(|ij\rangle) \right). \quad (41)$$

Следовательно, нужно найти момент времени t_0 , максимизирующий правую часть соотношения (41). Таким образом, многопараметрическая оптимизация сводится к оптимизации по одному параметру t .

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Создание собственных чисел состояния двухкубитного приемника

Параметры a_i и a_{ij} начального состояния передатчика (31), которые приводят к состояниям приемника с тремя и четырьмя равными собственными числами (вершины тетраэдра L_3 и L_4 на рис. 5), можно найти с помощью характеристического уравнения

$$|\rho^R - \lambda I| = \lambda^4 - \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C, \quad C = \det \rho^R, \quad (42)$$

где A , B и C – функции параметров $a = (a_i: i = 1, \dots, N, a_{ij}: j > i, i = 1, \dots, N-1, j = 2, \dots, N)$ и времени t .

В общем случае, если нас интересует состояние с фиксированным набором собственных чисел λ_i , $i = 1, 2, 3$, коэффициенты характеристического уравнения представляют собой известные функции A_0 , B_0 и C_0 от собственных чисел λ_i , и нам нужно найти набор параметров a , которые являются решениями следующей системы алгебраических уравнений в оптимизированный момент времени t_0 (найденный в приложении А):

$$A(a, t_0) = A_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad B(a, t_0) = B_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad C(a, t_0) = C_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (43)$$

При заданном N и нужных значениях собственных чисел λ_i , $i = 1, 2, 3$, найдем приближенное решение этой системы, т. е. такие параметры a , которые минимизируют расхождение

$$\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sqrt{(A - A_0)^2 + (B - B_0)^2 + (C - C_0)^2}. \quad (44)$$

Для этого можно использовать любой доступный алгоритм многопараметрической минимизации. Если минимум расхождения ε превышает определенное значение для заданной длины коммуникационной линии N ($\varepsilon \gtrsim 10^{-10}$ в нашем случае), мы говорим, что состояние не может быть создано с помощью коммуникационной линии длины N . Тогда N_c является максимальной длиной N такой, что $\varepsilon \ll 10^{-10}$.

Рис. 7. Расхождения $\varepsilon(L_3)$ и $\varepsilon(L_4)$ как функции длины N коммуникационной линии.

Для пояснения проведенных рассуждений рассмотрим создание вершин L_3 и L_4 тетраэдра на рис. 5. Для этих вершин имеем соответственно

$$A_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad B_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}, \quad C_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0$$

и

$$A_0\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}, \quad B_0\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16}, \quad C_0\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}.$$

Расхождения $\varepsilon(L_3)$ и $\varepsilon(L_4)$ как функции N показаны на рис. 7. При переходе от $N = 16$ к $N = 17$ величины $\varepsilon(L_3)$ и $\varepsilon(L_4)$ испытывают скачки соответственно с $\sim 10^{-12}$ до $\sim 10^{-5}$ и с $\sim 10^{-13}$ до $\sim 10^{-4}$. Это указывает на то, что вершины L_3 и L_4 не достижимы при $N > 16$. Поэтому мы приходим к выводу, что $N_c(L_4) = N_c(L_3) = 16$.

Список литературы

- [1] S. Bose, “Quantum communication through an unmodulated spin chain”, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:20 (2003), 207901, 4 pp.
- [2] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, A. J. Landahl, “Perfect state transfer in quantum spin networks”, *Phys. Rev. Lett.*, **92**:18 (2004), 187902, 4 pp.
- [3] C. Albanese, M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, “Mirror inversion of quantum states in linear registers”, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:23 (2004), 230502, 4 pp.
- [4] P. Karbach, J. Stolze, “Spin chains as perfect quantum state mirrors”, *Phys. Rev. A*, **72**:3 (2005), 030301, 4 pp.
- [5] G. Gualdi, V. Kostak, I. Marzoli, P. Tombesi, “Perfect state transfer in long-range interacting spin chains”, *Phys. Rev. A*, **78**:2 (2008), 022325, 5 pp.
- [6] A. Wójcik, T. Luczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska, “Unmodulated spin chains as universal quantum wires”, *Phys. Rev. A*, **72**:3 (2005), 034303, 3 pp.
- [7] L. Banchi, T. J. G. Apollaro, A. Cuccoli, R. Vaia, P. Verrucchi, “Optimal dynamics for quantum-state and entanglement transfer through homogeneous quantum systems”, *Phys. Rev. A*, **82**:5 (2010), 052321, 5 pp.

- [8] A. Zwick, O. Osenda, “Quantum state transfer in a XX chain with impurities”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:10 (2011), 105302, 16 pp.
- [9] L. Banchi, T. J. G. Apollaro, A. Cuccoli, R. Vaia, P. Verrucchi, “Long quantum channels for high-quality entanglement transfer”, *New J. Phys.*, **13**:12 (2011), 123006.
- [10] T. J. G. Apollaro, L. Banchi, A. Cuccoli, R. Vaia, P. Verrucchi, “99%-fidelity ballistic quantum-state transfer through long uniform channels”, *Phys. Rev. A*, **85**:5 (2012), 052319, 11 pp.
- [11] S. I. Doronin, A. I. Zenchuk, “High-probability state transfers and entanglements between different nodes of the homogeneous spin- $\frac{1}{2}$ chain in an inhomogeneous external magnetic field”, *Phys. Rev. A*, **81**:2 (2010), 022321, 6 pp.
- [12] H. L. Haselgrove, “Optimal state encoding for quantum walks and quantum communication over spin systems”, *Phys. Rev. A*, **72**:6 (2005), 062326, 9 pp.
- [13] C. A. Bishop, Y.-C. Ou, Z.-M. Wang, M. S. Byrd, “High-fidelity state transfer over an unmodulated linear XY spin chain”, *Phys. Rev. A*, **81**:4 (2010), 042313, 7 pp.
- [14] M. Zukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, A. K. Ekert, “Event-ready-detectors’ Bell experiment via entanglement”, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:28 (1993), 4287–4290.
- [15] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation”, *Nature*, **390**:6660 (1997), 575–579.
- [16] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, S. Popescu, “Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:6 (1998), 1121–1125.
- [17] N. A. Peters, J. T. Barreiro, M. E. Goggin, T.-C. Wei, P. G. Kwiat, “Remote state preparation: arbitrary remote control of photon polarization”, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:15 (2005), 150502, 4 pp.
- [18] N. A. Peters, J. T. Barreiro, M. E. Goggin, T.-C. Wei, P. G. Kwiat, “Remote state preparation: arbitrary remote control of photon polarizations for quantum communication”, *Quantum Communications and Quantum Imaging III*, Proc. of SPIE, **5893**, eds. R. E. Meyers, Ya. Shih, SPIE, Bellingham, WA, 2005, 589308.
- [19] B. Dakić, Ya. O. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, Č. Brukner, P. Walther, “Quantum discord as resource for remote state preparation”, *Nat. Phys.*, **8** (2012), 666–670.
- [20] G. Y. Xiang, J. Li, B. Yu, G. C. Guo, “Remote preparation of mixed states via noisy entanglement”, *Phys. Rev. A*, **72**:1 (2005), 012315, 6 pp.
- [21] L. L. Liu, T. Hwang, “Controlled remote state preparation protocols via AKLT states”, *Quantum Inf. Process.*, **13**:7 (2014), 1639–1650.
- [22] G. A. Bochkin, A. I. Zenchuk, “Remote one-qubit-state control using the pure initial state of a two-qubit sender: Selective-region and eigenvalue creation”, *Phys. Rev. A*, **91**:6 (2015), 062326, 11 pp.
- [23] G. A. Bochkin, A. I. Zenchuk, “Extension of remotely creatable region via local unitary transformation on receiver side”, *Quantum Inf. Comput.*, **16**:15–16 (2016), 1349–1364.
- [24] E. I. Kuznetsova, A. I. Zenchuk, “High-probability quantum state transfer in an alternating open spin chain with an XY Hamiltonian”, *Phys. Lett. A*, **372**:40 (2008), 6134–6140.
- [25] J. Stolze, G. A. Álvarez, O. Osenda, A. Zwick, “Robustness of spin-chain state-transfer schemes”, *Quantum State Transfer and Network Engineering. Quantum Science and Technology*, eds. G. M. Nikolopoulos, I. Jex, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014, 149–182.
- [26] A. Bayat, V. Karimipour, “Thermal effects on quantum communication through spin chains”, *Phys. Rev. A*, **71**:4 (2005), 042330, 7 pp.
- [27] P. Cappellaro, “Coherent-state transfer via highly mixed quantum spin chains”, *Phys. Rev. A*, **83**:3 (2011), 032304, 10 pp.
- [28] W. Qin, Ch. Wang, G. L. Long, “High-dimensional quantum state transfer through a quantum spin chain”, *Phys. Rev. A*, **87**:1 (2013), 012339, 7 pp.

- [29] A. Bayat, “Arbitrary perfect state transfer in d-level spin chains”, *Phys. Rev. A*, **89**:6 (2014), 062302, 6 pp.
- [30] C. Godsil, S. Kirkland, S. Severini, Ja. Smith, “Number-theoretic nature of communication in quantum spin systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **109**:5 (2012), 050502, 4 pp.
- [31] R. Sousa, Ya. Omar, “Pretty good state transfer of entangled states through quantum spin chains”, *New J. Phys.*, **16**:12 (2014), 123003.
- [32] D. Burgarth, S. Bose, “Conclusive and arbitrarily perfect quantum-state transfer using parallel spin-chain channels”, *Phys. Rev. A*, **71**:5 (2005), 052315, 6 pp.
- [33] K. Shizume, K. Jacobs, D. Burgarth, S. Bose, “Quantum communication via a continuously monitored dual spin chain”, *Phys. Rev. A*, **75**:6 (2007), 062328, 6 pp.
- [34] J. Stolze, A. I. Zenchuk, “Remote two-qubit state creation and its robustness.”, *Quantum Inf. Process.*, **15**:8 (2016), 3347–3366.

Поступила в редакцию 9.12.2016,
после доработки 15.05.2017