Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Ильичев, Устойчивость уединенных волн в мембранных трубах: слабонелинейный анализ, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 214–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:42:55

© 2017 г.

А. Т. Ильичев*

УСТОЙЧИВОСТЬ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В МЕМБРАННЫХ ТРУБАХ: СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

Изучается задача об устойчивости уединенных волн, распространяющихся в мембранных трубах, заполненных жидкостью. Рассматриваются только волны, скорости которых близки к скоростям, удовлетворяющим линейному дисперсионному соотношению (известно, что возможно существование четырех семейств уединенных волн, имеющих такие скорости), т. е. волны малой (но конечной) амплитуды, ответвляющиеся от состояния покоя системы. Другими словами, используется слабонелинейное описание уединенных волн. Показано, что если скорость уединенной волны отделена от нуля, то сама уединенная волна орбитально устойчива вне зависимости от того, покоится жидкость в начальный момент или нет.

Ключевые слова: мембранная труба, уединенная волна, бифуркация, орбитальная устойчивость.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9317>

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение жидкости в упругих границах является предметом интенсивного изучения, которое прежде всего оправдано многочисленными приложениями в ряде важных областей человеческой деятельности, в частности в ледовой инженерии и медицине. Особенно следует отметить исследования нелинейной стадии развития волновых движений идеальной жидкости (см., например, [1]–[6]), имеющие и чисто теоретический интерес, связанный с использованием сложных математических методов и теорий (таких, как асимптотические методы в различной форме, методы теории операторов, теории бифуркаций и т. д.). Особый интерес вызывает изучение условий устойчивости нелинейных волновых образований.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: ilichev@mi.ras.ru

В настоящей работе рассматриваются свойства устойчивости распространяющихся локализованных волн постоянной формы в податливых мембранных трубах, наполненных идеальной жидкостью. В ряде работ (см., например, [7]) обсуждается возможность моделирования стенок человеческих артерий при помощи упругих мембран. Конечно, свободные гибкие трубки, наполненные идеальной жидкостью, не могут служить моделью кровотока в артериях, что связано, в первую очередь, с двумя обстоятельствами: кровь является неидеальной жидкостью (а скорее, даже неньютоновской), а сама артерия погружена во внешнюю среду и на границе с внешней средой необходимо ставить адекватные граничные условия. Добавим, что кровоток в артериях сейчас активно изучается физиками в сотрудничестве с медиками и существующие его модели очень сложны (см., например, [8]). В работах [9]–[11] на основе мембранного подхода к моделированию стенок артерии делается попытка общего объяснения явления возникновения аневризмы, как явления бифуркации из однородного состояния. Однако стоячая уединенная волна, моделирующая аневризму в рамках данной приближенной модели, оказывается неустойчивой по форме в случае неподвижной на бесконечности жидкости, а при наличии среднего потока – орбитально устойчивой, т. е. приобретающей в результате возмущения скорость и начинающей движение. По-видимому, следует признать, что формирование аневризмы происходит в результате повреждения стенок артерии, что согласуется с результатами работы [6].

Основные уравнения для квазиодномерного движения идеальной жидкости внутри осесимметричной мембранной трубы были получены в работе [12] при помощи прямого вывода. Изучение спектральной устойчивости ветви решений типа неподвижной уединенной волны (так называемой аневризмы) при отсутствии жидкости внутри трубы (случай контролируемого давления) представлен в работе [9]. Параметром бифуркации в этом случае служит давление накачивания. Установлено, что вся ветвь уединенных волн спектрально неустойчива (т. е. возмущение формы волны экспоненциально растет во времени). В работе [10] изучается устойчивость всей ветви решений типа аневризмы, когда жидкость внутри трубы присутствует, но средний поток (постоянная скорость жидкости на бесконечности) равен нулю. Доказано, что аневризма по-прежнему неустойчива, однако присутствие жидкости оказывает сильный стабилизирующий эффект. Авторы статьи [11] предприняли анализ устойчивости решения типа аневризмы в присутствии среднего потока и обнаружили, что если скорость жидкости на бесконечности отделена от нуля, то аневризма спектрально устойчива.

Используемая модель является весьма реалистичной для течения воды по шлангам. В настоящей статье рассматривается вопрос об устойчивости бегущих уединенных волн, возникающих в результате возмущения давления в подобных трубах (в качестве примера таких явлений приведем импульсную подачу воды в использовавшиеся в недалеком прошлом пожарные шланги). Параметром бифуркации в этом случае является не давление накачивания (оно может принимать произвольные значения), а скорость волны. Рассматриваются только те волны, скорость которых близка к критическим скоростям, определяемым из дисперсионного соотношения, т. е. волны, имеющие малую (но конечную) амплитуду и отвечающие от состояния покоя системы. Другими словами, рассматривается слабонелинейное описание уединенных волн.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 формулируется задача (базовые уравнения волн, их интегралы и т. д.) и описываются семейства бегущих уединенных волн, ответвляющихся от состояния покоя. В разделе 3 излагается анализ устойчивости в слабонелинейном случае. Выводится асимптотическое уравнение Кортевега–де Фриза для семейств уединенных волн, ответвляющихся от состояния покоя, и на этом основании делается заключение о нелинейной орбитальной устойчивости этих волн. В разделе 4 представлено обсуждение.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И СЛАБОНЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН

Труба моделируется как несжимаемая, изотропная, упругая цилиндрическая мембрана. Она имеет постоянный радиус R и постоянную толщину H в недеформированном состоянии, предполагается бесконечно длинной, а краевые условия ставятся на бесконечности. Используются цилиндрические координаты, в недеформированном состоянии эти координаты обозначены через R, Θ, Z .

Предполагается, что осевая симметрия сохраняется в процессе всей деформации; деформированному состоянию соответствуют цилиндрические координаты r, θ, z , где $r = r(Z, t)$, $\theta = \theta(Z, t)$, $z = z(Z, t)$, а t обозначает время.

Главные направления деформации отвечают линиям широты, меридианов и нормалей к деформированной поверхности, а главные деформации определяются как

$$\lambda_1 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_2 = (r'^2 + z'^2)^{1/2}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{H}, \quad (1)$$

где индексы 1, 2, 3 использованы для кругового, осевого и радиального направлений соответственно, штрих обозначает дифференцирование по Z , а h – ширина стенки после деформации.

Главные напряжения Коши $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ деформированной конфигурации для несжимаемого материала имеют вид (суммирование по i нет)

$$\sigma_i = \lambda_i \widehat{W}_i - p, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\widehat{W} = \widehat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – упругий потенциал, $\widehat{W}_i = \partial \widehat{W} / \partial \lambda_i$, а p – множитель Лагранжа, ассоциированный с ограничением, вызванным несжимаемостью. Используя условие несжимаемости $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ и мембранное предположение об отсутствии напряжения в радиальном направлении $\sigma_3 = 0$, находим [13]

$$\sigma_i = \lambda_i W_i, \quad i = 1, 2,$$

где $W(\lambda_1, \lambda_2) = \widehat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1})$ и $W_1 = \partial W / \partial \lambda_1$, $W_2 = \partial W / \partial \lambda_2$.

В качестве примера приведем здесь три выражения для часто используемых упругих потенциалов, описывающих свойства материалов Варги, Огдена и Гента, которые даются, соответственно, формулами

$$\widehat{W} = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3), \quad (2)$$

$$\widehat{W} = \mu \sum_{r=1}^3 \frac{\mu_r (\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3)}{\alpha_r}, \quad (3)$$

$$\widehat{W} = -\frac{1}{2} \mu J_m \ln \left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{J_m} \right), \quad (4)$$

где μ – модуль сдвига для инфинитезимальных деформаций, $J_m > 0$ – постоянная, дающая максимально возможный сдвиг для материала, и $\alpha_1 = 1.3$, $\alpha_2 = 5.0$, $\alpha_3 = -2.0$, $\mu_1 = 1.491$, $\mu_2 = 0.003$, $\mu_3 = -0.023$. Материалы Огдена и Гента предложены в работах [14] и [15] соответственно и обычно используются для моделирования резины.

Уравнения движения для трубы могут быть выведены из полных уравнений нелинейной теории упругих оболочек (см., например, [16]), однако в статье [12] представлен более ясный и автономный вывод, основанный на балансе сил, приложенных к инфинитезимальному материальному элементу стенки трубы. Эти уравнения могут быть переписаны в безразмерной форме в виде

$$\left[\sigma_2 \frac{z'}{\lambda_2^2} \right]' - Pr r' = \ddot{z}, \quad \left[\sigma_2 \frac{r'}{\lambda_2^2} \right]' - \frac{\sigma_1}{\lambda_1} + Pr z' = \ddot{r}, \quad (5)$$

где $Z \rightarrow RZ$,

$$z = z_\infty Z + u(Z, t), \quad r = r_\infty + w(Z, t), \quad u, w \rightarrow 0, \quad Z \rightarrow \infty,$$

и P – безразмерное давление со стороны жидкости на стенку трубы, а точка обозначает дифференцирование по времени.

Выраженные в терминах лагранжевой координаты Z и времени t , безразмерные уравнения движения жидкости внутри трубы имеют вид [12] (вывод см. в [10], [11])

$$\dot{r} z' - r' \dot{z} + v_f r' + \frac{1}{2} r v_f' = 0, \quad b_f [\dot{v}_f z' - v_f' \dot{z} + v_f v_f'] + P' = 0, \quad (6)$$

где b_f определяется формулой $b_f = \rho_f R / (\rho H)$, ρ_f – плотность жидкости, v_f – скорость жидкости.

Модельные уравнения (5) и (6) допускают однородное решение

$$r = r_\infty, \quad z' = z_\infty = \lambda_{2\infty}, \quad v_f = v_{f\infty}, \quad P = P_\infty \equiv \frac{W_1(r_\infty, \lambda_{2\infty})}{r_\infty \lambda_{2\infty}}. \quad (7)$$

Будем полагать, что общее решение в виде локализованной бегущей волны зависит от Z и t через комбинацию $Z - \hat{c}t$, где $\hat{c}$ – скорость волны. Локализованность волны означает, что при $Z - \hat{c}t \rightarrow \pm\infty$ труба, заполненная жидкостью, находится в однородном состоянии (7).

Для дальнейшего также необходимо напомнить дисперсионное соотношение для волн малой амплитуды на однородном фоне (7). Полагая, что возмущения малой амплитуды пропорциональны $e^{i(\lambda_{2\infty}/r_\infty)k(Z - \hat{c}t)}$, получим, что безразмерное волновое число k и волновая скорость $c = \hat{c}\lambda_{2\infty}$ удовлетворяют дисперсионному уравнению [17]

$$(k^2 m + 2)c^4 - 4v_{f\infty}c^3 - (m\alpha_0 k^2 + m\gamma_1 k^2 - 2v_{f\infty}^2 - m\beta_0 + m\beta_1 + 2\gamma_1)c^2 + 4v_{f\infty}\gamma_1 c - 2v_{f\infty}^2\gamma_1 + m\gamma_1(k^2\alpha_0 + \beta_1 - \beta_0) - m(\alpha_1 - \beta_0)^2 = 0, \quad (8)$$

где $m = 1/b_f r_\infty^2 \lambda_{2\infty}$, а выражение для величин $\alpha_0, \alpha_1, \gamma_1, \beta_0, \beta_1$ приведено в работе [17] (принимая во внимания замечания в [11]). Если $v_{f\infty} = 0$, уравнение (8) становится биквадратным по c и его корни в пределе $k \rightarrow 0$ даются выражениями

$$4c^2 = 2\gamma_1 + m(\beta_1 - \beta_0) \pm \sqrt{[2\gamma_1 - m(\beta_1 - \beta_0)]^2 + 8m(\alpha_1 - \beta_0)^2}, \quad (9)$$

так что все четыре корня являются вещественными [11]. Эти характеристические скорости отвечают четырем ветвям волн: две из них распространяются направо, а две – симметрично налево.

Легко видеть [12], что уравнения для жидкости (6) в этом случае можно один раз проинтегрировать:

$$P = P_\infty + v_{f0} \left(1 - \frac{r_\infty^4}{r^4} \right), \quad v_f = \frac{v_{f\infty} r_\infty^2}{r^2}, \quad (10)$$

где постоянная v_{f0} дается формулой

$$v_{f0} = \frac{1}{2} b_f (v_{f\infty} - c)^2.$$

Известно также [11], [12], что уравнения (7) в силу (10) имеют два интеграла, которые выражаются как

$$W - \lambda_2 W_2 + \frac{1}{2} c^2 \lambda_2^2 = C_1, \quad \frac{W_2 z'}{\lambda_2} - \frac{1}{2} P^* r^2 - c^2 z' = C_2, \quad (11)$$

где штрих теперь обозначает дифференцирование по $Z - \hat{c}t$,

$$P^* = P_\infty + v_{f0} \left(1 + \frac{\lambda_{1\infty}^4}{r^4} \right),$$

а постоянные C_1 и C_2 выражаются через величины в однородном состоянии (7).

Таким образом, для бегущих волн с учетом (10) имеем динамическую систему третьего порядка на неизвестные $(r, r', y \equiv z')^T$, у которой имеются два первых интеграла (11), которые соответствуют гиперповерхностям в фазовом пространстве системы. Пересечение этих гиперповерхностей и упомянутая динамическая система определяют динамику бегущих волн, которая в результате описывается одним автономным неявным дифференциальным уравнением первого порядка. Как будет показано ниже, это уравнение становится явным, если мы рассматриваем асимптотическое слабонелинейное описание динамики бегущих волн.

Отметим сначала, что два интеграла (11) имеют вид $f(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ и $z' = g(\lambda_1, \lambda_2)$ и уравнения (11) допускают тривиальное решение (7). Для того чтобы получить нетривиальные решения этих уравнений, запишем $\lambda_1 = r = r_\infty + w(Z - \hat{c}t)$ и выведем уравнение для $w(Z - \hat{c}t)$. Для этого, в принципе, можно выразить из первого из интегралов деформацию λ_2 через w . Однако в общем случае это выражение нельзя получить в явном виде, а его разложение в ряд Тейлора при малых w может быть получено стандартным путем [11]. Второй из интегралов может затем быть использован для нахождения тейлоровского разложения z' по w . Подставляя полученные выражения в (1), имеем

$$(w')^2 = \omega(c, r_\infty, \lambda_{2\infty}, v_{f\infty}) w^2 + \gamma(c, r_\infty, \lambda_{2\infty}, v_{f\infty}) w^3 + O(w^4), \quad (12)$$

где выражение для $\omega(c, r_\infty, \lambda_{2\infty}, v_{f\infty})$ приведено в [11] (см. уравнение (35) в указанной работе), а выражение для $\gamma(c, r_\infty, \lambda_{2\infty}, v_{f\infty})$ – в [17] (см. уравнение (3.7) в указанной работе).

Очевидно, бифуркация происходит, когда коэффициент $\omega(c, r_\infty, \lambda_{2\infty}, v_{f\infty})$ становится равным нулю. Рассматривая скорость c в качестве параметра бифуркации, предположим далее, что $v_{f\infty} = 0$ (так как в [11] показано, что ненулевой средний поток только стабилизирует движение), и фиксируем r_∞ и $\lambda_{2\infty}^2$. Критическое значение c , обозначенное c_{cr} , определяется бифуркационным условием $\omega(c_{cr}, r_\infty, \lambda_{2\infty}) = 0$, которое сводится к (9).

Разлагая коэффициенты в (12) в ряд около $c = c_{cr}$, получим

$$V'' - V + V^2 + O(\epsilon) = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\epsilon\omega'_{cr}}{3\gamma_{cr}}V(\xi), & \xi &= \sqrt{|\epsilon\omega'_{cr}|}(Z - \hat{c}t), \\ \omega'_{cr} &= \left. \frac{\partial\omega}{\partial c} \right|_{c=c_{cr}}, & \gamma_{cr} &= \gamma(c_{cr}, r_\infty, \lambda_{2\infty}), \end{aligned} \quad (14)$$

$\epsilon = |c_{cr} - c|$, если $\omega'_{cr} > 0$, $\gamma_{cr} < 0$, и $\epsilon = -\text{sgn}(\omega_{cr})|c_{cr} - c|$, если $\gamma_{cr} > 0$.

Следовательно, если $\gamma_{cr} < 0$ и $\omega'_{cr} > 0$ или $\gamma_{cr} > 0$ и $\omega'_{cr} < 0$, то семейство уединенных волн ответвляется от состояния покоя в результате закритической бифуркации ($c > c_{cr}$), а в случае $\gamma_{cr} > 0$ и $\omega'_{cr} > 0$ эта бифуркация является докритической ($c < c_{cr}$).

Если пренебречь слагаемым $O(\epsilon)$, то уравнение (13) имеет точное решение, соответствующее уединенной волне

$$V = V_0 \equiv \frac{3}{2} \text{sech}^2 \frac{\xi}{2}. \quad (15)$$

Уравнение (13) является специальным случаем обратимого дифференциального уравнения, для которого справедлив результат грубости, который ранее был доказан в работе [18]. Другими словами, решение полного нелинейного уравнения (13), которое дается формулой (15) при $\epsilon = 0$, находится вблизи (15) для достаточно малых ϵ и стремится к нулю при $\xi \rightarrow \pm\infty$, а именно

$$|V - V_0| \leq C\epsilon e^{-|\xi|}, \quad \epsilon \ll 1, \quad (16)$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная. Прекрасное соответствие между асимптотическим (15) и точным результатом (соответствующим решением уравнения (13), см. [17], рис. 1), без сомнения, является демонстрацией свойства грубости (16).

Решение (15), являющееся приближением решения типа уединенной волны полной системы уравнений с учетом (14), представляет собой выражение для откло-

Рис. 1. Бегущая уединенная волна на стенке мембранной трубы.

нения радиуса r от положения равновесия (см. рис. 1). Все остальные неизвестные величины (продольная деформация, скорость жидкости и давление) тогда однозначно определяются и имеют также вид локализованной бегущей волны на фоне решения (7).

3. ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ БЕГУЩИХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Рассмотрим далее устойчивость слабонелинейных уединенных волн (15). Предположим, что возмущения однородного состояния (7) зависят от медленной временной переменной $\tau = \epsilon^{3/2}t$, где $\epsilon = |c_{cr} - c|$, и переменной ξ . Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} r &= r_\infty + \epsilon[w_1(\xi, \tau) + \epsilon w_2(\xi, \tau) + \dots], \\ z &= z_\infty Z + \sqrt{\epsilon}[u_1(\xi, \tau) + \epsilon u_2(\xi, \tau) + \dots], \\ v_f &= \epsilon v_{1f}(\xi, \tau) + \epsilon^2 v_{2f} + \dots, \\ P &= P_\infty + \epsilon[p_1(\xi, \tau) + \epsilon p_2(\xi, \tau) + \dots]. \end{aligned} \quad (17)$$

Разложим P_∞ из (7) в ряд Тейлора:

$$P_\infty = \frac{W_1(c_{cr}, r_\infty, \lambda_{2\infty})}{r_\infty \lambda_{2\infty}} + \epsilon P_1 + \dots. \quad (18)$$

Будем предполагать, что значение c_{cr} отделено от нуля, т. е. не является малой порядка ϵ . Равенство нулю c_{cr} возможно для ветви, отвечающей знаку “минус” в (9) при

$$\gamma_1(\beta_1 - \beta_0) - (\alpha_1 - \beta_0)^2 = 0. \quad (19)$$

Равенство (19) является условием бифуркации из состояния покоя семейства стоячих уединенных волн [9]. Отметим, что условие

$$\gamma_1(\beta_1 - \beta_0) - (\alpha_1 - \beta_0)^2 \geq 0,$$

обеспечивающее вещественность четырех корней (9), является достаточным для устойчивости однородного состояния в рассматриваемом случае [19].

Подставляя (17), (18) в уравнения (5) и (6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим

$$\mathbf{L} \begin{pmatrix} w_1 \\ \sqrt{|\omega'|} u_{1\xi} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{W_1}{z_\infty} + W_{12} & W_{22} - z_\infty^2 c_{\text{cr}}^2 \\ z_\infty(W_1 - r_\infty W_{11}) - \frac{2b_f r_\infty^2}{z_\infty} c_{\text{cr}}^2 & r_\infty(W_1 - z_\infty W_{12}) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где W_1 , W_{11} , W_{12} , W_{22} – значения при $c = c_{\text{cr}}$ и $(r, z) = (r_\infty, z_\infty)$. Легко видеть, что равенство $\omega(c_{\text{cr}}, r_\infty, z_\infty) = 0$ означает, что $\det \mathbf{L} = 0$ и уравнение (20), таким образом, имеет нетривиальное решение для w_1 и $u_{1\xi}$. В следующем порядке по ϵ получим

$$\mathbf{L} \begin{bmatrix} w_{2\xi} \\ \sqrt{|\omega'|} u_{2\xi\xi} \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

$$v_{1f} = \frac{2c_{\text{cr}}}{r_\infty} w_1, \quad p_{1\xi} = \frac{2b_f c_{\text{cr}}^2}{r_\infty} w_{1\xi}, \quad v_{2f} = \frac{2c_{\text{cr}}}{r_\infty} w_2 - \frac{6c_{\text{cr}}}{r_\infty^2} w_1 w_{1\xi} - \frac{2z_\infty}{r_\infty} \dot{w}_1,$$

$$p_{2\xi} = \frac{2b_f c_{\text{cr}}^2}{r_\infty} w_{2\xi} - \frac{10b_f c_{\text{cr}}^2}{r_\infty^2} w_1 w_{1\xi} - \frac{4b_f c_{\text{cr}}}{r_\infty} \dot{w}_1 - \frac{4b_f c_{\text{cr}}^2}{r_\infty z_\infty} u_{1\xi} w_{1\xi}.$$

Вектор $\mathbf{b}$ содержит только функцию w_1 и ее производные. Вычисляя скалярное произведение вектора $\mathbf{b}$ с левым собственным вектором $\mathbf{L}$, отвечающим нулевому собственному значению, получим эволюционное уравнение вида

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} - c_0 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + c_1 w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} = 0, \quad (21)$$

где c_0 , c_1 и c_2 – постоянные. Так как (21) переходит в (13) для $\epsilon = 0$ при независимости решения от времени, то это уравнение представляется в виде

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tau} - c_0 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \xi} + c_0 \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \xi} + c_0 \frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial \xi^3} = 0, \quad (22)$$

где

$$\tilde{V} = -\text{sgn}(\omega'_{\text{cr}} \gamma_{\text{cr}}) \frac{3\gamma_{\text{cr}}}{2\omega'_{\text{cr}}} w_1,$$

и оставшаяся константа определяется из подстановки решения типа бегущей волны в линеаризованное уравнение (22) и последующего сравнения получившегося дисперсионного соотношения с уравнением (8). Однако для цели данного исследования точное выражение c_0 не требуется.

Под действием преобразования координат $T = |c_0|\tau - \operatorname{sgn} c_0 \xi$, $x = \operatorname{sgn} c_0 \xi$, $u = 2\tilde{V}$ уравнение (22) записывается в стандартном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (23)$$

Решение (15) уравнения (22) отвечает следующему решению уравнения (23) типа бегущей уединенной волны:

$$u = u_0 = 3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - T}{2} \right). \quad (24)$$

Малое нелинейное возмущение любой уединенной волны уравнения Кортевега–де Фриза (24) (и, в частности, (24)) может привести к образованию новой уединенной волны, имеющей немного другую скорость. Поэтому следует изучать орбитальную устойчивость уединенных волн, а именно: если решение $u(x, T)$ уравнения (23) в начальный момент близко к уединенной волне $u_c(x)$ в пространстве Соболева квадратично-интегрируемых вместе с производными функций $H^1(\mathbb{R})$, то оно останется близким к множеству сдвигов уединенной волны (или к орбите уединенной волны под действием группы сдвигов по времени) для любого значения времени $t > 0$. Другими словами, для достаточно малого ε существует δ такое, что если

$$\|u(\cdot, 0) - u_c(\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta,$$

то

$$\inf_s \|u(\cdot, T) - u_c(\cdot + s)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Свойство орбитальной устойчивости решений уравнения (23) установлено в работе [20] (см. также [21]). Это определение устойчивости означает устойчивость формы волны, поэтому ее часто называют *устойчивостью по форме*.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе исследована устойчивость локализованных бегущих волн (уединенных волн), распространяющихся с ненулевой скоростью вдоль горизонтально протяженной осесимметричной упругой трубы, заполненной покоящейся на бесконечности жидкостью (жидкостью с нулевым средним потоком). Труба представляет собой упругую мембранную оболочку, динамика которой описывается довольно сложными уравнениями (5). Внимание сосредоточено на модели “мягкого” материала трубы, который описывается, в частности, моделями с упругими потенциалами Варги (2), Гента (3) или Огдена (4). Подобные упругие потенциалы, в частности, отвечают таким материалам, как резина.

Для описания жидкости, заполняющей трубу, используются простые уравнения. Рассматривается двумерное движение идеальной несжимаемой жидкости по осесимметричной трубе; в пределе длинных волн (малого отношения радиуса трубы к длине волны, распространяющейся вдоль нее) соответствующие уравнения допускают осреднение по поперечному сечению трубы, что приводит к уравнениям (6), описывающим квазиодномерную динамику жидкости [11]. Рассматриваемое распространение волн вдоль трубы, моделируемое уравнениями (5), (6), таким образом,

предполагает значительную длину волны по сравнению с радиусом трубы. Кроме того, амплитуда волн считается достаточно малой, так что для описания их динамики справедливо выведенное слабонелинейное асимптотическое приближение к (5), (6), данное уравнением (23). Само изучаемое явление соответствует распространению уединенных волн по трубе, заполненной жидкостью, когда в этой трубе созданы условия для существования таких волн (например, в шлангах насосных станций и т. п.).

Рассматривается устойчивость только относительно осесимметричных возмущений, которые, однако, как и в случае капиллярной неустойчивости вертикальной струи идеальной жидкости, могут оказаться самыми неустойчивыми [22].

При изучении устойчивости бегущих уединенных волн предполагается, что средний поток равен нулю, т. е. жидкость покоится на бесконечности. Это предположение вызвано тем, что, как было установлено, средний поток стабилизирует уединенную волну и даже изначально стоячая волна, будучи неустойчивой в случае отсутствия среднего потока [10], становится спектрально устойчивой, если скорость жидкости на бесконечности отделена от нуля [11].

Мы ограничились изучением локальной динамики четырех семейств уединенных волн, отвечающих от состояния покоя системы (7) при четырех характеристических скоростях (9), т. е. амплитуды волн, параметризующих указанные семейства, считаются малыми. Получено, что временная динамика этих волн описывается уравнением (23), а сами волны имеют свойства решений этого уравнения. В частности, эти волны не обладают свойством устойчивости в классическом смысле: если возмущение волны мало, то оно остается малым во все время движения. Упомянутая устойчивость преобразуется в орбитальную устойчивость, определение которой было дано в разделе 3. Вообще говоря, в случае решений трансляционно-инвариантных систем (каковой является и наша система) всегда можно говорить только об орбитальной устойчивости или устойчивости по форме решений. В данном случае известно, что бегущая уединенная волна (24), будучи решением уравнения (23), орбитально устойчива. Таким образом, основным результатом настоящей статьи является доказательство свойства орбитальной устойчивости рассматриваемой бегущей уединенной волны при условии, что ее скорость находится в малой окрестности характеристических скоростей (9), которые, в свою очередь, имеют конечные ненулевые значения (отделены от нуля).

Устойчивость глобальных семейств уединенных волн может быть изучена при помощи построения функции Эванса (см., например, [10], [11]), которое обеспечивает исследование спектральной (линейной) устойчивости. При этом если возмущения растут (случай неустойчивости), то они растут экспоненциально. Если подобное исследование устойчивости решения типа уединенной волны полной системы уравнений (5), (6) дает положительный результат, то можно говорить об устойчивости формы указанного решения, его трансляционные свойства в рамках спектральной устойчивости учесть нельзя. Насколько скорость на меньшей ветви (9) может быть мала для устойчивости уединенных волн (т. е. при каких малых скоростях происходит переход от спектральной устойчивости к неустойчивости уединенной волны), можно определить только при помощи анализа линейной устойчивости. Исследование спектральной устойчивости сильно нелинейных уединенных волн (глобальных семейств этих решений) будет предметом публикации в ближайшее время.

Список литературы

- [1] L. K. Forbes, “Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. I. High order series solution”, *J. Fluid Mech.*, **169** (1986), 409–428.
- [2] L. K. Forbes, “Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. II. Galerkin solutions”, *J. Fluid Mech.*, **188** (1988), 491–508.
- [3] А. Т. Ильичев, “Уединенные волновые пакеты и темные солитоны на поверхности раздела вода–лед”, *Тр. МИАН*, **289** (2015), 163–177.
- [4] А. Т. Ильичев, “Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода–лед”, *УМН*, **70:6**(426) (2015), 85–138.
- [5] А. Т. Ильичев, “Уединенные волновые пакеты под сжатым ледовым покровом”, *Изв. РАН. МЖГ*, **51:3** (2016), 32–42.
- [6] A. T. Il'ichev, Y.-B. Fu, “Stability of an inflated hyperelastic membrane tube with localized wall thinning”, *Internat. J. Eng. Sci.*, **80** (2014), 53–61.
- [7] G. F. Holzapfel, R. W. Ogden, “Constitutive modelling of arteries”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **466:2118** (2010), 1551–1597.
- [8] D. Sodhani, S. Reese, R. Moreira, P. Mela, S. Jockenhoevel, S. E. Stapleton, “Multi-scale modelling of textile reinforced artificial tubular aortic heart valves”, *Meccanica*, **52:3** (2017), 677–693.
- [9] S. P. Pearse, Y.-B. Fu, “Characterization and stability of localized bulging/necking in inflated membrane tubes”, *IMA J. Appl. Math.*, **75:4** (2010), 581–602.
- [10] A. T. Il'ichev, Y.-B. Fu, “Stability of aneurysm solutions in a fluid-filled elastic membrane tube”, *Acta Mech. Sin.*, **28:4** (2012), 1209–1218.
- [11] Y.-B. Fu, A. T. Il'ichev, “Localized standing waves in a hyperelastic membrane tube and their stabilization by a mean flow”, *Math. Mech. Solids*, **20** (2015), 1198–1214.
- [12] M. Epstein, C. Johnston, “On the exact speed and amplitude of solitary waves in fluid-filled elastic tubes”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **457:2009** (2001), 1195–1213.
- [13] D. M. Haughton, R. W. Ogden, “Bifurcation of inflated circular cylinders of elastic material under axial loading. I. Membrane theory for thin-walled tubes”, *J. Mech. Phys. Solids*, **27:3** (1979), 179–212.
- [14] R. W. Ogden, “Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **326:1567** (1972), 565–584.
- [15] A. N. Gent, “A new constitutive relation for rubber”, *Rubber Chem. Tech.*, **69:1** (1996), 59–61.
- [16] B. Budiansky, “Notes on nonlinear shell theory”, *J. Appl. Mech.*, **35:2** (1968), 393–401.
- [17] Y.-B. Fu, A. T. Il'ichev, “Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement”, *IMA J. Appl. Math.*, **75:2** (2010), 257–268.
- [18] G. Iooss, K. Kirchgässner, “Water waves for a small surface tension: An approach via normal form”, *Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A*, **122:3–4** (1992), 267–299.
- [19] Y.-C. Chen, “Stability and bifurcation of finite deformations of elastic cylindrical membranes – Part I: Stability analysis”, *Internat. J. Sol. Struct.*, **34:14** (1997), 1735–1749.
- [20] T. B. Benjamin, “The stability of solitary waves”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **328:1573** (1972), 153–183.
- [21] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, “Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I”, *J. Funct. Anal.*, **74:1** (1987), 160–197.
- [22] Ф. Дразин, *Введение в теорию гидродинамической устойчивости*, Физматлит, М., 2005.