Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Герджиков, Модели типа Кулиша–Склянина: интегрируемость и редукции, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 187–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:18:16

© 2017 г.

В. С. Герджиков^{*†‡}

МОДЕЛИ ТИПА КУЛИША–СКЛЯНИНА: ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И РЕДУКЦИИ

Рассмотрена задача Римана–Гильберта, связанная с симметричными пространствами $SO(2r+1)/S(O(2r-2s+1) \otimes O(2s))$, $s \geq 1$, типа **ВД.І**. Речь идет о двух задачах Римана–Гильберта: первая сформулирована на вещественной оси $\mathbb{R}$ в комплексной плоскости переменной λ ; вторая – в пространстве $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. Первая задача при $s = 1$ позволяет найти решение для модели Кулиша–Склянина; вторая имеет отношение к новому типу модели Кулиша–Склянина. Рассмотрен важный пример глубоких нетривиальных редукций модели Кулиша–Склянина. Показано их влияние на матрицу рассеяния. В частности, получены новые двухкомпонентные нелинейные уравнения Шредингера. Наконец, с использованием соотношений Вронского показано, что метод обратной задачи рассеяния для моделей Кулиша–Склянина можно интерпретировать как обобщенные преобразования Фурье. Таким образом, найден способ охарактеризовать все фундаментальные свойства моделей Кулиша–Склянина, включая иерархию уравнений и иерархию гамильтоновых структур.

Ключевые слова: симметричные пространства, многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера, представление Лакса, группа редукций.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9319>

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Кулиша–Склянина (КС) [1] можно рассматривать как альтернативную версию известной модели Манакова [2]. Обе модели имеют целый ряд важных приложений в физике, среди которых отметим конденсаты Бозе–Эйнштейна (см. работы [3]–[7]), и являются частными случаями семейства многокомпонентных нелинейных уравнений Шредингера (МНУШ), связанных с симметричными пространствами [8]. Они интегрируемы в том смысле, что для них существуют представления Лакса, операторы Лакса которых линейны по λ , а потенциал $Q(x, t)$ принимает значения в простой алгебре Ли (обобщенные системы Захарова–Шабата). Решения

^{*}Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria.
E-mail: vgerdjikov@math.bas.bg

[†]Institute for Advanced Physical Studies, New Bulgarian University, Sofia, Bulgaria

[‡]Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria

прямой и обратной задач рассеяния (МОЗР) для таких операторов к настоящему моменту хорошо известны [9]–[14]. Решения для рассматриваемых МНУШ можно эффективно вывести с помощью метода одевания Захарова–Шабата [15]–[17] (см. также статьи [12], [18], [19]).

Другое важное направление в теории солитонов основано на методе получения новых МНУШ посредством применения редукций Михайлова [20] к обычным МНУШ (см. работы [17]–[19], [21]–[23]). В частности, недавно мы смогли вывести два новых двухкомпонентных НУШ [24]; ниже мы приводим третий пример такого уравнения, вытекающего из общей модели КС.

Большую часть упомянутых выше методов можно также применить к квадратичным по λ операторам Лакса. Ранее были рассмотрены простейшие примеры таких операторов Лакса, связанных с алгеброй $sl(2)$ [25]–[27]. Недавно с помощью подхода, основанного на задаче Римана–Гильберта (ЗРГ), упомянутые результаты были обобщены на произвольные алгебры Ли [24], [28]. По этой причине мы начинаем изложение с описания ЗРГ, а затем показываем, что рассматриваемый метод:

- 1) эквивалентен традиционному, основанному на представлении Лакса;
- 2) является удобным инструментом для получения более общих представлений Лакса, в которых оба оператора представляют собой полиномы по λ порядка $k \geq 2$;
- 3) позволяет исследовать спектральные свойства не только операторов Лакса, но и соответствующих рекурсионных (порождающих) операторов.

В заключение мы показываем, что подход, основанный на ЗРГ, можно считать наиболее эффективным способом исследования основных свойств нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) и особенно иерархий их гамильтоновых структур.

Семейство ЗРГ [28] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi^+(x, t, \lambda) &= \xi^-(x, t, \lambda)G(x, t, \lambda), & \lambda^k \in \mathbb{R}, \\ i \frac{\partial G}{\partial x} - \lambda^k [J, G(x, t, \lambda)] &= 0, & i \frac{\partial G}{\partial t} - \lambda^{2k} [J, G(x, t, \lambda)] = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\xi^\pm(x, t, \lambda)$ принимает значения в простой группе Ли $\mathcal{G}$ и J – элемент соответствующей простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Выбор k , $\mathfrak{g}$ и J определяет класс и тип изучаемых НЭУ.

Значение k определяет порядок оператора Лакса L , являющегося полиномом по λ . Большинство операторов Лакса $L(\lambda)$, использовавшихся для исследования наиболее важных НЭУ, линейны по λ , т. е. $k = 1$. Можно привести заслуживающие внимания примеры операторов Лакса, квадратичных по λ ($k = 2$) [25]–[27]. Отметим, что порядок p второго оператора $M(\lambda)$ пары Лакса всегда не меньше k , $p \geq k$. Далее в работе мы придерживаемся двух упомянутых значений k и предполагаем, что $p = 2k$, но рассматриваемый метод можно легко распространить на любые конечные значения k и p . Мы не рассматриваем здесь другие важные классы операторов Лакса, являющихся рациональными функциями от λ [16].

Выбор $\mathfrak{g}$ и $J \in \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, задает структуру фазового пространства НЭУ. Она определяется такими важными характеристиками, как число независимых функций, входящих в НЭУ, и скобки Пуассона для этих функций. Отвечающие обобщенным системам Захарова–Шабата [9], [15] операторы Лакса линейны по λ ($k = 1$) и имеют вид

$$L\psi \equiv i \frac{\partial \psi}{\partial x} + (Q(x, t) - \lambda J)\psi(x, t, \lambda) = 0. \quad (1.2)$$

Фазовое пространство $\mathcal{M}$ соответствующего НЭУ или, другими словами, пространство допустимых потенциалов определяется как

$$\mathcal{M} \equiv \{Q(x, t) = [J, X(x, t)], X(x, t) \in \mathfrak{g}\}, \quad (1.3)$$

т. е. $Q(x, t)$ принадлежит коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_J \in \mathfrak{g}$, проходящей через J .

Отметим, что если $\text{rank } \mathfrak{g} > 1$ и J имеет различные собственные значения, тогда НЭУ задано на однородном пространстве. В качестве типичных представителей таких НЭУ укажем N -волновые уравнения [9]. При другом, более специфичном выборе J и алгебры $\mathfrak{g}$ наши построения имеют место на симметричном пространстве. Указанные факты давно известны [1], [2], [8], и их можно обобщить на случай $k \geq 2$.

В разделе 2 даны предварительные сведения о структуре симметричных пространств типа **BD.I**, ЗРГ и соответствующих парах Лакса, интегрируемых уравнениях, а также о группе редукций [20]. В разделе 3 мы строим представления Лакса методом, основанном на ЗРГ, при $k = 1$ и $k = 2$. В разделе 4 приведен пример $\mathbb{Z}_6$ -редукции общей модели КС, позволяющей получить новые интегрируемые двухкомпонентные НУШ (см. статью [24]). В разделе 5 описано влияние этих редукций на матрицу и данные рассеяния. В последнем разделе 6 сформулированы свойства интегрируемости моделей КС. Они основаны на соотношениях Вронского и на “квадратах решений” операторов Лакса. Показано, что они образуют полный набор функций в фазовом пространстве $\mathcal{M}$, и получены разложения потенциала $Q(x, t)$ и его производной $\text{ad}_J^{-1} \delta Q$ по “квадратам решений”. Данные результаты позволяют описать фундаментальные свойства НЭУ и иерархий их гамильтоновых структур.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Симметричные пространства типа BD.I. Для наших целей мы используем простую группу Ли $\mathcal{G} \simeq SO(2r+1)$, алгебра Ли которой обозначена как $\mathfrak{g} \simeq so(2r+1)$. Условие ортогональности, которое применяется ниже, имеет вид

$$X \in so(2r+1), \quad \text{если и только если} \\ X + S_0 X^T S_0^{-1} = 0, \quad S_0 = \sum_{k=1}^{2r+1} (-1)^{k+1} E_{k, 2r+2-k}, \quad (2.1)$$

где E_{kn} – матрица размера $(2r+1) \times (2r+1)$, удовлетворяющая равенству $(E_{kn})_{pj} = \delta_{kp} \delta_{nj}$. Благодаря такому выбору подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ состоит из диагональных матриц. Возьмем следующий элемент $J \in \mathfrak{h}$:

$$J = \sum_{k=1}^s H_{e_k} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Мы предполагаем, что читатели знакомы с теорией простых групп и алгебр Ли (см. книгу [29]). Система положительных корней алгебры $so(2r+1)$ состоит из элементов $e_i \pm e_j$, $1 \leq i < j \leq r$, и e_j , $1 \leq j \leq r$. Мы также напомним, что, используя элемент J

и инволюцию Картана, можно задать $\mathbb{Z}_2$ -градуировку в $\mathfrak{g}$:

$$C_1 = e^{\pi i J} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2r-2s+1} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}, \quad (2.3)$$

$$\mathfrak{g}^{(0)} \equiv \{X \in \mathfrak{g}^{(0)} : C_1 X C_1^{-1} = X\}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} \equiv \{Y \in \mathfrak{g}^{(1)} : C_1 Y C_1^{-1} = -Y\}.$$

Такая $\mathbb{Z}_2$ -градуировка означает, что справедливы включения

$$[X_1, X_2] \in \mathfrak{g}^{(0)}, \quad [X_1, Y_1] \in \mathfrak{g}^{(1)}, \quad [Y_1, Y_2] \in \mathfrak{g}^{(0)}, \quad (2.4)$$

и порождает локальную структуру пространства $SO(2r+1)/(SO(2r-2s+1) \otimes SO(2s))$ с симметрией типа **BD.I**. Далее мы увидим, что данная конструкция явно связана с моделью КС при $s = 1$. Известно, что множество положительных корней и система простых корней B_r имеют следующий вид:

$$\Delta_{B_r}^+ \equiv \{e_i - e_j, e_i + e_j, 1 \leq i < j \leq r; e_j, 1 \leq j \leq r\}, \quad (2.5)$$

$$\pi_{B_r} \equiv \{\alpha_k = e_k - e_{k+1}, \alpha_r = e_r, 1 \leq k \leq r-1\}.$$

Определяя J согласно (2.2), мы разбиваем множество положительных корней на два подмножества

$$\Delta_1^+ = \{\beta, \beta(J) = 1\}, \quad \Delta_0^+ = \{\beta, \beta(J) = 0 \pmod{2}\}. \quad (2.6)$$

Ниже мы рассматриваем два случая, $s = 1$ и $s = 3$:

$$\begin{aligned} s = 1, \quad r \geq 3, \quad & \Delta_0^+ = \{e_i \pm e_j, 2 \leq i < j \leq r, e_j, 2 \leq j \leq r\}, \\ & \Delta_1^+ = \{e_1 \pm e_j, 2 \leq j \leq r, e_1\}; \\ s = 3, \quad r = 4, \quad & \Delta_0^+ = \{e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, e_1, e_2, e_3\}, \\ & \Delta_1^+ = \{e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_4, e_3 \pm e_4, e_4\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Потенциал оператора Лакса, так же как и коэффициенты Q_{2s-1} , дается выражением

$$Q(x, t) = \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} (q_\alpha E_\alpha + p_\alpha E_{-\alpha}) \in \mathfrak{g}^{(1)}. \quad (2.8)$$

2.2. ЗРГ и представления Лакса. Для начала сформулируем ЗРГ (1.1): при заданной спивающей функции $G(x, t, \lambda)$ следует найти такие функции $\xi^\pm(x, t, \lambda)$, принимающие значения в простой группе Ли $\mathcal{G}$ и аналитические при $\text{Im } \lambda^k \geq 0$, что справедливы соотношения (1.1). Представляется естественным также наложить условие нормировки

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi^\pm(x, t, \lambda) = \mathbb{1}, \quad (2.9)$$

выполнение которого обеспечивает наличие у ЗРГ единственного регулярного решения. На рис. 1 показаны области аналитичности и контуры, которые используются далее при $k = 1$ и $k = 2$.

Рис. 1. Непрерывный спектр оператора $L(\lambda)$ (жирная линия), области аналитичности Ω_s и контуры γ_s , $s = 1, \dots, k$. В случае $k = 1$ оператор $L(\lambda)$ является линейным по λ (см. выражение (1.2)) (а). В случае $k = 2$ $L(\lambda)$ квадратичен по λ (см. выражение (3.2)) (б).

ТЕОРЕМА 2.1 (Захарова–Шабата). Пусть $\xi^\pm(x, t, \lambda)$ – решение ЗРГ, у которой сшивающая функция удовлетворяет соотношениям (1.1). Тогда $\xi^\pm(x, t, \lambda)$ является фундаментальным аналитическим решением (ФАР) операторов

$$\begin{aligned} L\xi^\pm &\equiv i \frac{\partial \xi^\pm}{\partial x} + U(x, t, \lambda)\xi^\pm(x, t, \lambda) - \lambda^k [J, \xi^\pm(x, t, \lambda)] = 0, \\ M\xi^\pm &\equiv i \frac{\partial \xi^\pm}{\partial x} + V(x, t, \lambda)\xi^\pm(x, t, \lambda) - \lambda^{2k} [J, \xi^\pm(x, t, \lambda)] = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ – полиномы $(k-1)$ -й и $(2k-1)$ -й степени по λ соответственно:

$$U(x, t, \lambda) = \lambda^k J - (\lambda^k \xi J \hat{\xi}(x, t, \lambda))_+, \quad V(x, t, \lambda) = \lambda^{2k} J - (\lambda^{2k} \xi J \hat{\xi}(x, t, \lambda))_+. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (основная идея). Рассматривая функции

$$\begin{aligned} g^\pm(x, t, \lambda) &= i \frac{\partial \xi^\pm}{\partial x} (\xi^\pm)^{-1}(x, t, \lambda) + \lambda^k \xi^\pm(x, t, \lambda) J (\xi^\pm)^{-1}(x, t, \lambda), \\ f^\pm(x, t, \lambda) &= i \frac{\partial \xi^\pm}{\partial t} (\xi^\pm)^{-1}(x, t, \lambda) + \lambda^{2k} \xi^\pm(x, t, \lambda) J (\xi^\pm)^{-1}(x, t, \lambda) \end{aligned} \quad (2.12)$$

и используя явную зависимость $G(x, t, \lambda)$ от x и t , получаем равенства $g^+(x, t, \lambda) = g^-(x, t, \lambda)$ и $f^+(x, t, \lambda) = f^-(x, t, \lambda)$. Далее, применяя условие (2.9), записываем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g^\pm(x, t, \lambda) = \lambda^k J, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f^\pm(x, t, \lambda) = \lambda^{2k} J. \quad (2.13)$$

Осталось применить знаменитую теорему Лиувилля, согласно которой функции $g^+(x, t, \lambda) = g^-(x, t, \lambda)$ (соответственно $f^+(x, t, \lambda) = f^-(x, t, \lambda)$) являются аналитическими на всей комплексной плоскости переменной λ^k и, таким образом, имеют

вид полиномов порядка k (соответственно $2k$) по λ . Конечно, коэффициенты данных полиномов могут зависеть от x и t . Явные выражения (2.11), связывающие эти коэффициенты с решением $\xi^\pm(x, t, \lambda)$, были предложены Дринфельдом и Соколовым [30] (см. также статью [28]).

Вывод формул для пар Лакса можно осуществить, если $\xi^\pm(x, t, \lambda)$ удовлетворяет канонической нормировке (2.9). В самом деле, в этом случае мы можем использовать асимптотическое разложение

$$\xi^\pm(x, t, \lambda) = e^{\mathcal{Q}(x, t, \lambda)}, \quad \mathcal{Q}(x, t, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^{-2s+1} Q_{2s-1}. \quad (2.14)$$

Очевидно, выбор такого $\xi^\pm(x, t, \lambda)$ подразумевает существование $\mathbb{Z}_2$ -редукции, что можно сформулировать несколькими эквивалентными способами, например:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \xi^+(x, t, -\lambda) = (\xi^-)^{-1}(x, t, \lambda), \quad Q_{2s-1} \in \mathfrak{g}^{(1)}, \\ \text{б)} \quad & \xi^+(x, t, \lambda^*) = (\xi^-)^\dagger(x, t, \lambda), \quad \text{если и только если} \quad Q_{2s-1} = -Q_{2s-1}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для того чтобы выразить соответствующие НЭУ через Q_{2s-1} , воспользуемся формулами

$$\xi^\pm J \hat{\xi}^\pm(x, t, \lambda) = J + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \text{ad}_{\mathcal{Q}}^p J, \quad \frac{\partial \xi^\pm}{\partial x} \hat{\xi}^\pm(x, t, \lambda) = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p+1)!} \text{ad}_{\mathcal{Q}}^p \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}, \quad (2.16)$$

позволяющими записать коэффициенты $U_s(x, t)$ и $V_s(x, t)$ пар Лакса с использованием Q_{2s-1} и их производных по x . В дальнейших построениях нам понадобятся только несколько первых членов указанных разложений (подробности см. в статье [28]).

2.3. Группа редукций. Используя теорию, изложенную в статье Михайлова [20], наложим дополнительные редукции, применяя известную группу редукций G_R .

Группа G_R является конечной группой, которая сохраняет представление Лакса, т.е. обеспечивает автоматическую совместность редукционных связей с эволюцией. У группы G_R должно быть две реализации: а) как подгруппа автоморфизмов алгебры $G_R \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$ и б) как подгруппа $G_R \subset \text{Conf } \mathbb{C}$ конформных отображений комплексной плоскости переменной λ . С каждым $g_k \in G_R$ свяжем условие редукции для пары Лакса следующим образом:

$$C_k(L(\Gamma_k(\lambda))) = \eta_k L(\lambda), \quad C_k(M(\Gamma_k(\lambda))) = \eta_k M(\lambda), \quad (2.17)$$

где $C_k \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ и $\Gamma_k(\lambda) \in \text{Conf } \mathbb{C}$ – изображения g_k , а $\eta_k = \pm 1$ в зависимости от того, какое выбрано C_k . Поскольку G_R – конечная группа, для каждого g_k существует целое число N_k такое, что $g_k^{N_k} = \mathbb{1}$. Говоря более конкретно, далее мы рассматриваем $\mathbb{Z}_2$ -редукции следующего вида:

$$B_1 U^\dagger(\kappa_1(\lambda)) B_1^{-1} = U(\lambda), \quad B_1 (V^\dagger(\kappa_1(\lambda)) B_1^{-1} = V(\lambda), \quad (2.18)$$

$$B_2 U^T(\kappa_2(\lambda)) B_2^{-1} = -U(\lambda), \quad B_2 (V^T(\kappa_2(\lambda)) B_2^{-1} = -V(\lambda), \quad (2.19)$$

$$B_3 U^*(\kappa_1(\lambda)) B_3^{-1} = -U(\lambda), \quad B_3 (V^*(\kappa_1(\lambda)) B_3^{-1} = -V(\lambda), \quad (2.20)$$

$$B_4 U(\kappa_2(\lambda)) B_4^{-1} = U(\lambda), \quad B_4 (V(\kappa_2(\lambda)) B_4^{-1} = V(\lambda), \quad (2.21)$$

где автоморфизмы B_k должны быть конечного порядка. В выражениях (2.18), (2.19) и (2.20) они имеют четный порядок, в общем случае больший двух.

Помимо $\mathbb{Z}_2$ -редукций мы налагаем дополнительные $\mathbb{Z}_p$ -редукции, $p > 2$:

$$\begin{aligned} A_p U(x, t, \kappa_p(\lambda)) A_p^{-1} &= U(x, t, \lambda), & A_p V^*(x, t, \kappa_p(\lambda)) A_p^{-1} &= V(x, t, \lambda), \\ A_p(\xi^+)(x, t, \kappa_p(\lambda)) A_p^{-1} &= (\xi^+)^{-1}(x, t, \lambda), & \kappa_p(\lambda) &= \omega \lambda, & \omega &= e^{2\pi i/p}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где A_p – автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ порядка p . Обычно в качестве реализации A_p мы используем элемент группы Вейля алгебры $\mathfrak{g}$.

3. ОБЩИЕ МОДЕЛИ ТИПА КС

Сшивающая функция нашей ЗРГ дополнительно зависит от двух параметров x и t таким образом, что с ее помощью удобно проводить анализ и решать НЭУ, принадлежащие специальному классу уравнений в двумерном пространстве-времени, называемых солитонными уравнениями. Далее мы также предполагаем, что соответствующим симметричным пространством является $SO(2r+1)/(SO(2r-1) \times SO(2))$.

3.1. Условие совместности при $k = 1$, $s = 1$. В простейшем случае при $k = 1$ и $s = 1$ пара Лакса имеет вид

$$U^{(1)}(x, t, \lambda) = U_1(x, t) - \lambda J, \quad V^{(1)}(x, t, \lambda) = iQ_{1,x} + V_2(x, t) + \lambda V_1(x, t) - \lambda^2 J, \quad (3.1)$$

где

$$U_1(x, t) = [J, Q_1(x, t)] = Q(x, t), \quad V_1(x, t) = Q(x, t), \quad V_2(x, t) = \frac{1}{2} \text{ad}_{Q_1} Q(x, t), \quad (3.2)$$

$$Q_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{q}^T & 0 \\ -\vec{p} & 0 & s_0 \vec{q} \\ 0 & -\vec{p}^T s_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(x, t) = \begin{pmatrix} (\vec{q}, \vec{p}) & 0 & 0 \\ 0 & s_0 \vec{q} \vec{p}^T s_0 - \vec{p} \vec{q}^T & 0 \\ 0 & 0 & -(\vec{q}, \vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

В результате получаем, что данная пара Лакса приводит к хорошо известной модели КС, интегрируемость которой была доказана в 1981 г. [18]:

$$i \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial x^2} + 2(\vec{q}^\dagger, \vec{q}) \vec{q} - (\vec{q}^T s_0 \vec{q}) s_0 \vec{q}^* = 0, \quad s_0 = \sum_{k=1}^{2r-1} (-1)^k E_{k, 2r-k}, \quad (3.4)$$

где теперь E_{kn} – матрица размера $(2r-1) \times (2r-1)$, удовлетворяющая условию $(E_{kn})_{pj} = \delta_{kp} \delta_{nj}$. Приложения этой модели в теории конденсатов Бозе–Эйнштейна и подробный анализ ее обратного спектрального преобразования рассмотрены в статье [12].

3.2. Условие совместности при $k = 1$, $s > 1$. При $k = 1$ и $s > 1$ пара Лакса принимает вид

$$U(x, t, \lambda) = Q(x, t) - \lambda J, \quad V^{(1)}(x, t, \lambda) = iQ_{1,x} + V_2(x, t) + \lambda Q(x, t) - \lambda^2 J, \quad (3.5)$$

где

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{q} & 0 \\ \mathbf{p} & 0 & \tilde{\mathbf{q}} \\ 0 & \tilde{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(x, t) = \begin{pmatrix} -\mathbf{qp} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{pq} - \tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Матрица S_0 из условия ортогональности (2.1) в данном случае записывается как

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{s}_1 \\ 0 & \mathbf{s}_2 & 0 \\ \mathbf{s}_1^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Блоки $\mathbf{s}_k$, $k = 1, 2$, легко определяются согласно (2.1) и удовлетворяют равенствам $\mathbf{s}_2^2 = \mathbb{1}$, $\mathbf{s}_2^{-1} = \mathbf{s}_2$. Тогда $\tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{s}_2 \mathbf{q}^T \mathbf{s}_1$ и $\tilde{\mathbf{p}} = -\mathbf{s}_2 \mathbf{p}^T \mathbf{s}_1^{-1}$. В результате мы получаем общую модель КС [18]

$$i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} + 2\mathbf{qpq} - \mathbf{q}\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{p}} = 0, \quad i \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} - 2\mathbf{pqp} + \tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0. \quad (3.7)$$

После дополнительной редукции $\mathbf{p} = \mathbf{q}^\dagger$ приходим к модели

$$i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} + 2\mathbf{qq}^\dagger \mathbf{q} - \mathbf{q}\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}}^\dagger = 0. \quad (3.8)$$

3.3. Условие совместности при $k = 2$. Здесь $U^{(2)}(x, t, \lambda)$ является квадратичным по λ , $V^{(4)}(x, t, \lambda)$ является полиномом четвертой степени по λ и $s = 1$:

$$\begin{aligned} U^{(2)}(x, t, \lambda) &= U_2(x, t) + \lambda Q(x, t) - \lambda^2 J, \\ V^{(4)}(x, t, \lambda) &= V_4(x, t) + \lambda V_3(x, t) + \lambda^2 V_2(x, t) + \lambda^3 - \lambda^4 J, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $Q(x, t)$ определено согласно (3.6), $U_2(x, t) = V_2(x, t)$ и в дополнение к этому

$$V_3(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & V_{3;2}^T & 0 \\ V_{3;1} & 0 & s_0 V_{3;2} \\ 0 & V_{3;1}^T s_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} V_{3;1} &= \vec{w} + \frac{1}{3}(\vec{p}^T s_0 \vec{p}) s_0 \vec{q} - \frac{2}{3}(\vec{q}, \vec{p}) \vec{p}, & V_{3;2} &= s_0 \vec{v} + \frac{1}{3}(\vec{q}^T s_0 \vec{q}) \vec{p} - \frac{2}{3}(\vec{q}, \vec{p}) s_0 \vec{q}, \\ V_4 &= \begin{pmatrix} V_{4;11} & 0 & 0 \\ 0 & V_{4;22} & 0 \\ 0 & 0 & V_{4;33} \end{pmatrix}, & Q_3(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 & \vec{v}^T & 0 \\ -\vec{w} & 0 & s_0 \vec{v} \\ 0 & -\vec{w}^T s_0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} V_{4;11} &= -V_{4;33} = i((\vec{q}_x, \vec{p}) - (\vec{q}, \vec{p}_x)) + (\vec{q}, \vec{p})^2 - \frac{1}{2}(\vec{q}^T s_0 \vec{q})(\vec{p}^T s_0 \vec{p}), \\ V_{4;22} &= i(\vec{p}_x \vec{q}^T - \vec{p} \vec{q}_x^T + s_0(\vec{q}_x \vec{p}^T - \vec{q} \vec{p}_x^T) s_0) - (\vec{q} \vec{p})(\vec{p} \vec{q}^T - s_0 \vec{q} \vec{p}^T s_0). \end{aligned}$$

Условие совместности означает следующее:

$$\begin{aligned} \lambda^3 : \quad & i \frac{\partial Q}{\partial x} + [U_2, Q] + [Q, V_2] = [J, V_3], \\ \lambda^2 : \quad & i \frac{\partial V_2}{\partial x} + [U_2, V_2] + [Q, V_3] = [J, V_4]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поскольку $U_2 = V_2$, первое равенство в (3.12) приводит к формуле

$$V_3(x, t) = \text{ad}_J^{-1} i \frac{\partial Q}{\partial x} = i \begin{pmatrix} 0 & \vec{q}_x^T & 0 \\ -\vec{p}_x & 0 & s_0 \vec{q}_x \\ 0 & -\vec{p}_x^T s_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

откуда покомпонентно получаем, что

$$\vec{v} = i \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} + \frac{2}{3}(\vec{p}, \vec{q})\vec{q} - \frac{1}{3}(\vec{q}^T s_0 \vec{q})s_0 \vec{p}, \quad \vec{w} = -i \frac{\partial \vec{p}}{\partial x} + \frac{2}{3}(\vec{p}, \vec{q})\vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{p}^T s_0 \vec{p})s_0 \vec{q}. \quad (3.14)$$

Второе равенство в (3.12) является тождеством в силу формул (3.14).

Наконец, записываем уравнения движения:

$$\lambda : \quad i \frac{\partial V_3}{\partial x} - i \frac{\partial Q}{\partial t} + [Q, V_4] + [U_2, V_3] = 0, \quad \lambda^0 : \quad i \frac{\partial V_4}{\partial x} - i \frac{\partial U_2}{\partial t} + [U_2, V_4] = 0. \quad (3.15)$$

Полагая дополнительно, что $\vec{p} = \epsilon \vec{q}^*$, получаем уравнение

$$i \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial x^2} + i \epsilon s_0 (\vec{q} s_0 \vec{q}) \frac{\partial \vec{q}^*}{\partial x} + s_0 (\vec{q}, \vec{q}^*) (\vec{q} s_0 \vec{q}) s_0 \vec{q}^* - \left(\frac{1}{2} |(\vec{q} s_0 \vec{q})|^2 + 2i \epsilon (\vec{q}, \vec{q}^*) \right) \vec{q} = 0. \quad (3.16)$$

Можно проверить, что второе уравнение в системе (3.15) является тождественным равенством в силу формулы (3.16).

3.4. Калибровочно-эквивалентные системы при $k = 2$. Зафиксируем калибровку, требуя выполнения условий $U(x, t, \lambda = 0) = 0$ и $V(x, t, \lambda = 0) = 0$. В таком случае справедливы выражения

$$\tilde{L}\tilde{\psi} \equiv i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + (\lambda \tilde{Q}(x, t) - \lambda^2 J) \tilde{\psi}(x, t, \lambda) = 0, \quad (3.17)$$

$$\tilde{M}\tilde{\psi} \equiv i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + (\lambda \tilde{V}_3(x, t) + \lambda^2 \tilde{V}_2(x, t) + \lambda^3 \tilde{Q}(x, t) - \lambda^2 J) \tilde{\psi}(x, t, \lambda) = 0.$$

Следовательно, $\tilde{\psi}(x, t, \lambda) = g_0(x, t) \psi(x, t, \lambda)$, т. е.

$$i \frac{\partial g_0}{\partial x} - g_0(x, t) U_2(x, t) = 0, \quad i \frac{\partial g_0}{\partial t} - g_0(x, t) V_4(x, t) = 0, \quad (3.18)$$

и поэтому $g_0(x, t)$ является блочно-диагональной функцией. В этом случае $\tilde{V}_k$ и $\tilde{Q}$ имеют блочную структуру, аналогичную структуре V_k и Q соответственно; мы будем обозначать блоки в них с помощью знака “тильда”. Таким образом, НЭУ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x} (2\vec{q}(\vec{q}^T \vec{p}) - s_0 \vec{p}(\vec{q}^T \vec{q})) &= 0, \\ i \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial x^2} - i \frac{\partial}{\partial x} (2\vec{p}(\vec{q}^T \vec{p}) - s_0 \vec{q}(\vec{p}^T \vec{p})) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

4. ОБЩИЕ МОДЕЛИ ТИПА КС И ИХ $\mathbb{Z}_N$ -РЕДУКЦИИ

В настоящем разделе мы получаем модели КС, связанные с общими симметричными пространствами $SO(2r+1)/(SO(2k) \times SO(2r-2k+1))$ типа **BD.I**. Речь идет о довольно сложных системах уравнений для $k(2r-2k+1)$ функций от переменных x и t . В п. 4.1 мы рассматриваем случай $r = 4$ и $k = 3$ и применяем его к специальной $\mathbb{Z}_6$ -редукции. В результате получается новый тип двухкомпонентного НУШ.

4.1. $\mathbb{Z}_6$ -редукция модели КС для пространства $SO(9)/(SO(6) \times SO(3))$. Рассмотрим симметричное пространство $SO(9)/(SO(6) \times SO(3))$. Система положительных корней разбивается на подмножества

$$\Delta_0^+ \equiv \{e_1 \pm e_2, e_2 \pm e_3, e_1 \pm e_3, e_4\}, \quad \Delta_1^+ \equiv \{e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_4, e_3 \pm e_4, e_1, e_2, e_3\}. \quad (4.1)$$

Редукция определяется элементом $w_4 = S_{e_1-e_2}S_{e_2-e_3}S_{e_4}$ группы Вейля, т. е. $w_4^6 = \text{Id}$. Очевидно, что этот элемент группы Вейля оставляет инвариантными множества Δ_0 и Δ_1 , и корни Δ_1 расщепляются на четыре орбиты

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^\pm: \quad & \pm e_1 - e_4 \rightarrow \pm e_2 + e_4 \rightarrow \pm e_3 - e_4 \rightarrow \pm e_1 + e_4 \rightarrow \pm e_2 - e_4 \rightarrow \pm e_3 + e_4, \\ \mathcal{O}_3: \quad & e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3, \quad \mathcal{O}_4: \quad -e_1 \rightarrow -e_2 \rightarrow -e_3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Итак, имеются четыре орбиты. После наложения еще одной $\mathbb{Z}_2$ -редукции, например $Q = Q^\dagger$, можно ожидать, что мы получим двухкомпонентное НУШ. Реализация автоморфизма w_4 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} w_4(X) &= A_1 X A_1^{-1}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Условие ортогональности определяется согласно формулам (2.1), в которых

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_1 \\ 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий потенциал оператора Лакса записывается с использованием (3.3), где

$$\mathbf{q}(x, t) = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & -q_1 \\ -q_1 & -q_2 & q_1 \\ q_1 & q_2 & -q_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}(x, t) = \begin{pmatrix} p_1 & -p_1 & p_1 \\ p_2 & -p_2 & p_2 \\ -p_1 & p_1 & -p_1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Условие $Q = Q^\dagger$ приводит к равенствам $p_1 = q_1^*$ и $p_2 = q_2^*$. Тогда НЭУ принимает вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + 6(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1(x, t) - 3q_2^2 q_1^*(x, t) &= 0, \\ i \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + 3(4|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2(x, t) - 6q_1^2 q_2^*(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Соответствующий гамильтониан определяется выражением

$$H = 2 \left| \frac{\partial q_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial q_2}{\partial x} \right|^2 - \frac{3}{2} (2|q_1|^2 + |q_2|^2)^2 + 3(q_1 q_2^* - q_1^* q_2)^2. \quad (4.6)$$

Замена переменных $v_1 = \sqrt{6}q_1$, $v_2 = \sqrt{3}q_2$ приводит к системе

$$\begin{aligned} i \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + (|v_1|^2 + 2|v_2|^2)v_1(x, t) - v_2^2 v_1^*(x, t) &= 0, \\ i \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + (2|v_1|^2 + |v_2|^2)v_2(x, t) - v_1^2 v_2^*(x, t) &= 0, \\ \mathbf{q}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} v_1 & \sqrt{2}v_2 & -v_1 \\ -v_1 & -\sqrt{2}v_2 & v_1 \\ v_1 & \sqrt{2}v_2 & -v_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}(x, t) = \mathbf{q}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Легко проверить, что при выполнении канонических скобок Пуассона $\{v_k(x), v_j^*(y)\} = \delta_{kj}\delta(x-y)$ для v_j канонические гамильтоновы уравнения движения, имеющие вид

$$i \frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{\delta H'}{\delta v_j^*}, \quad j = 1, 2, \quad (4.8)$$

где

$$H' = \left| \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|^2 - \frac{1}{2}(|v_1|^2 + |v_2|^2)^2 + \frac{1}{2}(v_1 v_2^* - v_1^* v_2)^2, \quad (4.9)$$

совпадают с (4.7).

5. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ЛАКСА

5.1. Случай пространства $SO(2r+1)/(SO(2r-1) \times SO(2))$. Здесь мы описываем методы решения прямой и обратной задач рассеяния для оператора L . Мы применяем решения Йоста, которые определяются формулами (см. статью [12] и ссылки в ней)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x, t, \lambda) e^{i\lambda^k J x} = \mathbb{1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, t, \lambda) e^{i\lambda^k J x} = \mathbb{1}, \quad (5.1)$$

и матрицу рассеяния $T(\lambda, t) \equiv \psi^{-1} \phi(x, t, \lambda)$. В силу специального выбора J и того факта, что решения Йоста и матрица рассеяния принимают значения в группе $SO(2r+1)$, можно использовать следующую блочно-матричную структуру для матрицы $T(\lambda, t)$ и обратной к ней матрицы $\hat{T}(\lambda, t)$:

$$T(\lambda, t) = \begin{pmatrix} m_1^+ & -(\vec{B}^-)^T & c_1^- \\ \vec{b}^+ & \mathbf{T}_{23} & -s_0 \vec{b}^- \\ c_1^+ & (\vec{B}^+)^T s_0 & m_1^- \end{pmatrix}, \quad \hat{T}(\lambda, t) = \begin{pmatrix} m_1^- & (\vec{b}^-)^T & c_1^- \\ -\vec{B}^+ & \hat{\mathbf{T}}_{23} & s_0 \vec{B}^- \\ c_1^+ & -(\vec{b}^+)^T s_0 & m_1^+ \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

где $\vec{b}^\pm(\lambda, t)$ и $\vec{B}^\pm(\lambda, t)$ суть $(2r-1)$ -компонентные векторы, $\mathbf{T}_{23}(\lambda)$ и $\hat{\mathbf{T}}_{23}(\lambda)$ – блоки размера $(2r-1) \times (2r-1)$ и $m_1^\pm(\lambda)$, $c_1^\pm(\lambda)$ – скалярные функции, удовлетворяющие условиям $c_1^\pm = 1/2(\vec{b}^\pm \cdot s_0 \vec{b}^\pm)/m_1^\mp$.

Важным математическим аппаратом для сведения МОЗР к ЗРГ являются ФАР $\chi^\pm(x, t, \lambda)$. Построение этих решений основано на обобщенном разложении Гаусса матрицы $T(\lambda, t)$:

$$\chi^\pm(x, t, \lambda) = \phi(x, t, \lambda) S_J^\pm(t, \lambda) = \psi(x, t, \lambda) T_J^\mp(t, \lambda) D_J^\pm(\lambda). \quad (5.3)$$

Здесь $S_J^\pm$ и $T_J^\pm$ – верхняя и нижняя блочно-треугольные матрицы, а $D_J^\pm(\lambda)$ – блочно-диагональные матрицы с такой же структурой, как и у $T(\lambda, t)$, приведенной выше.

Опуская детали, дадим явные выражения для коэффициентов Гаусса через матричные элементы матрицы $T(\lambda, t)$:

$$\begin{aligned} S_J^\pm(t, \lambda) &= \exp\left(\pm \sum_{\beta \in \Delta_1^+} \tau_\beta^\pm(\lambda, t) E_{\pm\beta}\right), & T_J^\pm(t, \lambda) &= \exp\left(\mp \sum_{\beta \in \Delta_1^+} \rho_\beta^\pm(\lambda, t) E_{\pm\beta}\right), \\ D_J^+ &= \begin{pmatrix} m_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_1^+ \end{pmatrix}, & D_J^- &= \begin{pmatrix} 1/m_1^- & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_2^- & 0 \\ 0 & 0 & m_1^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{b}^+ &= (T_{1,2}, \dots, T_{1,2r})^T, \\ \vec{\tau}^+(\lambda, t) &= \frac{\vec{b}^-}{m_1^+}, & \vec{\tau}^-(\lambda, t) &= \frac{\vec{B}^+}{m_1^-}, \\ \mathbf{m}_2^+ &= \mathbf{T}_{23} + \frac{\vec{b}^+(\vec{b}^-)^T}{2m_1^+} = \widehat{\mathbf{T}}_{23} + \frac{s_0 \vec{b}^-(\vec{b}^+)^T s_0}{2m_1^+}, \\ \vec{\rho}^+(\lambda, t) &= \frac{\vec{b}^+}{m_1^+}, & \vec{\rho}^-(\lambda, t) &= \frac{\vec{b}^-}{m_1^-}, \\ \mathbf{m}_2^- &= \widehat{\mathbf{T}}_{23} + \frac{\vec{B}^+(\vec{B}^-)^T}{2m_1^-} = \widehat{\mathbf{T}}_{23} + \frac{s_0 \vec{B}^-(\vec{B}^+)^T s_0}{2m_1^-}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Если потенциал $Q(x, t)$ эволюционирует согласно (3.15), то матрица рассеяния и ее элементы удовлетворяют следующим линейным эволюционным уравнениям:

$$i \frac{d\vec{B}^\pm}{dt} \pm \lambda^{2k} \vec{B}^\pm(t, \lambda) = 0, \quad i \frac{d\vec{b}^\pm}{dt} \pm \lambda^{2k} \vec{b}^\pm(t, \lambda) = 0, \quad i \frac{dm_1^\pm}{dt} = 0, \quad i \frac{d\mathbf{m}_2^\pm}{dt} = 0, \quad (5.6)$$

так что блочно-диагональные матрицы $D^\pm(\lambda)$ являются порождающими функциями для интегралов движения. Тот факт, что все $(2r-1)^2$ матричных элементов матрицы $m_2^\pm(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ порождают интегралы движения, является отражением свойства суперинтегрируемости модели и следствием вырожденности закона дисперсии, определяемого величиной $\lambda^{2k} J$. Следует напомнить, что можно осуществить аналитическое продолжение $D_J^\pm(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ и что ее нули и полюсы определяют дискретный спектр собственных значений оператора L . Также мы будем использовать еще одно множество ФАР:

$$\chi'^\pm(x, t, \lambda) = \chi^\pm(x, t, \lambda) \widehat{D}_J^\pm(\lambda). \quad (5.7)$$

Множество ФАР для вещественных λ^k линейно связаны:

$$\begin{aligned} \chi^+(x, t, \lambda) &= \chi^-(x, t, \lambda) G_J(\lambda, t), & G_{0,J}(\lambda, t) &= S_J^-(\lambda, t) S_J^+(\lambda, t), \\ \chi'^+(x, t, \lambda) &= \chi'^-(x, t, \lambda) G'_J(\lambda, t), & G'_{0,J}(\lambda, t) &= T_J^+(\lambda, t) T_J^-(\lambda, t). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Равенства (5.8) можно переписать в эквивалентном виде для ФАР $\xi^\pm(x, t, \lambda) = \chi^\pm(x, t, \lambda) e^{i\lambda J x}$ и $\xi'^\pm(x, t, \lambda) = \chi'^\pm(x, t, \lambda) e^{i\lambda J x}$, которые также удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi^\pm(x, t, \lambda) = \mathbb{1}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi'^\pm(x, t, \lambda) = \mathbb{1}. \quad (5.9)$$

Тогда при $\text{Im } \lambda^k = 0$ для этих ФАР верны формулы

$$\begin{aligned}\xi^+(x, t, \lambda) &= \xi^-(x, t, \lambda)G_J(x, \lambda, t), & G_J(x, \lambda, t) &= e^{-i\lambda^k Jx}G_{0,J}(\lambda, t)e^{i\lambda^k Jx}, \\ \xi'^+(x, t, \lambda) &= \xi'^-(x, t, \lambda)G'_J(x, \lambda, t), & G'_J(x, \lambda, t) &= e^{-i\lambda^k Jx}G'_{0,J}(\lambda, t)e^{i\lambda^k Jx}.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Очевидно, что спивающая функция $G_j(x, \lambda, t)$ единственным образом определяется через коэффициенты Гаусса разложения матрицы $T(\lambda, t)$. В силу выражений (5.4) мы приходим к следующей лемме.

ЛЕММА 5.1. Пусть потенциал $Q(x, t)$ имеет такой вид, что у оператора Лакса L нет дискретных собственных значений. Тогда в качестве наименьшего множества данных рассеяния, единственным образом определяющих матрицу рассеяния $T(\lambda, t)$ и соответствующий потенциал $Q(x, t)$, можно выбрать одно из множеств $\mathfrak{T}_i$, $i = 1, 2$:

$$\mathfrak{T}_1 \equiv \{\bar{\rho}^+(\lambda, t), \bar{\rho}^-(\lambda, t), \lambda^k \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{T}_2 \equiv \{\bar{\tau}^+(\lambda, t), \bar{\tau}^-(\lambda, t), \lambda^k \in \mathbb{R}\}. \quad (5.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $T(\lambda, t) \in SO(2r+1)$, справедливо равенство

$$\frac{1}{m_1^+ m_1^-} = 1 + (\bar{\rho}^+, \bar{\rho}^-) + \frac{1}{4}(\bar{\rho}^+, s_0 \bar{\rho}^+)(\bar{\rho}^-, s_0 \bar{\rho}^-) \quad (5.12)$$

при $\lambda \in \mathbb{R}$. Используя аналитичность функций $m_1^\pm$, можно вывести их из выражения (5.12) с помощью формулы Коши–Племеля. При заданных $\mathfrak{T}_i$ и $m_1^\pm$ можно легко получить $\bar{b}^\pm(\lambda)$ и $c_1^\pm(\lambda)$. Для того чтобы вывести $m_2^\pm$, следует снова воспользоваться их аналитичностью, только теперь задача сводится к ЗРГ для функций на группе $SO(2r+1)$. Детали будут рассмотрены в другой работе.

2) При данном $\mathfrak{T}_i$ спивающая функция $G_J(x, t, \lambda)$ определяется единственным образом. Для того чтобы вывести соответствующий потенциал $Q(x, t)$, можно использовать тот факт, что ЗРГ (5.10) с канонической нормировкой имеет единственное регулярное решение $\chi^\pm(x, t, \lambda)$. Имея $\chi^\pm(x, t, \lambda)$, мы получаем $Q(x, t)$ с помощью хорошо известной формулы

$$Q(x, t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(J - \chi^\pm J \hat{\chi}^\pm(x, t, \lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(J - \chi'^\pm J \hat{\chi}'^\pm(x, t, \lambda)). \quad (5.13)$$

Лемма доказана.

Мы также налагаем стандартную редукцию, а именно, предполагаем, что $Q(x, t) = Q^\dagger(x, t)$, или, если записать покомпонентно, $p_k = q_k^*$. Как следствие, справедливы равенства $\bar{\rho}^-(\lambda, t) = (\bar{\rho}^+)^*(\lambda, t)$ и $\bar{\tau}^-(\lambda, t) = (\bar{\tau}^+)^*(\lambda, t)$.

5.2. Случай пространства $SO(9)/(SO(3) \times SO(6))$. Возможное влияние на данные рассеяния:

- $T(\lambda)$ принадлежит $SO(9)$, следовательно, $T^{-1} = S_0 T^T(\lambda) S_0$;
- $T(\lambda)$ является унитарной матрицей, $T^\dagger(\lambda^*) = T^{-1}(\lambda)$;
- $T(\lambda)$ инвариантна относительно автоморфизма A_1 .

Проведем параметризацию $T(t, \lambda)$, используя ту же блочно-матричную структуру, как у $Q(x, t)$ и J (3.6):

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} m^+ & -b^- & c^- \\ b^+ & T_{23} & -B^- \\ c^+ & B^+ & m^- \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

$$T^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} s_1(m^-)^T s_1 & s_1(B^-)^T s_1 & s_1(c^-)^T s_1 \\ -s_1(B^+)^T s_1 & s_1 T_{23}^T s_1 & s_1(b^-)^T s_1 \\ s_1(c^+)^T s_1 & -s_1(b^+)^T s_1 & s_1(m^-)^T s_1 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$T^{-1} = S_0 T^T(\lambda) S_0, \quad T^\dagger(\lambda^*) = T^{-1}(\lambda), \quad T(\lambda) = A_1 T(\lambda) A_1^{-1}, \quad (5.16)$$

то есть

$$\begin{aligned} m^{+, \dagger}(\lambda^*) &= s_1(m^-)^T(\lambda) s_1, & c^{+, \dagger}(\lambda^*) &= s_1(c^-)^T(\lambda) s_1, \\ b^{\pm, \dagger}(\lambda^*) &= s_1(B^\mp)^T(\lambda) s_1, & B^{\pm, \dagger}(\lambda^*) &= s_1(b^\mp)^T(\lambda) s_1 \end{aligned} \quad (5.17)$$

и

$$\begin{aligned} m^+ &= a_1 m^+ a_1^{-1}, & b^- &= a_1 b^- a_2^{-1}, & c^- &= a_1 c^- a_3^{-1}, \\ b^+ &= a_2 b^+ a_1^{-1}, & T_{23} &= a_2 T_{23} a_2^{-1}, & B^- &= a_2 B^- a_3^{-1}, \\ c^+ &= a_3 c^+ a_1^{-1}, & B^+ &= a_3 B^+ a_2^{-1}, & m^- &= a_3 m^- a_3^{-1}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

6. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МОДЕЛЕЙ КС

6.1. Соотношения Вронского и минимальные множества данных рассеяния. Исследование отображения $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{T}$ между классом разрешенных потенциалов $\mathcal{M}$ и данными рассеяния оператора L начинается с соотношений Вронского (см. статьи [31], [32] для случая алгебры $sl(2)$ и работы [12], [13]; для алгебр более высокого порядка и симметричных пространств (блочно-матричный случай) см. статьи [13], [33]).

Упомянутые идеи мы развиваем применительно к оператору L (1.2) при $s = 1$. С ним можно связать систему

$$i \frac{d\hat{\psi}}{dx} - \hat{\psi}(x, t, \lambda) U(x, t, \lambda) = 0, \quad U(x, \lambda) = Q(x) - \lambda J, \quad (6.1)$$

$$i \frac{d\delta\psi}{dx} + \delta U(x, t, \lambda) \psi(x, t, \lambda) + U(x, t, \lambda) \delta\psi(x, t, \lambda) = 0, \quad (6.2)$$

$$i \frac{d\dot{\psi}}{dx} - \lambda J \psi(x, t, \lambda) + U(x, t, \lambda) \dot{\psi}(x, t, \lambda) = 0, \quad (6.3)$$

где $\delta\psi$ соответствует фиксированной вариации потенциала $\delta Q(x, t)$, а точка обозначает производную по спектральному параметру. Запишем сначала тождество

$$(\hat{\chi} J \chi(x, \lambda) - J) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \hat{\chi} [J, Q(x)] \chi(x, \lambda), \quad (6.4)$$

в котором $\chi(x, \lambda)$ можно считать любым фундаментальным решением оператора L . Для удобства мы используем оба варианта решения: $\chi(x, \lambda) = \chi^\pm(x, \lambda)$ и $\chi(x, \lambda) = \chi'^\pm(x, \lambda)$.

Левую часть равенства (6.4) можно вычислить явным образом, используя асимптотические приближения для $\chi^\pm(x, \lambda)$ (5.3) при $x \rightarrow \pm\infty$. Она выражается через матричные элементы матрицы рассеяния $T(\lambda)$, т. е. через данные рассеяния оператора L .

В самом деле, умножим обе части (6.4) на $E_{\pm\beta}$, $\beta \in \Delta_1^+$, и вычислим форму Киллинга. В правой части этого выражения воспользуемся инвариантностью следа и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\chi}^\pm J \chi^\pm(x, \lambda) - J) E_\beta \rangle \Big|_{x=-\infty}^\infty &= i \int_{-\infty}^\infty dx \langle ([J, Q(x)] e_\beta^\pm(x, \lambda)) \rangle, \\ \langle (\hat{\chi}'^\pm J \chi'^\pm(x, \lambda) - J) E_\beta \rangle \Big|_{x=-\infty}^\infty &= i \int_{-\infty}^\infty dx \langle ([J, Q(x)] e_\beta'^\pm(x, \lambda)) \rangle, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где

$$\begin{aligned} e_\beta^\pm(x, \lambda) &= \chi^\pm E_\beta \hat{\chi}^\pm(x, \lambda), & e_\beta^\pm(x, \lambda) &= \pi_{0J}(\chi^\pm E_\beta \hat{\chi}^\pm(x, \lambda)), \\ e_\beta'^\pm(x, \lambda) &= \chi'^\pm E_\beta \hat{\chi}'^\pm(x, \lambda), & e_\beta'^\pm(x, \lambda) &= \pi_{0J}(\chi'^\pm E_\beta \hat{\chi}'^\pm(x, \lambda)) \end{aligned} \quad (6.6)$$

суть естественные обобщения “квадратов решений”, впервые рассмотренных в случае алгебры $sl(2)$ Каупом [31] и обобщенных затем на случай любой простой алгебры Ли в работах [12], [13], [33]. Через P_{0J} мы обозначили проектор $\pi_{0J} = \text{ad}_J^{-1} \text{ad}_J$ на внедиагональные блоки соответствующей матричнозначной функции.

Правую часть соотношений (6.6) можно переписать с помощью кососкалярного произведения:

$$[[X, Y]] = \int_{-\infty}^\infty dx \langle X(x), [J, Y(x)] \rangle, \quad (6.7)$$

где $\langle X, Y \rangle$ – форма Киллинга; в дальнейшем мы предполагаем, что генераторы Картана–Вейля удовлетворяют условиям $\langle E_\alpha, E_{-\beta} \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$ и $\langle H_j, H_k \rangle = \delta_{jk}$. Произведение является кососимметричным, $[[X, Y]] = -[[Y, X]]$, и невырожденным на пространстве разрешенных потенциалов $\mathcal{M}$. Таким образом, находим, что

$$\rho_\beta^\pm = -i[[Q(x), e_{\pm\beta}^\pm]], \quad \tau_\beta^\pm = -i[[Q(x), e_{\mp\beta}^\pm]]. \quad (6.8)$$

Следовательно, отображения $\mathfrak{F}: Q(x, t) \rightarrow \mathfrak{T}_i$ можно рассматривать как обобщенные преобразования Фурье, в которых $e_\beta^\pm(x, \lambda)$ и $e_\beta'^\pm(x, \lambda)$ можно считать обобщениями обычных экспонент. Далее мы показываем, что упомянутые “квадраты решений” появляются при исследовании отображения между вариациями $\delta Q(x, t)$ и $\delta \mathfrak{T}_i$.

Второй тип соотношений для вронскиана связывает вариацию потенциала $\delta Q(x)$ с соответствующими вариациями данных рассеяния. Чтобы их получить, запишем сначала тождество

$$\hat{\chi}^\pm \delta \chi^\pm(x, \lambda) \Big|_{x=-\infty}^\infty = i \int_{-\infty}^\infty dx \hat{\chi} \delta Q(x) \chi(x, \lambda), \quad (6.9)$$

которое вытекает из уравнений (6.1) и (6.3). Применяя идеи, аналогичные уже рассмотренным выше, получаем равенства

$$\delta \rho_\beta^\pm = \mp i[[\text{ad}_J^{-1} \delta Q(x), e_{\pm\beta}^\pm]], \quad \delta \tau_\beta^\pm = \pm i[[\text{ad}_J^{-1} \delta Q(x), e_{\mp\beta}^\pm]], \quad (6.10)$$

в которых $\beta \in \Delta_1^+$. Они являются основой для исследования связанных с ними НЭУ и их гамильтоновых структур. Далее мы используем эти равенства, предполагая, что вариация потенциала $Q(x)$ обусловлена эволюцией времени, и рассматриваем вариации, имеющие вид

$$\delta Q(x, t) = Q_t \delta t + O((\delta t)^2). \quad (6.11)$$

Оставляя только члены первого порядка малости по δt , находим, что

$$\frac{d\rho_\beta^\pm}{dt} = \mp i \llbracket \text{ad}_J^{-1} Q_t(x), e_{\pm\beta}^\pm \rrbracket, \quad \frac{d\tau_\beta^\pm}{dt} = \pm i \llbracket \text{ad}_J^{-1} Q_t(x), e_{\mp\beta}^\pm \rrbracket. \quad (6.12)$$

6.2. Обобщенные преобразования Фурье и полнота набора “квадратов решений”. Известно, что “квадраты решений” $e_\alpha^\pm(x, \lambda) = \pi_{0J}(\chi^\pm E_\alpha \chi^\pm(x, t, \lambda))$ образуют полный набор функций в пространстве разрешенных потенциалов $Q(x)$ (см. статьи [12], [13]). Для краткости и простоты далее мы предполагаем, что L не имеет дискретных собственных значений. Введем множество “квадратов решений”

$$\begin{aligned} \{\Psi\} &\equiv \{e_{-\alpha}^+(x, \lambda), e_{\alpha}^-(x, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \Delta_1^+\}, \\ \{\Phi\} &\equiv \{e_{\alpha}^+(x, \lambda), e_{-\alpha}^-(x, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \Delta_1^+\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Справедлива следующая теорема (см. статьи [12], [13]).

ТЕОРЕМА 6.1. *Множества $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ образуют полное множество функций в $\mathcal{M}_J$. Соответствующее условие полноты имеет вид*

$$\delta(x - y) \Pi_{0J} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (G_1^+(x, y, \lambda) - G_1^-(x, y, \lambda)), \quad (6.14)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{0J} &= \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} (E_\alpha \otimes E_{-\alpha} - E_{-\alpha} \otimes E_\alpha), \\ G_1^\pm(x, y, \lambda) &= \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} e_{\pm\alpha}^\pm(x, \lambda) \otimes e_{\mp\alpha}^\pm(y, \lambda). \end{aligned} \quad (6.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ОСНОВНАЯ ИДЕЯ). Применим метод интегрирования по контуру к функции Грина

$$\begin{aligned} G^\pm(x, y, \lambda) &= G_1^\pm(x, y, \lambda) \theta(y - x) - G_2^\pm(x, y, \lambda) \theta(x - y), \\ G_2^\pm(x, y, \lambda) &= \sum_{\alpha \in \Delta_0 \cup \Delta_1^-} e_{\pm\alpha}^\pm(x, \lambda) \otimes e_{\mp\alpha}^\pm(y, \lambda) + \sum_{j=1}^r h_j^\pm(x, \lambda) \otimes h_j^\pm(y, \lambda), \end{aligned} \quad (6.16)$$

где $h_j^\pm(x, \lambda) = \pi_{0J}(\chi^\pm(x, \lambda) H_j \hat{\chi}^\pm(x, \lambda))$, и вычислим интеграл

$$\mathcal{J}_G(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_+} d\lambda G^+(x, y, \lambda) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_-} d\lambda G^-(x, y, \lambda) \quad (6.17)$$

двумя способами: 1) с помощью теоремы Коши о вычетах и 2) интегрируя вдоль контуров (см. статьи [12], [13]).

Опуская детали, запишем разложения для $Q(x)$ и $\text{ad}_J^{-1} \delta Q(x)$, предполагая, что у L нет дискретного спектра:

$$Q(x) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} (\tau_{\alpha}^+(\lambda) e_{\alpha}^+(x, \lambda) - \tau_{\alpha}^-(\lambda) e_{-\alpha}^-(x, \lambda)), \quad (6.18)$$

$$\text{ad}_J^{-1} \delta Q(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} (\delta \tau_{\alpha}^+(\lambda) e_{\alpha}^+(x, \lambda) + \delta \tau_{\alpha}^-(\lambda) e_{-\alpha}^-(x, \lambda)). \quad (6.19)$$

Эти разложения можно рассматривать как средство для установления взаимно однозначного соответствия между $Q(x)$ (соответственно $\text{ad}_J^{-1} \delta q$) и каждым из наименьших множеств данных рассеяния $\mathfrak{T}_i$ (соответственно $\delta \mathfrak{T}_i$), $i = 1, 2$. Для того чтобы увидеть полную аналогию между стандартными преобразованиями Фурье и разложениями по “квадратам решений”, нам понадобятся производящие операторы $\Lambda_{\pm}$:

$$\Lambda_{\pm} X(x) \equiv \text{ad}_J^{-1} \left(i \frac{dX}{dx} + i \left[q(x), \int_{\pm\infty}^x dy [q(y), X(y)] \right] \right), \quad (6.20)$$

для которых “квадраты решений” являются собственными функциями:

$$\begin{aligned} (\Lambda_+ - \lambda) e_{-\alpha}^+(x, \lambda) &= 0, & (\Lambda_+ - \lambda) e_{\alpha}^-(x, \lambda) &= 0, \\ (\Lambda_- - \lambda) e_{\alpha}^+(x, \lambda) &= 0, & (\Lambda_- - \lambda) e_{-\alpha}^-(x, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.3. Основные свойства моделей типа КС. Разложения (6.18), (6.19), явный вид операторов $\Lambda_{\pm}$ и выражение (6.21) являются фундаментом для получения основных свойств уравнений типа МНУШ, связанных с оператором Лакса L . Каждое из этих НЭУ определяется своим законом дисперсии, который, как мы считаем, имеет вид $F(\lambda) = f(\lambda)J$, где $f(\lambda)$ – полином по λ . Соответствующее НЭУ записывается как

$$i \text{ad}_J^{-1} \frac{\partial Q}{\partial t} + f(\Lambda_{\pm}) Q(x, t) = 0. \quad (6.22)$$

ТЕОРЕМА 6.2. НЭУ (6.22) эквивалентно, во-первых, уравнениям (5.6) и, во-вторых, следующим эволюционным уравнениям для обобщенных коэффициентов Гаусса разложения матрицы $T(\lambda)$:

$$i \frac{dS_J^+}{dt} + [F(\lambda), S_J^+] = 0, \quad i \frac{dT_J^-}{dt} + [F(\lambda), T_J^-] = 0, \quad \frac{dD_J^+}{dt} = 0. \quad (6.23)$$

Главная серия интегралов движения порождается асимптотическим разложением $\ln m_1^+(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \lambda^{-k}$. Первые три интеграла движения имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle Q(x), Q(x) \rangle, & I_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle Q_x(x), \text{ad}_J^{-1} Q(x) \rangle, \\ I_3 &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\langle Q_{1,x}, Q_{1,x} \rangle + \frac{1}{4} \langle [Q_1, Q], [Q_1, Q] \rangle \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Теперь можно считать iI_1 плотностью частиц, I_2 – импульсом и $I_3 = 2iH_{\text{МНУШ}}$. В самом деле, гамильтоновы уравнения движения, которые вытекают из равенства $H_{(0)} = -iI_3/2$ и скобок Пуассона

$$\{q_{\alpha}(y, t), p_{\beta}(x, t)\} = i\delta_{\alpha, \beta} \delta(x - y), \quad \alpha, \beta \in \Delta_1^+, \quad (6.25)$$

совпадают с МНУШ (3.8). Скобки Пуассона, указанные выше, дуальны канонической симплектической форме

$$\Omega_0 = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{tr}(\delta \vec{p}(x) \wedge \delta \vec{q}(x)) = \frac{1}{2i} \llbracket \operatorname{ad}_J^{-1} \delta q(x) \wedge \operatorname{ad}_J^{-1} \delta q(x) \rrbracket,$$

в которой операция $\wedge$ означает, что, вычисляя скалярное произведение или произведение матриц, мы заменяем обычное произведение матричных элементов на внешнее произведение. Гамильтонова формулировка уравнения (3.8) с участием Ω_0 и H_0 является лишь одним из членов иерархии гамильтоновых формулировок, заданной выражениями

$$\Omega_k = \frac{1}{i} \llbracket \operatorname{ad}_J^{-1} \delta Q \wedge \Lambda^k \operatorname{ad}_J^{-1} \delta Q \rrbracket, \quad H_k = i^{k+3} I_{k+3}, \quad (6.26)$$

в которых $\Lambda = (\Lambda_+ + \Lambda_-)/2$. Мы можем также вычислить Ω_k в терминах вариаций данных рассеяния. Налагая редукцию $q(x) = q^\dagger(x)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^k (\Omega_0^+(\lambda) - \Omega_0^-(\lambda)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^k \operatorname{Im}(m_1^+(\lambda)(\widehat{m}_2^+ \delta \vec{\rho}^+(\lambda) \wedge \delta \vec{\tau}^+(\lambda))). \end{aligned}$$

Это равенство позволяет доказать, что если мы можем привести Ω_0 к канонической форме, тогда можно привести к каноническим формам все Ω_k и они оказываются попарно эквивалентными.

7. ВЫВОДЫ

Используя ЗРГ, сформулированную на вещественной оси комплексной плоскости переменной λ и связанную с $SO(2r+1)/S(O(2r-2s+1) \otimes O(2s))$, $s \geq 1$, с симметрией типа **ВД.І**, мы получили пары Лакса для моделей типа КС; также подходящая модель типа КС получена для $s = 1$.

Еще одна ЗРГ, сформулированная в пространстве $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, оказалась связана с новым типом модели КС. Мы нашли нетривиальные глубокие редукции для подобных моделей и выяснили, какое влияние они оказывают на матрицу рассеяния. В частности, мы вывели новое двухкомпонентное НУШ, гамильтониан взаимодействия которого зависит не только от $|q_1|$ и $|q_2|$, но и от $q_1^* q_2 + q_1 q_2^*$. Таким образом, приведенный нами пример не противоречит теореме Захарова–Шульмана [34].

Наконец, используя соотношения Вронского, мы показали, что МОЗР для моделей КС можно рассматривать как обобщенные преобразования Фурье. Таким образом, мы нашли способ охарактеризовать основные свойства этих моделей, включая иерархию уравнений и иерархию их гамильтоновых структур.

Благодарности. Автор признателен профессорам Ф. Калоджеро и В. Е. Захарову за полезные предложения и комментарии, а также рецензенту, внимательно прочитавшему статью.

Список литературы

- [1] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “O(N)-invariant nonlinear Schrödinger equation – a new completely integrable system”, *Phys. Lett. A*, **84**:7 (1981), 349–352.
- [2] С. В. Манаков, “К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн”, *ЖЭТФ*, **65**:2 (1974), 505–516.
- [3] J. Ieda, T. Miyakawa, M. Wadati, “Exact analysis of soliton dynamics in spinor Bose–Einstein condensates”, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:19 (2004), 194102, 4 pp.
- [4] L. Li, Z. Li, B. A. Malomed, D. Mihalache, W. M. Liu, “Exact soliton solutions and nonlinear modulation instability in Spinor Bose–Einstein condensates”, *Phys. Rev. A*, **72**:3 (2005), 033611, 11 pp.
- [5] C. V. Ciobanu, S.-K. Yip, T.-L. Ho, “Phase diagrams of $F = 2$ spinor Bose–Einstein condensates”, *Phys. Rev. A*, **61**:3 (2000), 033607, 5 pp.
- [6] T. Ohmi, K. Machida, “Bose–Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases”, *J. Phys. Soc. Japan*, **67**:6 (1998), 1822–1825.
- [7] T.-L. Ho, “Spinor Bose condensates in optical traps”, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:4 (1998), 742–745.
- [8] A. P. Fordy, P. P. Kulish, “Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **89**:3 (1983), 427–443.
- [9] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [10] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [11] M. J. Ablowitz, B. Prinari, A. D. Trubatch, *Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **302**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [12] V. S. Gerdjikov, “Basic aspects of soliton theory”, *Geometry, Integrability and Quantization*, Proceedings of the 6th International Conference (Sts. Constantine and Elena, Bulgaria, June 3–10, 2004), eds. I. M. Mladenov, A. C. Hirshfeld, Softex, Sofia, 2005, 78–125, arXiv: nlin/0604004.
- [13] V. S. Gerdjikov, “Algebraic and analytic aspects of soliton type equations” (Mount Holyoke College, South Hadley, MA, USA, June 17–21, 2001), *Contemporary Mathematics*, **301** (2002), 35–68, arXiv: nlin/0206014v1.
- [14] V. S. Gerdjikov, G. Vilasi, A. B. Yanovski, *Integrable Hamiltonian Hierarchies. Spectral and Geometric Methods*, Lecture Notes in Physics, **748**, Springer, Berlin, 2008.
- [15] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [16] V. E. Zakharov, A. V. Mikhailov, “On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time”, *Commun. Math. Phys.*, **74**:1 (1980), 21–40.
- [17] R. I. Ivanov, “On the dressing method for the generalized Zakharov–Shabat system”, *Nucl. Phys. B*, **694**:3 (2004), 509–524.
- [18] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, R. I. Ivanov, N. A. Kostov, “N-wave interactions related to simple Lie algebras. $\mathbb{Z}_2$ -reductions and soliton solutions”, *Inverse Problems*, **17**:4 (2001), 999–1015.
- [19] В. С. Герджиков, Г. Г. Граховски, Н. А. Костов, “О многокомпонентных уравнениях типа нелинейного уравнения Шредингера на симметричных пространствах и их редукциях”, *ТМФ*, **144**:2 (2005), 313–323.
- [20] A. V. Mikhailov, “The reduction problem and the inverse scattering method”, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.
- [21] V. S. Gerdjikov, R. I. Ivanov, G. G. Grahovski, “On Integrable Wave Interactions and Lax pairs on symmetric spaces”, *Wave Motion*, **71** (2017), 53–70, arXiv: 1607.06940.

- [22] G.G. Grahovski, V.S. Gerdjikov, N.A. Kostov, V.A. Atanasov, “New integrable multi-component NLS type equations on symmetric spaces: Z_4 - and Z_6 -reductions”, *Geometry, Integrability and Quantization*, Proceedings of the 7th International Conference (Sts. Constantine and Elena, Bulgaria, June 2–10, 2005), eds. I. Mladenov, M. De León, Softex, Sofia, 2006, 154–175, arXiv: nlin/0603066.
- [23] V. S. Gerdjikov, “Derivative nonlinear Schrödinger equations with $\mathbb{Z}_N$ and $\mathbb{D}_N$ -reductions”, *Romanian J. Phys.*, **58**:5–6 (2013), 573–582.
- [24] V. S. Gerdjikov, A. A. Stefanov, “New types of two component NLS-type equations”, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, **26** (2016), 53–66, arXiv: 1703.01314.
- [25] В. С. Герджиков, М. И. Иванов, П. П. Кулиш, “Квадратичный пучок и нелинейные уравнения”, *ТМФ*, **44**:3 (1980), 342–357.
- [26] В. С. Герджиков, М. И. Иванов, “Квадратичный пучок общего вида и нелинейные эволюционные уравнения. Разложения по “квадратам” решений – обобщенные преобразования Фурье”, *Болг. физ. жс.*, **10**:1 (1983), 13–26.
- [27] В. С. Герджиков, М. И. Иванов, *Болг. физ. жс.*, **10**:2 (1983), 130–143.
- [28] V. S. Gerdjikov, “Riemann–Hilbert Problems with canonical normalization and families of commuting operators”, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, **21** (2012), 201–216, arXiv: 1204.2928v1.
- [29] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, **34**, AMS, Providence, RI, 2001.
- [30] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, “Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж.*, **24** (1984), 81–180.
- [31] D. J. Kaup, “Closure of the squared Zakharov–Shabat eigenstates”, *J. Math. Anal. Appl.*, **54**:3 (1976), 849–864.
- [32] F. Calogero, F. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons*, v.1: *Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*, Lecture Notes in Computer Science, **144**, North-Holland, Amsterdam—New York, 1982.
- [33] V. S. Gerdjikov, “Generalized Fourier transforms for the soliton equations. Gauge-covariant formulation”, *Inverse Problems*, **2**:1 (1986), 51–74.
- [34] V. E. Zakharov, E. I. Schulman, “To the integrability of the system of two coupled nonlinear Schrödinger equations”, *Physica D*, **4** (1982), 270–274.