Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. К. Силаев, О. А. Хрусталеv, Дважды периодические решения в существенно нелинейной одномерной полевой модели, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 300–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:49:14

© 1998 г.

П. К. Силаев*, О. А. Хрусталеv*

ДВАЖДЫ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ПОЛЕВОЙ МОДЕЛИ

Численно показано существование дважды периодических решений в одномерной $(1+1)$ φ^4 -модели, а также найден закон дисперсии соответствующих нелинейных волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача квантования существенно нелинейных полевых моделей привлекает внимание в течение уже достаточно длительного времени. Однако в общем случае эта задача решена главным образом для статических решений типа солитонов. Действительно, линеаризуя уравнения движения в окрестности статического классического решения, мы находим спектр и соответствующий набор собственных функций, что фактически решает задачу квантования.

Единственным отличием от квантования в окрестности тривиального решения (нулевого или постоянного фонового поля) является наличие нулевых мод. Нетривиальное классическое решение нарушает исходные симметрии полевой модели, и, следовательно, в спектре возмущений появляются нулевые моды, соответствующие инфинитезимальным преобразованиям симметрии классического решения. В частности, для скалярного поля в одномерном $(1+1)$ случае классическое решение нарушает трансляционную симметрию, поэтому возникает трансляционная нулевая мода, соответствующая бесконечно малым сдвигам солитона.

Наивный подход к квантованию заключается в механическом вычеркивании этих мод (поскольку они соответствуют движению солитона как целого). Однако это не позволяет получить правильные канонические коммутационные соотношения и приводит к изменению исходного числа степеней свободы системы. Корректный метод квантования был предложен Боголюбовым [1] (он был применен для квантования существенно нелинейных полевых моделей в ряде последующих работ [2–4]) и состоит во введении коллективных (групповых) переменных, которые восстанавливают нарушенную симметрию, поскольку описывают динамику солитона как целого. В частности, для одномерного скалярного солитона проще всего ввести коллективную переменную – координату солитона. Чтобы после введения групповых переменных не менялось число степеней свободы системы, мы должны наложить некоторые условия. Разумеется, самым простым

*Московский государственный университет, Москва, Россия

(но не единственным) из них будет условие ортогональности квантовых флуктуаций поля соответствующим нулевым модам.

Метод, позволяющий проводить квантование нелинейных одномерных полевых моделей в окрестности дважды периодических решений (т.е. решений, периодических как по времени, так и по пространственной координате), был предложен недавно в работе [5]. Класс дважды периодических решений – это в некотором смысле класс самых простых нестатических решений полевой модели. В некоторых случаях для этих решений известны явные аналитические выражения (как, например, для 16 вариантов кноидальных волн в модели синус-Гордона). В других случаях само существование таких решений неочевидно. В частности, даже для простейшей φ^4 -модели легко написать явное аналитическое решение только в случае бесконечного периода по пространственной координате. Задача поиска истинных дважды периодических решений этой модели, т.е. решений с конечным периодом как по времени, так и по координате, а также установление закона дисперсии этих нелинейных волн и составляет цель настоящей работы. Помимо последующего использования полученных решений для целей квантования, они представляют и самостоятельный интерес, поскольку, как мы увидим ниже, их динамика имеет необычный характер.

Работа организована следующим образом: в разделе 2 изложена постановка задачи и обсуждаются возможные пути ее решения, в разделе 3 изложены использованные методы и результаты вычислений, раздел 4 содержит обсуждение результатов.

2. ПОИСК ДВАЖДЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ φ^4 -МОДЕЛИ

Рассмотрим полевую модель с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\varphi'^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{g}{4}\varphi^4.$$

При последующих вычислениях мы будем полагать, что $m = 1$ (это выбор масштаба пространственной и временной координат) и $g = 1$ (это выбор амплитуды нелинейных волн, которую в дальнейшем будем рассматривать как параметр).

Будем искать дважды периодическое решение в виде нечетно-нечетных волн

$$\varphi(x, t) = \sum_{i,j} a_{ij} \sin(i\omega t) \sin(jkx).$$

Разумеется, это не общий вид дважды периодического решения. Можно искать также и четно-четные волны, нечетно-четные, четно-нечетные (все эти случаи вполне аналогичны нечетно-нечетному), а также решения с неопределенной четностью. Однако в нашу задачу входит найти хотя бы некоторые из дважды периодических решений.

Подставляя ряд в уравнения движения, получаем бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} & \left[(i\omega)^2 - (jk)^2 - 1 \right] a_{ij} - \frac{1}{4} \left[\text{sign}(r+s-t) \sum_{|r+s-t|=i} + \text{sign}(r-s+t) \sum_{|r-s+t|=i} + \right. \\ & \quad \left. + \text{sign}(-r+s+t) \sum_{|-r+s+t|=i} - \sum_{|r+s+t|=i} \right] \times \\ & \quad \times \frac{1}{4} \left[\text{sign}(b+c-d) \sum_{|b+c-d|=j} + \text{sign}(b-c+d) \sum_{|b-c+d|=j} + \right. \\ & \quad \left. + \text{sign}(-b+c+d) \sum_{|-b+c+d|=j} - \sum_{|b+c+d|=j} \right] a_r b_s c_t d = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве неизвестных в этой системе рассматриваются частота ω , а также все коэффициенты a_{ij} , кроме первого (a_{11}), который является постоянным параметром, задающим амплитуду колебаний.

Разумеется, решить эту систему можно только численно посредством обрезания ряда по обоим индексам (i и j). Результирующая система уравнений будет по-прежнему существенно нелинейной, но уже конечной.

Однако при этом возникает нетривиальный вопрос о законности такого обрезания. Дело в том, что при численном решении обрезанной системы, даже если достигнута достаточно малая невязка, всегда есть вероятность, что мы нашли лишь набор коэффициентов, который делает левую часть системы достаточно малой. Не исключено, что истинное решение системы лежит далеко от найденного или вовсе отсутствует.

Разумеется, в рамках численного решения такой вопрос с неизбежностью остается без однозначного ответа. Однако, с одной стороны, критерием правильности полученного решения может служить совпадение решений системы при разных точках обрезания. С другой стороны, достаточно быстрое убывание коэффициентов ряда в обоих направлениях – как в направлении увеличения временного индекса i , так и в направлении пространственного индекса j – также может служить доказательством корректности предложенной процедуры. Здесь следует подчеркнуть, что мы рассматриваем существенно нелинейный случай, т.е. амплитуды, большие или равные единице. Убывание коэффициентов идет просто потому, что низкочастотные гармоники даже при большой амплитуде могут и не генерировать высокочастотные гармоники с большими амплитудами.

Наконец, варьирование невязки – это еще один способ проверки нашего подхода. Если при уменьшении максимальной погрешности мы будем получать то же самое решение, это может служить еще одним дополнительным свидетельством в пользу правильности полученного решения.

Возможная некорректность обрезания следует из того, что при данной частоте ω и данном волновом числе k существует, вообще говоря, бесконечно много таких пар целых чисел i и j , что коэффициент при линейном по a_{ij} слагаемом в соответствующем уравнении системы будет близок к нулю, т.е.

$$(i\omega)^2 - (jk)^2 - 1 \approx 0. \quad (2)$$

Это соответствует возможности резонанса для гармоники a_{ij} . Следовательно, вполне может случиться так, что, обрезая систему уравнений, мы существенно меняем динамику системы, поскольку уничтожаем резонансы в старших гармониках. Опять-таки единственный способ проверки корректности обрезания в рамках численного счета — это проведение вычислений при разных точках обрезания. Если окажется, что возможный резонанс в гармонике a_{ij} , исключенный в результате обрезания системы, не появляется и при дополнении нашей системы до индексов i, j , т.е. при включении в систему уравнений гармоники a_{ij} , то можно говорить, по крайней мере, о самосогласованности нашего подхода.

Однако в действительности даже “приближенно” дважды периодические решения, полученные в результате решения обрезанной системы, представляют интерес. Ведь, задавая достаточно малую невязку, мы сможем гарантировать “приближенную” периодичность в течение достаточно большого количества периодов.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРЕЗАННОЙ СИСТЕМЫ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В случае слабой нелинейности (при выбранных нами соглашениях о масштабировании случай слабой нелинейности — это случай малой амплитуды $a_{11} = \delta$) можно построить наивную итерационную теорию возмущений по нелинейным членам в системе уравнений для коэффициентов a_{ij} . Именно, на первом шаге мы полагаем $a_{11} = \delta$, $k = k_0$, $a_{ij} = 0$, $\omega = \sqrt{k_0^2 + 1}$, после чего из первого уравнения (по-прежнему полагая $a_{11} = \delta$) находим ω , а из всех последующих — амплитуду соответствующей гармоники a_{ij} .

Как и следовало ожидать, при малых δ такая итерационная процедура действительно очень быстро сходится и дает решение обрезанной системы (1).

Однако нас интересует главным образом существенно нелинейный случай, т.е. случай, когда амплитуда a_{11} больше или равна единице. Непосредственный численный расчет показал, что для различных значений волнового числа k и амплитуды a_{11} необходимо использовать разные методы поиска многомерных корней [6].

Описанная выше наивная итерационная процедура сходится при некоторых значениях параметров (в частности, при достаточно больших значениях волнового числа, когда в энергии скалярного поля доминирует не потенциальная энергия, а кинетический член).

При других значениях параметров приходится использовать модифицированную итерационную процедуру, при которой на каждом шаге итерации сдвиг производится не на новое значение переменных, а на линейную комбинацию старого и нового значений с весами соответственно $1 - \epsilon$ и ϵ . Уменьшение параметра ϵ увеличивает вероятность того, что итерационная процедура сойдется, однако одновременно существенно возрастает количество необходимых итераций.

Далее, при малых значениях волнового числа и в окрестности резонансов (см. ниже) итерационная процедура вообще не сходится. В этом случае приходится применять надежные, но медленные методы поиска многомерного минимума функции, характеризующей суммарную невязку системы. При этом стандартный метод сопряженных градиентов позволяет достаточно быстро приблизиться к искомому минимуму, но не позволяет достигнуть его с требуемой точностью. Это связано с тем, что метод сопряженных градиентов не позволяет погасить высокочастотную погрешность, т.е. погрешность в

Рис. 1. Зависимость квадрата частоты от квадрата волнового числа для амплитуды $a_{11} = 1.0, 1.3, 1.6, 2.0$.

направлении, перпендикулярном дну оврага, который с неизбежностью образует минимизируемая функция в окрестности искомого решения.

Поэтому приходится употреблять так называемый динамический метод, состоящий в решении уравнений движения материальной точки с трением в поле с потенциалом, равным минимизируемой функции. В отсутствие оврагов этот метод заметно медленнее метода сопряженных градиентов, но при наличии глубоких и непрямых оврагов он, во-первых, сходится быстрее и, во-вторых, позволяет достичь гораздо большей точности. Это связано с тем, что высокочастотные степени свободы (соответствующие смещениям поперек оврага) очень быстро высвечиваются (т.е. гасятся трением).

Как нетрудно видеть, в рассматриваемой системе уравнений между собой связаны только нечетные гармоники. Поэтому поиск решений велся численно при обрезании по временному и пространственному индексам на 9-м индексе (система 25 уравнений с 25 неизвестными), на 11-м индексе (система 36 уравнений), на 13-м индексе (система 49

Рис. 2. Зависимость амплитуды a_{35} от квадрата волнового числа при $a_{11} = 1.6$.

уравнений) и, наконец, на 15-м индексе (система 64 уравнений). Максимальная погрешность для каждого отдельного уравнения задавалась 10^{-7} и 10^{-8} .

Как оказалось, полученные результаты практически не отличаются друг от друга (следовательно, они не зависят ни от точки обрезания, ни от максимальной погрешности), т.е. использованная процедура решения, по крайней мере, самосогласованна.

Законы дисперсии (зависимость ω^2 от k^2) соответствующих нелинейных волн для различных значений амплитуды a_{11} (а именно: 1.0, 1.3, 1.6, 2.0) приведены на рис. 1.

Для меньших амплитуд закон дисперсии в точности совпадает с законом дисперсии линейной модели ($\omega^2 = k^2 + 1$). Тот факт, что частота в системе с нелинейностью 4-го порядка с положительным коэффициентом растет с ростом амплитуды, вполне очевиден и дальнейшего обсуждения не требует.

Нетривиальным результатом является наличие резонансов, возможность появления которых уже обсуждалась в разделе 2. Чем больше амплитуда, тем более ярко выраженным является резонанс. Более того, видно, что резонансные участки кривых ложатся на прямые линии, соответствующие условию (2) для некоторых пар значений i и j . Прямые, проведенные на рис. 1, соответствуют выполнению условия резонанса (2) для гармоник $a_{7,11}$, $a_{3,5}$, $a_{5,9}$, $a_{5,11}$, $a_{3,7}$, $a_{3,9}$. При пересечении “регулярного” закона дисперсии ($\omega^2 = k^2 + \text{const}$) с очередной резонансной кривой зависимость квадрата частоты от квадрата волнового числа отклоняется от этого “регулярного” закона и идет вдоль условия резонанса (2). После того как она слишком удаляется от прямой $\omega^2 = k^2 + \text{const}$, происходит срыв резонанса, и мы вновь возвращаемся к “регулярному” закону дисперсии.

Следует подчеркнуть, что в области резонанса растет не только амплитуда “резо-

Рис. 3. Зависимость амплитуды a_{15} от квадрата волнового числа при $a_{11} = 1.6$.

нирующей” гармоники a_{ij} , но и амплитуды всех остальных гармоник. Кроме того, несмотря на резонанс амплитуды старших гармоник достаточно быстро убывают с ростом любого из индексов (как пространственного, так и временного).

Типичные зависимости амплитуд от квадрата волнового числа приведены на рис. 2, 3 и 4. Все три зависимости получены при амплитуде гармоники $a_{11} = 1.6$. На рис. 2 изображена гармоника a_{35} , которая формирует наиболее ярко выраженный резонанс (вторая справа прямая на рис. 1.). Видно, что она “откликается” и на все остальные резонансы. На рис. 3 изображена гармоника a_{15} , которая в данном диапазоне частот и волновых чисел не резонирует, но “откликается” на все остальные резонансы. Видно, что ее амплитуда вдали от резонанса заметно больше, чем амплитуда a_{35} . На рис. 4 изображена гармоника a_{55} , которая также не резонирует, но “откликается” на все остальные резонансы. Ее амплитуда заметно меньше, чем амплитуда a_{35} .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что, по крайней мере в некотором приближении, дважды периодические решения в φ^4 -модели существуют. Более того, мы установили, что закон дисперсии соответствующих нелинейных волн имеет существенно нерегулярный резонансный характер. Следовательно, по крайней мере в принципе, не исключена возможность, что динамика модели может быть хаотической.

В связи с этим следует напомнить, что исследование динамики образования и высвечивания квазибризера, образующегося при рассеянии кинка на антикинке в φ^4 -модели, проведенное в работе [7], также привело к выводу, во-первых, о фрактальности спектра квазибризера и, во-вторых, о хаотичности его динамики. Разумеется, и в нашей рабо-

Рис. 4. Зависимость амплитуды a_{55} от квадрата волнового числа при $a_{11} = 1.6$.

те, и в работе [7] результаты были получены численно. Более того, в работе [7] расчеты проводились на ограниченной решетке, поэтому естественным образом возникает вопрос о том, в какой мере результаты, полученные для конечного числа степеней свободы, соответствуют истинной динамике исходной полевой модели. Однако этот вопрос выходит за рамки настоящей работы и может служить материалом для дальнейших исследований.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 96-15-96674) и Санкт-Петербургского конкурсного центра фундаментального естествознания (грант № 95-0-6.3-20).

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов. УМЖ. 1950. Т. 2. С. 3.
- [2] Е. П. Солодовникова, А. Н. Тавхелидзе, О. А. Хрусталева. ТМФ. 1972. Т. 10. С. 162; Т. 11. С. 317; 1973. Т. 12. С. 164.
- [3] О. А. Khrustalev, A. V. Razumov, A. Yu. Taranov. Nucl. Phys. B. 1980. V. 172. P. 44.
- [4] К. А. Свешников, П. К. Силаев, О. А. Хрусталева. ТМФ. 1989. Т. 80. С. 173.
- [5] О. А. Хрусталева, М. В. Чичикина. ТМФ. 1997. Т. 111. С. 242.
- [6] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. Numerical recipes in C. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [7] P. Anninos, S. Oliveira, R. A. Matzner. Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1147.

Поступила в редакцию 14.IV.1998 г.