Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Орлов, Числа Гурвица и произведения случайных матриц, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 3, 395–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 08:41:49

© 2017 г.

А. Ю. Орлов^{*†}

ЧИСЛА ГУРВИЦА И ПРОИЗВЕДЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Изучаются многоматричные модели, которые можно рассматривать как интегралы от произведений тау-функций, зависящих от собственных значений произведений случайных матриц. Рассмотрены тау-функции двухкомпонентной иерархии Кадомцева–Петвиашвили и иерархии Кадомцева–Петвиашвили типа В, введенной Кацем и ван де Лером. В некоторых случаях эти интегралы сами являются тау-функциями. Рассмотрены модели, генерирующие числа Гурвица $H^{E,F}$, где E – эйлерова характеристика накрываемой поверхности, а F – число точек ветвления. Показано, что если подынтегральное выражение содержит произведение $n > 2$ матриц, то интеграл порождает числа Гурвица с $E \leq 2$ и $F \leq n + 2$, причем E и F зависят и от n , и от порядка сомножителей в произведении случайных матриц. Эйлерова характеристика E может быть четным или нечетным числом и соответственно описывает ориентируемые или неориентируемые накрываемые поверхности в зависимости от наличия тау-функции в подынтегральном выражении. Изучаются произведения комплексных и произведения унитарных матриц.

Ключевые слова: числа Гурвица, поверхности Клейна, полиномы Шура, характеры симметрической группы, гипергеометрические функции, случайные разбиения, случайные матрицы, матричные модели, тау-функция, двухкомпонентная иерархия Кадомцева–Петвиашвили, решетка Тоды, иерархия Кадомцева–Петвиашвили типа В (Каца–ван де Лера).

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9320>

Памяти Пети Кулиша

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются многоматричные модели, в которых вершины взаимодействия содержат произведения n взаимодействующих матриц. Статистическая сумма такой модели определяется как интеграл по матричным элементам каждой матрицы от некоторого количества тау-функций, где каждая тау-функция зависит от произведения матриц. Эта зависимость выбирается следующим образом. Как известно, тау-функция иерархии интегрируемых уравнений зависит от высших

^{*}Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия. E-mail: orlovs@ocean.ru

[†]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

времен иерархии $\{p_m, m \geq 1\}$. В нашем случае мы полагаем $p_m = \text{tr } Z^m$, $m \geq 1$, где Z обозначает произведение n матриц (мы называем такую тау-функцию тау-функцией матричного аргумента), тогда тау-функция зависит только от собственных значений матрицы Z . Мы рассматриваем многоматричные модели, которые являются интегралами от произведений тау-функций матричных аргументов.

Эти задачи хорошо изучены для случая $n = 1, 2$ (см., например, работу [1], в которой рассматриваются интегралы от произведений тау-функций, причем эти матричные интегралы сами являются тау-функциями, и работы [2]–[7], посвященные известным матричным моделям, имеющим приложения в физике). В этих работах рассматриваются интегралы по унитарным, комплексным, нормальным и эрмитовым матрицам.

В настоящей работе нам потребуется разложение матричных интегралов по характеристам, как это впервые было представлено в работах [8], [9] и использовано в статьях [4], [6], [1] в контексте связей между матричными моделями и интегрируемыми системами. Заметим, что в тех случаях, когда матричный интеграл оказывался тау-функцией, эта была либо тау-функция релятивистской цепочки Тоды, либо тау-функция иерархии Кадомцева–Петвиашвили типа В (далее иерархия ВКП), введенной в работе Каца и ван де Лера [10]. В этом случае ряд теории возмущений по константам связи оказывается так называемой тау-функцией гипергеометрического типа. Для релятивистской цепочки Тоды тау-функция такого типа была выписана в работе [4] и подробно изучалась в [11], [12]. Напомним, что цепочка Тоды возникает в одно- и двухматричных моделях с эрмитовыми и унитарными матрицами, а также в некоторых других, в частности в ряде матричных моделей, описанных в работе [1] (и в приложении к [13]), а иерархия ВКП возникает в описании ортогонального и симплектического ансамблей [14], циркулярных ансамблей с $\beta = 1, 4$ [15] и ансамблей Жинибра с $\beta = 1, 4$ [16], в описании ансамблей Пандэ–Меты, дающих интерполяцию между унитарным и ортогональным или между унитарным и симплектическим ансамблями [15], а также в описании двухматричных моделей с одной эрмитовой и одной симметрической (или антисимметрической) или с одной эрмитовой и одной самодуальной (или антисамодуальной) матрицами.

Связи между различными матричными интегралами и некоторыми типами чисел Гурвица изучались во многих работах (см., например, [17]–[24]). Напомним, что числа Гурвица $H^{\text{E}, \text{F}}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{\text{F}})$ дают число неэквивалентных разветвленных d -листных накрытий римановой или клейновой поверхности с эйлеровой характеристикой E другой римановой или клейновой поверхностью с заданными профилями ветвления $\Delta^1, \dots, \Delta^{\text{F}}$. В цитируемых работах изучались два случая:

1) накрытия римановой сферы ($E = 2$) такие, что два профиля Δ^1, Δ^2 произвольны, а длины всех остальных профилей фиксированы; этот случай относится к иерархии цепочки Тоды интегрируемых уравнений [25], [26] (или, эквивалентно, двухкомпонентной иерархии КП, далее мы называем ее иерархией 2КП).

2) накрытия (вещественной) проективной плоскости ($E = 1$) с одним произвольным профилем Δ^1 и с фиксированными длинами профилей во всех остальных точках; этот случай относится к иерархии ВКП (Каца–ван де Лера) [10].

В настоящей работе нам потребуются более сложные матричные интегралы, в которых участвует большее количество матриц, как, например, в работах [18], [22], [23], [27], [28]. Мы развиваем методы последних двух работ, а также работы [1]. Нашей целью является описание интегралов от тау-функций и/или произведений тау-функций, которые порождают числа Гурвица $H^{\text{E}, \text{F}}$ с произвольно выбранной эйлеровой

характеристикой E накрываемой поверхности (далее мы часто называем ее базовой поверхностью или просто базой) и произвольным числом точек ветвления F .

Мы начинаем свое рассмотрение с матричных интегралов, которые сами являются тау-функциями. Такие интегралы всегда порождают числа Гурвица как для сферы Римана ($E = 2$), так и для вещественной проективной плоскости ($E = 1$). Заметим, что такие интегралы можно связать [29] с популярной задачей теории квантового хаоса о нахождении спектра произведений случайных матриц, которая изучалась в работах [30]–[34]. Далее мы показываем, что при изменении порядка сомножителей в произведении матриц мы получаем другие производящие функции чисел Гурвица с эйлеровой характеристикой E , уменьшенной на четное число (технически это явление связано с замечаниями 1 и 5). В этом случае интеграл не является тау-функцией, тем не менее такие интегралы наследуют некоторые свойства тау-функций.

Настоящая работа представляет собой продолжение работы [1] в следующем смысле: в работе [1] отбирались только такие интегралы от тау-функций (или от произведений тау-функций) цепочки Тоды, которые сами можно интерпретировать как тау-функции, а в настоящей работе нет этого ограничения. Кроме тау-функций цепочки Тоды, мы также допускаем под интегралом тау-функции иерархии ВКП (последние дают нечетные эйлеровы характеристики, что соответствует неориентируемым поверхностям).

Работа состоит из введения, двух основных разделов и приложений. В оставшейся части введения мы вводим нужные нам объекты и формулируем основную техническую лемму 1, которая была использована в предшествующей работе [1]. Также определяются специальные комбинации чисел Гурвица (20), обобщающие монотонные числа Гурвица, введенные Гулденом и Джексоном в известной статье [35]. Отметим, что как частый случай сюда входят двойные числа Гурвица, введенные ранее Окуньковым в пионерской работе [36], и через них также можно выразить числа Гурвица из работы [37], связанные с пополненными циклами (они применялись к “интегрируемому” случаю в работе [38]). Мы вводим обобщенную гипергеометрическую функцию, которая порождает подобные комбинации для произвольных E , см. формулу (25). Раздел 3 почти идентичен разделу 2, но комплексные матрицы заменены унитарными. В приложениях мы напоминаем об основных понятиях теории разбиений, аппарате функции Шура, числах Гурвица, а также приводим некоторые факты об интегрируемых системах и тау-функциях. Мы повторяем некоторые части работ [22] и [23]. В частности, обсуждается, каким образом можно вычислять числа Гурвица для римановых и клейновых поверхностей в случае, когда эйлерова характеристика накрываемой поверхности меньше единицы (см. лемму 4 и предложение 19). Кроме того, в приложении выписаны различные примеры матричных интегралов из работ [22] и [23], которые порождают схожие, но отличающиеся от рассмотренных в основном тексте статьи числа Гурвица.

На одной из конференций в Галлиполи, кажется, в 2002 году, я сделал доклад “Гипергеометрические функции, симметрические функции и матричные интегралы”. При обсуждении Петя Кулиш заметил, что было бы интересно использовать характеры симметрической группы в приложении к теории солитонов. Я благодарен ему за это обсуждение. Настоящая работа в какой-то степени отвечает его пожеланию.

1.1. Произведение комплексных матриц. Рассмотрим комплексные матрицы $Z_\alpha, C_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$, размера $N \times N$. Определим произведения

$$Z := (Z_1 C_1) \dots (Z_n C_n), \quad (1)$$

$$Z^* := Z_n^\dagger \dots Z_1^\dagger, \quad (2)$$

$$Z^{(t)} := Z_n^\dagger Z_{n-1}^\dagger \dots Z_{t+1}^\dagger Z_1^\dagger Z_2^\dagger \dots Z_t^\dagger, \quad t \leq n, \quad (3)$$

где $Z_\alpha^\dagger$ – матрица, эрмитово сопряженная к Z_α . Здесь и ниже звездочка не означает комплексного сопряжения. Матрица $Z^{(t)}$ получается действием $[t/2]$ транспозиций на матрицу Z^* . В формуле (3) для $t = n$ мы полагаем $Z^{(n)} = Z_1^\dagger Z_2^\dagger \dots Z_n^\dagger$. Также введем $Z^{(0)} = Z^*$.

Введем обозначения

$$\tau_1^{\text{TL}}(X, \mathbf{p}) = \sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(\mathbf{p}) = e^{\text{tr } V(\mathbf{p}, X)} = \prod_{i=1}^N \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} x_i^m p_m, \quad (4)$$

$$\tau_1^{\text{BKP}}(X) = \sum_\lambda s_\lambda(X) = \prod_{i=1}^N (1 - x_i)^{-1} \prod_{i < j} (1 - x_i x_j)^{-1}, \quad (5)$$

где x_i – собственные значения матрицы X , а $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ – полубесконечный набор параметров. Здесь s_λ обозначает функцию Шура (см. приложение А). Напомним необходимый нам факт [39]: для матрицы X размера $N \times N$

$$s_\lambda(X) = 0, \quad \text{если } \ell(\lambda) > N, \quad (6)$$

где $\ell(\lambda)$ – длина разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$, $\lambda_\ell > 0$.

Мы изучаем интегралы от комплексных матриц, в которых мера интегрирования задана как

$$d\mu(Z_\alpha) = c \prod_{i,j=1}^N d\text{Re}(Z_\alpha)_{ij} d\text{Im}(Z_\alpha)_{ij} e^{-|(Z_\alpha)_{ij}|^2},$$

область интегрирования есть $\mathbb{C}^{N^2}$ и c – нормировочная константа, которая определяется из условия $\int d\mu(Z_\alpha) = 1$. Данную меру мы рассматриваем как вероятностную. Соответствующий ансамбль называется ансамблем случайных комплексных матриц, или комплексным ансамблем Жинибра. Математическое ожидание любой величины f , зависящей от матричных элементов матрицы Z , определено формулой

$$\mathbb{E}(f) = \int f(Z) d\mu(Z).$$

Также мы рассматриваем интегралы по унитарной группе $U(N)$, соответствующую меру Хаара мы обозначаем как $d_* U$ (см. формулу (П.6)), $\int_{U(N)} d_* U = 1$.

Для вычисления интегралов мы применяем соотношения, использованные также в работах [1] и [22], [23] (вывод см., например, в [39]).

ЛЕММА 1. Пусть A и B – нормальные матрицы (т.е. матрицы, которые можно привести к диагональному виду с помощью унитарного преобразования). Тогда

$$\int_{U(N)} s_\lambda(AUBU^{-1}) d_* U = \frac{s_\lambda(A)s_\lambda(B)}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)}. \quad (7)$$

Если $A, B \in GL(N)$, то

$$\int_{U(n)} s_\mu(AU) s_\lambda(U^{-1}B) d_*U = \frac{s_\lambda(AB)}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)} \delta_{\mu,\lambda}. \quad (8)$$

Кроме того,

$$\int_{\mathbb{C}^{n^2}} s_\lambda(AZBZ^+) e^{-\text{Tr } ZZ^+} \prod_{i,j=1}^n d^2Z = \frac{s_\lambda(A)s_\lambda(B)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)}, \quad (9)$$

$$\int_{\mathbb{C}^{n^2}} s_\mu(AZ) s_\lambda(Z^+B) e^{-\text{Tr } ZZ^+} \prod_{i,j=1}^n d^2Z = \frac{s_\lambda(AB)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} \delta_{\mu,\lambda}, \quad (10)$$

где $\mathbf{p}_\infty = (1, 0, 0, \dots)$.

Эта лемма является нашим инструментом при изучении интегралов от тау-функций, как простейших $\tau_1^{\text{TL}}, \tau_1^{\text{BKP}}$, так и более общих (П.39) и (П.37), выписанных ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если мы припишем степень 1 каждой функции Шура, $\text{Deg } s_\lambda = 1$, то соотношения (7) и (9) сохраняют степень, а в обоих соотношениях (8) и (10) степень правой части меньше степени левой части на 2.

1.2. Функции Шура, специализации и характеристическое отображение. Мы отсылаем читателя к приложению А, где введены некоторые понятия и определения, в частности понятие разбиения. Запишем функцию Шура как квазиоднородный полином от переменных $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$, называемых степенными суммами [39]:

$$s_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{\dim \lambda}{d!} \left(p_1^d + \sum_{\Delta: |\Delta|=d} \varphi_\lambda(\Delta) \mathbf{p}_\Delta \right), \quad (11)$$

где $\mathbf{p}_\Delta = (p_{\Delta_1}, \dots, p_{\Delta_\ell})$, а $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_\ell)$ – разбиения, вес которых совпадает с весом разбиения λ : $|\lambda| = |\Delta|$. В формуле (11) $\dim \lambda = d! s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)$ обозначает размерность неприводимого представления симметрической группы S_d . Мы предполагаем, что $\varphi_\lambda(\Delta) = 0$, если $|\Delta| \neq |\lambda|$.

Соотношение (11) известно как характеристическое отображение (см., например, монографию [39]), оно связывает функции Шура (неприводимые характеры линейных групп, индексированные параметром λ) и неприводимые характеры χ_λ симметрической группы S_d (см. соотношение (19) ниже).

Мы будем использовать следующие специализации функций Шура.

ЛЕММА 2. Введем обозначения

$$\mathbf{p}(a) = (a, a, a, \dots), \quad \mathbf{p}(q, t) = (p_1(q, t), p_2(q, t), \dots), \quad p_m(q, t) = \frac{1 - q^m}{1 - t^m}. \quad (12)$$

Тогда

$$\frac{s_\lambda(\mathbf{p}(a))}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = (a)_\lambda, \quad (13)$$

где

$$(a)_\lambda := (a)_{\lambda_1} (a-1)_{\lambda_2} \dots (a-\ell+1)_{\lambda_\ell}, \quad (a)_n := a(a+1) \dots (a+n-1)$$

и где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ – разбиение.

В более общем случае

$$\frac{s_\lambda(\mathbf{p}(q, t))}{s_\lambda(\mathbf{p}(0, t))} = (q; t)_\lambda, \quad (14)$$

где

$$(q; t)_\lambda = (q; t)_{\lambda_1} (qt^{-1}; t)_{\lambda_2} \dots (qt^{1-\ell}; t)_{\lambda_\ell}, \quad (q; t)_k = (1 - q)(1 - qt) \dots (1 - qt^{n-1});$$

здесь $(q; t)_k$ есть t -деформированный символ Похгаммера (мы полагаем $(q; t)_0 = 1$).

Данная лемма может быть легко выведена из известных соотношений, приведенных в книге [39].

Так как символы Похгаммера (13) и (14) равны отношению функций Шура, мы полагаем $\text{Deg}(a)_\lambda = 0$ и $\text{Deg}(q; t)_\lambda = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В используемых нами обозначениях имеет место равенство

$$s_\lambda(\mathbb{I}_N) = s_\lambda(\mathbf{p}(N)). \quad (15)$$

Рассмотрим суммы нормированных характеров φ_λ , вычисленные на всех разбиениях Δ с заданным весом $d = |\lambda| = |\Delta|$ и с заданной длиной $\ell(\Delta) = d - k$:

$$\phi_k(\lambda) := \sum_{\Delta: \ell(\Delta)=d-k} \varphi_\lambda(\Delta), \quad k = 0, \dots, d - 1. \quad (16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Имеем $\phi_0(\lambda) = 1$, кроме того, существуют два других случая, когда сумма значений нормированных характеров (16) содержит лишь один член.

Во-первых, $\phi_1(\lambda) = \varphi_\lambda(\Gamma)$, $\Gamma = (1^{d-2})$ (при $d > 1$). Заметим, что это соответствует *минимально разветвленному* профилю. Это профиль простой точки ветвления, во многих приложениях такие точки ветвления представляют наибольший интерес [40].

Во-вторых, $\phi_{d-1}(\lambda) = \varphi_\lambda((d))$, что отвечает циклическому профилю, описывающему *максимально разветвленную* точку ветвления. Он играет специальную роль (см. предложение 19).

В дальнейшем мы будем использовать суммы ϕ_k в качестве строительных блоков для получения взвешенных сумм чисел Гурвица (см., например, соотношения (20) и (17), (24) ниже). Тогда указанные в замечании два случая дают не взвешенные суммы, а сами числа Гурвица (см. выражение (П.51) ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Величину $d - \ell(\lambda)$, которая входит в определение (16), мы называем *кодлинной* разбиения λ и обозначаем как $\ell^*(\lambda)$. Эта величина входит в так называемое соотношение Римана–Гурвица, которое соотносит эйлерову характеристику E базовой поверхности и эйлерову характеристику E' ее d -листного накрытия:

$$E' - dE + \sum_i \ell^*(\Delta^{(i)}) = 0,$$

где сумма берется по всем точкам ветвления z_i с соответствующими профилями ветвления Δ^i , $i = 1, 2, \dots$.

Положим $\deg \phi_k(\lambda) = k$. Эта степень равна кодлине профиля ветвления в формуле (16), и в силу замечания 4 она будет важна при определении эйлеровой характеристики накрывающей поверхности в случае параметризации (II.41).

Нам потребуется соотношение

$$s_\lambda(\mathbf{p}(a)) = \frac{\dim \lambda}{d!} a^d \left(1 + \sum_{d>k>0} \phi_k(\lambda) a^{-k} \right), \quad d = |\lambda|,$$

которое представляет собой комбинацию (11) и (13), и его следствие

$$\begin{aligned} (s_\lambda(\mathbf{p}(a)))^c &= \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^c a^{cd} \left(1 + \sum_{m>0} \left(\sum_{d>k>0} \phi_k(\lambda) a^{-k} \right)^m \right)^c = \\ &=: (s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^c a^{cd} \left(1 + \sum_{k>0} \tilde{\phi}_k(\lambda; c) a^{-k} \right), \end{aligned}$$

в котором каждая функция $\tilde{\phi}_k$ построена из набора $\{\phi_i, i > 0\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_k(\lambda; c) &= \sum_{l \geq 1} c(c-1) \dots (c-l+1) \sum_{\substack{\mu: \ell(\mu)=l, \\ |\mu|=k}} \frac{\phi_\mu(\lambda)}{|\text{Aut } \mu|}, \\ \phi_\mu(\lambda) &:= \phi_{\mu_1}(\lambda) \dots \phi_{\mu_l}(\lambda), \end{aligned} \tag{17}$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{l'})$ – разбиение, которое можно записать в виде $\mu = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$ [39], показатель m_i обозначает, сколько раз в разбиении с весом $|\mu| = k$ встречается число i . Таким образом, набор всех отличных от нуля чисел m_{j_a} , $a = 1, \dots, l'$ (при $l' \leq l$), определяет разбиение μ длины $\ell(\mu)$ и веса $|\mu|$,

$$\ell(\mu) = \sum_{a=1}^{l'} m_{j_a} = l, \quad |\mu| = \sum_{a=1}^{l'} j_a m_{j_a} = k.$$

Тогда порядок группы автоморфизмов разбиения μ равен $|\text{Aut } \mu| = m_{j_1}! \dots m_{j_{l'}}!$.

Ясно, что $\tilde{\phi}_k(\lambda; 1) = \phi_k(\lambda)$. Имеем $\deg \tilde{\phi}_k = k$.

1.3. Числа Гурвица. Мы отсылаем читателя к статье [23] за многими деталями, нужными для понимания формул этого пункта; необходимые части упомянутой работы приведены в приложении В.

Введем

$$H_N^{\text{E},k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^k) = \sum_{\substack{\lambda: |\lambda|=d, \\ \ell(\lambda) \leq N}} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{\text{E}} \varphi_\lambda(\Delta^1) \dots \varphi_\lambda(\Delta^k), \tag{18}$$

где Δ^i – разбиение, помеченное номером $i = 1, \dots, k$. Здесь $\dim \lambda$ – это размерность неприводимого представления группы S_d и

$$\varphi_\lambda(\Delta^{(i)}) := |C_{\Delta^{(i)}}| \frac{\chi_\lambda(\Delta^{(i)})}{\dim \lambda}, \quad \dim \lambda := \chi_\lambda((1^d)), \tag{19}$$

где $\chi_\lambda(\Delta)$ – характер симметрической группы S_d , вычисленный на элементе циклового типа Δ , а $|C_\Delta|$ обозначает мощность циклового класса C_Δ в S_d (см. формулу (II.8)). В сумме (18) χ_λ пробегает все неприводимые комплексные характеры S_d (они помечены разбиениями $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$) с весом $d = |\lambda|$. Предполагается, что

$$d = |\lambda| = |\Delta^1| = \dots = |\Delta^k|.$$

Формула характеров Медныха–Поздняковой–Джонса [41], [42] (см. приложение В) утверждает, что при $N \geq d$ число $H_N^{E,k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^k)$ играет роль числа Гурвица, которое дает количество разветвленных d -листных накрытий (базовой) клейновой поверхности с эйлеровой характеристикой E клейновой поверхностью с эйлеровой характеристикой $E' = dE + \sum_{i=1}^k (\ell(\Delta^i) - d)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если мы извлечем числа Гурвица из формулы для отношения функций Шура, как это сделано во многих работах (например, в [22]), то благодаря формуле (18) степень Deg (которая определена в замечании 1) даст эйлерову характеристику E базовой поверхности.

Числа Гурвица–Гулдена–Джексона. Введем суммы чисел Гурвица

$$\begin{aligned} S^{E,k+p}(N; d; \Delta^1, \dots, \Delta^k; l_1^*, \dots, l_p^*) &:= \sum_{\lambda: \substack{|\lambda|=d, \\ \ell(\lambda) \leq N}} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^E \prod_{i=1}^k \varphi_\lambda(\Delta^i) \prod_{i=1}^p \phi_{l_i^*}(\lambda) = \\ &= \sum_{\ell^*(\Delta^{k+1})=l_1^*}^{\Delta^{k+1}} \sum_{\ell^*(\Delta^{k+p})=l_p^*}^{\Delta^{k+p}} H_N^{E,k+p}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{k+p}), \end{aligned} \quad (20)$$

где предполагается, что веса всех разбиений $|\Delta^i|$, $i = 1, \dots, k+p$, одинаковы и равны $d = |\lambda|$. Последняя формула – это сумма чисел Гурвица для базы с эйлеровой характеристикой E при условии, что эйлерова характеристика разветвленного d -листного накрытия равна

$$E' = dE - \sum_{i=1}^k \ell^*(\Delta^i) - \sum_{i=1}^p l_i^*.$$

Число точек ветвления равно $k+p$, причем в k точках ветвления профили ветвлений заданы разбиениями Δ^i , $i = 1, \dots, k$, а в остальных p точках ветвления задана только длина разбиений, равная $d - l_i^*$, $i = 1, \dots, p$.

В рассматриваемых ниже случаях в разделах 2 и 3 параметр N – это размер матриц, и мы можем устремить его к бесконечности. Если это не приведет к путанице, мы будем опускать индекс N у чисел $H_N^{E,k}$.

В работе [35] было показано, что производящая функция

$$\sum_{\Delta} \sum_{l_1^*, \dots, l_p^*=1}^d S^{2,p+1}(d; \Delta; l_1^*, \dots, l_p^*) \mathbf{p}_\Delta \prod_{i=1}^p a_i^{d-l_i^*}$$

является примером тау-функции иерархии КП, более точно – примером гипергеометрической тау-функции иерархии КП [11]:

$$\tau_r^{\text{TL}}(n, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*) = \sum_{\lambda} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}^*) r_\lambda(n), \quad r_\lambda(n) := \prod_{(i,j) \in \lambda} r(n+j-i), \quad (21)$$

где мы положили $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}_\infty$ и $r(x) = \prod_{i=1}^p (x + a_i)$ и где a_i – произвольные комплексные параметры. Произведение в правой части выражения (21) называется произведением содержаний. Важная роль произведения содержаний во многих задачах комбинаторики, связанных с симметрическими группами и числами Гурвица, объяснена в работе [35] (см. также ссылки в этой работе и статью [43]).

В работах [18] и [44] изучались числа Гурвица–Гулдена–Джексона $S^{2,p+2}$, связанные с гипергеометрическими тау-функциями цепочки Тоды [4], [11]. В статье [18] было показано, как можно получать такие числа Гурвица с помощью многоматричных моделей, отличных от предложенных в настоящей работе.

Отметим, что проективные аналоги чисел Гурвица–Гулдена–Джексона $S^{1,p+1}$, а именно числа, для которых базовая поверхность – это вещественная проективная плоскость, были введены в работах [22], [23]. Было показано, что проективные числа Гурвица–Гулдена–Джексона генерируются гипергеометрической тау-функцией иерархии ВКП [45]

$$\tau_r^{\text{ВКП}}(N, n, \mathbf{p}) = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) r_\lambda(n) \quad (22)$$

с тем же r , что и выше. В формуле (22) $N, n, \mathbf{p}$ – набор свободных параметров, называемых высшими временами иерархии ВКП. Примерами произведений содержаний являются символы Похгаммера, присоединенные к диаграммам Юнга λ , и их t -деформированные версии (см. лемму 2):

$$(a)_\lambda = \prod_{(i,j) \in \lambda} (a + j - i) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (a - i + 1)_{\lambda_i}, \quad (q; t)_\lambda = \prod_{(i,j) \in \lambda} (1 - qt^{j-i}). \quad (23)$$

Выпишем также следующие частные случаи произведений содержаний, которые можно выразить через функции Шура:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^k ((a_i + N)_\lambda)^{n_i} \prod_{i=1}^{k'} ((q_i t^{N-1}; t_i)_\lambda)^{\tilde{n}_i} = \\ & = \prod_{i=1}^k \left(\frac{s_\lambda(\mathbf{p}(a_i + N))}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} \right)^{n_i} \prod_{i=1}^{k'} \left(\frac{s_\lambda(\mathbf{p}(q_i t^{N-1}; t_i))}{s_\lambda(\mathbf{p}(0; t_i))} \right)^{\tilde{n}_i}. \end{aligned}$$

Для таких произведений содержаний гипергеометрические тау-функции (21) и (22) выражаются только в терминах функций Шура и, следовательно, в терминах чисел Гурвица и параметров производящей функции (см. статьи [46], [22], [23]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В работе [23] было показано, что не только символы Похгаммера, но и более общие произведения содержаний можно выразить через отношения функций Шура, и поэтому $\text{Deg } \tau_r^{\text{TL}} = 2$ и $\text{Deg } \tau_r^{\text{ВКП}} = 1$.

Обобщенные числа Гурвица. Гипергеометрические ряды. Введем следующие взвешенные суммы чисел Гурвица:

$$\begin{aligned} & G^{\text{E}, k; p} \left(N; d; \Delta^1, \dots, \Delta^k \mid k_1, \dots, k_p \atop n_1, \dots, n_p \right) := \\ & = \sum_{\lambda: \substack{|\lambda| = d, \\ \ell(\lambda) \leq N}} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{\text{E}} \prod_{i=1}^k \varphi_\lambda(\Delta^i) \prod_{i=1}^p \tilde{\phi}_{k_i}(\lambda; n_i). \end{aligned} \quad (24)$$

Для достаточно больших N (точнее, для $N \geq \ell(\lambda)$) это взвешенная сумма чисел Гурвица, равная количеству неэквивалентных d -листных накрытий (базовой) связной клейновой поверхности с эйлеровой характеристикой E (не обязательно связными) клейновыми поверхностями с эйлеровой характеристикой

$$E' = dE - \sum_i \ell^*(\Delta^{(i)}) - \sum_{j=1}^p k_j.$$

Как следует из (17), веса зависят от набора $\{n_j\}$.

Обобщенные числа Гурвица порождаются следующим производящим рядом по степеням переменных $\mathbf{p}^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned} F^{E,k;p} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ n_1, \dots, n_p \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)} \right) = \\ = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} (s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^{E - \sum_{j=1}^p n_j - k} \prod_{j=1}^p (s_\lambda(\mathbf{p}(a_j)))^{n_j} \prod_{i=1}^k s_\lambda(\mathbf{p}^{(i)}). \end{aligned} \quad (25)$$

В этой формуле числа a_i , $i = 1, \dots, p$, считаются независимыми параметрами.

Правая часть формулы (25) может быть переписана с помощью символов Похгаммера как

$$\begin{aligned} F^{E,k;p} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ n_1, \dots, n_p \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)} \right) = \\ = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \left(\frac{\dim \lambda}{|\lambda|!} \right)^{E - \sum_{j=1}^p n_j - k} \prod_{j=1}^p ((a_j)_\lambda)^{n_j} \prod_{i=1}^k s_\lambda(\mathbf{p}^{(i)}). \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что $\text{Deg } F^{E,k;p} = E$ согласно замечанию 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Введенную выше гипергеометрическую функцию можно рассматривать как версию некоторого дискретного β -ансамбля, поскольку сумму по разбиениям можно записать как сумму по конусу $h_1 > \dots > h_N \geq 0$, $h_m = \lambda_m - m + N$, $m = 1, \dots, N$, и затем продолжить выражение под знаком суммы на все попарно различные неотрицательные значения h_m . Для этого, воспользовавшись антисимметричностью функции Шура как функции переменных h_m , $m = 1, \dots, N$ (см. определение (П.2) в приложении), следует заменить сумму по конусу на сумму по всем попарно различным неотрицательным значениям h_m ; при этом возникает множитель $1/N!$. Получим

$$\begin{aligned} F^{E,k;p} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ n_1, \dots, n_p \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)} \right) = \\ = \frac{1}{N!} \sum'_{h_1, \dots, h_N} \prod_{a < b} |h_a - h_b|^\beta \prod_{m=1}^N (h_m!)^{-\beta} e^{-V_{h_m}} e^{-U_{h_m}} \prod_{i=2}^k \Theta_{\{h\}} s_{\{h\}}(\mathbf{p}^{(i)}), \end{aligned}$$

где $\beta = -E + \sum_{j=1}^p n_j + k$, а $\sum'$ означает суммирование по всем неотрицательным попарно различным h_i , $i = 1, \dots, N$. Здесь введены обозначения

$$e^{-V_{h_m}} = \prod_{j=1}^p ((a_j - m + 1)_{\lambda_m})^{n_j}, \quad e^{-U_{h_m}} = s_{(\lambda_m)}(\mathbf{p}^{(i)}), \quad \Theta_{\{h\}} = \text{sign} \prod_{a < b} (h_a - h_b).$$

Далее, пусть

$$p_j^{(i)} = \text{tr } C_i^j = \sum_{m=1}^N e^{j y_m^{(i)}}, \quad i = 1, \dots, k,$$

где C_i – матрицы размера $N \times N$ с собственными значениями $e^{y_j^{(i)}}$, $j = 1, \dots, N$. Тогда

$$\begin{aligned} F^{E,k;p} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ n_1, \dots, n_p \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)} \right) = \\ = \frac{1}{N!} \sum'_{h_1, \dots, h_N} \prod_{a < b}^N \frac{|h_a - h_b|^\beta}{\prod_{i=1}^k (e^{y_a^{(i)}} - e^{y_b^{(i)}})} \prod_{m=1}^N (h_m!)^{-\beta} e^{-V_{h_m}} e^{y_m^{(1)} h_m} \prod_{i=2}^k \Theta_{\{h\}} \det[e^{y_j^{(i)} h_r}]_{j,r \leq N}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Частный случай производящего ряда (26)

$$F^{2,k;p} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ 1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)} \right)$$

рассматривался в работе [18], где он обозначался как $Z_{k,p}(a_1, \dots, a_p | \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)})$. Если $k = 2$ и все a_α суть натуральные числа, то такой ряд является примером гипергеометрической тау-функции цепочки Тоды; в работе [18] он был приведен как статистическая суммы некоторой модели цепочки взаимодействующих матриц.

Другой частный случай

$${}_p F_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)} \right) := F^{2,2;p+q} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \\ 1, \dots, 1, -1, \dots, -1 \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)} \right) \quad (27)$$

есть так называемая гипергеометрическая функция матричного аргумента (случай C) из работы [47] (представление (27) верно, только если все a_i различны, иначе формула более громоздкая). Она является примером тау-функции цепочки Тоды из работы [11], а в контексте чисел Гурвица эта функция рассматривалась в работе [46]. Случай $q = 0$, который соответствует либо производящей функции чисел Гурвица–Гулдена–Джексона (20) при $E = 2$ и $k = 1$, либо ее варианту для цепочки Тоды при $E = 2$ и $k = 2$, представляет особенный интерес, поскольку вместе со своим проективным аналогом

$${}_p \tilde{F}_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| \mathbf{p} \right) := F^{1,1;p+q} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \\ 1, \dots, 1, -1, \dots, -1 \end{matrix} \middle| \mathbf{p} \right), \quad (28)$$

введенным в работах [22], [23], содержит всю информацию о числах Гурвица, которую только можно получить с помощью интегрируемых систем. Матричные модели, связанные с рядом (27), изучались в работах [18], [28]. Мы рассмотрим их ниже (отметим, что все упомянутые матричные модели различны). Матричные модели, порождающие ряды (28), изучались в работах [22], [23], и мы также рассмотрим их ниже. Заметим, что $\text{Deg}_p F_q = 2$ и $\text{Deg}_p \tilde{F}_q = 1$.

Если в предыдущем примере положить $p = 0$, $q = 1$, то мы получим интеграл Хариш-Чандры–Ициксона–Зюбера, который, как известно из работы [48], порождает так называемые монотонные числа Гурвица.

Если в примере (28) положить $p = 1$, $q = 0$, то мы получим асимптотический ряд теории возмущений для двухматричной модели, выписанный в работе [6]. Если дополнительно рассмотреть частный случай $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}_\infty$, то мы придем к производящему ряду для так называемых кривых Белого [21], [19], [49].

ЛЕММА 3. Пусть $k > n$. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} F^{E,k-n;n} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_n \\ 1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(n+1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)} \right) = \\ = F^{E,k;0}(\mathbf{p}^{(1)}(a_1), \dots, \mathbf{p}^{(n)}(a_n), \mathbf{p}^{(n+1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)}). \end{aligned}$$

Из написанного выше вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Имеет место представление

$$\begin{aligned} F^{E,k;p} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ n_1, \dots, n_p \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)} \right) = \\ = \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1, \dots, \Delta^k: \\ |\Delta^1| = \dots = |\Delta^k| = d}} \sum_{k_1, \dots, k_p} G^{E,k;p} \left(N; d; \Delta^1, \dots, \Delta^k \middle| \begin{matrix} k_1, \dots, k_p \\ n_1, \dots, n_p \end{matrix} \right) \prod_{j=1}^p a_j^{dn_j - k_j} \prod_{i=1}^k \mathbf{p}_{\Delta^i}^{(i)}. \end{aligned}$$

Все приведенные ниже матричные интегралы дают ряды теории возмущений, которые являются примерами гипергеометрических функций, порождающих числа Гурвица (18), (20) и (24).

2. ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ

Для простоты мы работаем только с квадратными $(N \times N)$ -матрицами, хотя многие результаты можно обобщить и на прямоугольные матрицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Рассматриваемые в настоящей работе интегралы содержат набор произвольных параметров, которые обозначены как $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$. Это важный момент. Существуют области значений этих параметров, в которых рассматриваемые интегралы сходятся. Чтобы это увидеть, можно выбрать $p_i = -\sum_{k=1}^L y_i^k$, где y_i – свободные параметры, $i = 1, 2, \dots$. Тогда при любом L ряд по функциям Шура превращается в полином, поскольку $s_\lambda(\mathbf{p}) = 0$ для $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, если $\lambda_1 > L$, как это следует из сравнения формулы (6) и формулы (П.3) из приложения. С другой стороны, как мы увидим далее, суммы по разбиениям ограничены по длине разбиений: $\ell(\lambda) \leq N$ (см. условие (6)).

Во всех интегралах этого раздела мера интегрирования задана как

$$d\Omega = \prod_{\alpha=1}^n d\mu(Z_\alpha).$$

Ниже мы рассматриваем интегралы, которые можно интерпретировать как математические ожидания в составном ансамбле, состоящем из N независимых ансамблей Жинибра.

2.1. Четная эйлерова характеристика базы. Комплексные матрицы.

В этом пункте мы рассматриваем простейшие примеры обобщенных гипергеометрических функций (25).

Эйлерова характеристика $E = 2$ и $n + 2$ точек ветвления. Рассмотрим интеграл от произведения двух простейших тау-функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Справедлива формула*

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(Z, \mathbf{p}) \tau_1^{\text{TL}}(Z^*, \mathbf{p}^*) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}^*) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{n+2}: \\ |\Delta^{n+2}|=d}} H_N^{2,n+2}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{n+2}) \prod_{\alpha=1}^{n+2} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\mathbf{p}^{(\alpha)} = (p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)}, \dots)$ для $\alpha = 1, \dots, n + 2$, $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}^{(n+2)} = \mathbf{p}^*$, и мы положили $p_m^{(\alpha)} = \text{tr}(C_\alpha)^m$ для $\alpha = 1, \dots, n$.

Правая часть в соотношении (29) есть гипергеометрический ряд $F^{2,n+2;0}$ (обозначенный как $Z_{n+2,0}$ в работе [18]).

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Применим сначала равенство (10), а затем n раз равенство (9), каждый раз получаем множитель $s_\lambda(C_i)/s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)$, $i = 1, \dots, n$. Степень подынтегрального выражения $\text{Deg} = 4$ (см. замечание 6), поэтому с учетом замечания 1 эйлерова характеристика всего выражения $E = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n$, мы получаем*

$$\int e^{V(\mathbf{p}, Z) + V(\mathbf{p}^*, Z^\dagger)} d\Omega = \sum_{\lambda} ((N)_\lambda)^n s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}^*). \quad (30)$$

Правая часть равенства (30) является примером гипергеометрической тау-функции цепочки Тоды [11] (в наших обозначениях это функция $F^{2,2;n}$; см. лемму 3). Заметим, что эта тау-функция была также получена в работе [18] из другой многоматричной модели: цепочки эрмитовых матриц.

Теперь рассмотрим интеграл от одной простейшей тау-функции.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *В обозначениях утверждения 2 имеем*

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(ZZ^*, \mathbf{p}) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}_\infty) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{n+1}: \\ |\Delta^{n+1}|=d}} H_N^{2,n+1}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{n+1}) \prod_{\alpha=1}^{n+1} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (31)$$

В случае $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n - 1$, сумма в правой части (31) является тау-функцией цепочки Тоды, в которой наборы $\mathbf{p}^{(n)}$ и $\mathbf{p}^{(n+1)}$ играют роль высших времен. Заметим, что правая часть равенства (31) есть $F^{2,n+1;0}$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Применяем соотношение (9) n раз, зарабатывая каждый раз множитель $s_\lambda(C_i)/s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)$, $i = 1, \dots, n$. Степень подынтегрального выражения $\text{Deg} = 2$ (см. замечание 6), поэтому в силу замечания 1 эйлерова характеристика накрываемой поверхности $E = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n$, мы получаем

$$\int e^{V(\mathbf{p}, \mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger)} d\Omega = \sum_{\lambda} ((N)_\lambda)^n s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}_\infty). \quad (32)$$

Интеграл в правой части равенства (32) рассматривался в работе [28], где для его исследования была развита техника фейнмановских графов и где было найдено соотношение, связывающее ряды Фейнмана и числа Гурвица. В этом случае интеграл равен $F^{2,2;n-1}$ (см. лемму 3).

Заменим простейшую тау-функцию τ_1 на гипергеометрическую тау-функцию τ_r из формулы (21).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \int \tau_r^{\text{TL}}(\mathbf{Z}, \mathbf{p}) \tau_1^{\text{TL}}(\mathbf{Z}^*, \mathbf{p}^*) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} r_\lambda(n) s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}^*) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)}, \\ \int \tau_r^{\text{TL}}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*, \mathbf{p}) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} r_\lambda(n) s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}_\infty) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)}. \end{aligned} \quad (33)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Результаты работы [23], описывающие произведение содержаний r_λ , позволяют интерпретировать ряды (33) как производящие функции различных взвешенных сумм чисел Гурвица, при этом веса задаются выбором функции r . Как следствие замечания 6, замена $\tau_1 \rightarrow \tau_r$ не меняет эйлеровой характеристики накрываемой поверхности (сферы Римана в случаях (33)).

ПРИМЕР 1. Пусть

$$r(x) = \frac{\prod_{i=1}^p (a_i + x)}{\prod_{i=1}^q (b_i + x)}. \quad (34)$$

Тогда для предложения 2 мы получаем

$$\int \tau_r^{\text{TL}}(\mathbf{Z}, \mathbf{p}) \tau_1^{\text{TL}}(\mathbf{Z}^*, \mathbf{p}^*) d\Omega = F^{2,n+2;p+q} \left(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \left| \begin{matrix} \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(n+2)} \\ 1, \dots, 1, -1, \dots, -1 \end{matrix} \right. \right),$$

а для предложения 3

$$\int \tau_r^{\text{TL}}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*, \mathbf{p}) d\Omega = F^{2,n+1;p+q} \left(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \left| \begin{matrix} \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(n+1)} \\ 1, \dots, 1, -1, \dots, -1 \end{matrix} \right. \right).$$

Далее мы сделаем замену $\mathbf{Z}^* \rightarrow \mathbf{Z}^{(t)}$ с $t > 0$ и получим другие ряды, которые порождают числа Гурвица, описывающие накрытия с иными эйлеровыми характеристиками базовой поверхности.

Эйлерова характеристика $E < 2$. В предыдущем примере мы в основном использовали соотношение (9). Но если мы изменим порядок сомножителей в произведении матриц и вместо (2) возьмем (3) при $t = n$, то в основном нам придется использовать равенство (10). С учетом замечаний 5 и 1 это дает производящие функции для совершенно других чисел Гурвица.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $t = 2k \geq 2$. Положим

$$C_{\text{odd}} = C_1 C_3 \dots C_{2k-1}, \quad C_{\text{even}} = C_2 C_4 \dots C_{2k}. \quad (35)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int \tau_1^{\text{TL}}(Z, \mathbf{p}^{(1)}) \tau_1^{\text{TL}}(Z^{(t)}, \mathbf{p}^{(2)}) d\Omega = \\ &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{4-2k} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(\mathbf{p}^{(2)}) s_\lambda(C_{\text{odd}}) s_\lambda(C_{\text{even}})}{(s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^4} \prod_{\alpha=t+1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \dots \sum_{\substack{\Delta^{4+n-2k}: \\ |\Delta^{4+n-2k}|=d}} H_N^{4-2k, 4+n-2k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{4+n-2k}) \prod_{\alpha=1}^{4+n-2k} p_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \quad (36) \end{aligned}$$

где $p_m^{(3)} = \text{tr}(C_{\text{odd}})^m$, $p_m^{(4)} = \text{tr}(C_{\text{even}})^m$ и $p_m^{(\alpha)} = \text{tr} C_{\alpha-4+2k}^m$ для $\alpha = 5, \dots, 4+n-2k$ (здесь и далее подразумевается, что произведение $\prod_{\alpha=t+1}^n$ обращается в единицу при $t = n$).

2. Пусть $t = 2k - 1$ и теперь

$$C_{\text{odd}} = C_1 C_3 \dots C_{2k-1}, \quad C_{\text{even}} = C_2 C_4 \dots C_{2k-2}. \quad (37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int \tau_1^{\text{TL}}(Z, \mathbf{p}^{(1)}) \tau_1^{\text{TL}}(Z^{(t)}, \mathbf{p}^{(2)}) d\Omega = \\ &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{4-2k} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(\mathbf{p}^{(2)}) s_\lambda(C_{\text{odd}} C_{\text{even}})}{(s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^3} \prod_{\alpha=t+1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \dots \sum_{\substack{\Delta^{4+n-2k}: \\ |\Delta^{4+n-2k}|=d}} H_N^{4-2k, 4+n-2k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{4+n-2k}) \prod_{\alpha=1}^{4+n-2k} p_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \quad (38) \end{aligned}$$

где $p_m^{(3)} = \text{tr}(C_{\text{odd}} C_{\text{even}})^m$ и $p_m^{(\alpha)} = \text{tr} C_{\alpha-4+2k}^m$ для $\alpha = 4, \dots, 4+n-2k$.

Правые части равенств (36) и (38) равны $F^{4-t, 4+n-t; 0}$ и $F^{4-t-1, 3+n-t; 0}$ соответственно.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Применим k раз формулу (10). Степень подынтегрального выражения $\text{Deg} = 4$, поэтому вследствие замечания 1 эйлерова характеристика накрываемой поверхности $E = 4 - 2k$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. 1. Пусть $t = 2k \geq 2$ и C_{odd} и C_{even} заданы в (35). Тогда

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(\text{ZZ}^{(t)}, \mathbf{p}) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{4-2k} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(C_{\text{odd}}) s_\lambda(C_{\text{even}})}{(s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^3} \prod_{\alpha=t+1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{3+n-2k}: \\ |\Delta^{3+n-2k}|=d}} H_N^{4-2k, 3+n-2k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{3+n-2k}) \prod_{\alpha=1}^{3+n-2k} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}$ и мы положили $p_m^{(2)} = \text{tr}(C_{\text{odd}})^m$, $p_m^{(3)} = \text{tr}(C_{\text{even}})^m$ и $p_m^{(\alpha)} = \text{tr} C_{\alpha-3+2k}^m$ для $\alpha = 4, \dots, 3+n-2k$.

2. Пусть $t = 2k - 1 \geq 1$ и теперь C_{odd} и C_{even} заданы в (37). Тогда

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(\text{ZZ}^{(t)}, \mathbf{p}) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{4-2k} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(C_{\text{odd}} C_{\text{even}})}{(s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^2} \prod_{\alpha=t+1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{3+n-2k}: \\ |\Delta^{3+n-2k}|=d}} H_N^{4-2k, 3+n-2k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{3+n-2k}) \prod_{\alpha=1}^{3+n-2k} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}$ и $p_m^{(2)} = \text{tr}(C_{\text{odd}} C_{\text{even}})^m$, $p_m^{(\alpha)} = \text{tr} C_{\alpha-3+2k}^m$ для $\alpha = 3, \dots, 3+n-2k$.

Наконец, рассмотрим интеграл, который может быть интересен в контексте задач квантового хаоса [30].

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть

$$Z' = (Z_1 C_1 Z_1^\dagger A_{12}) \dots (Z_n C_n Z_n^\dagger A_{n1}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(Z', \mathbf{p}) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(A_{12} \cdots A_{n1}) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{n+2}: \\ |\Delta^{n+2}|=d}} H_N^{2, n+2}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{n+2}) \prod_{\alpha=1}^{n+2} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \quad (39) \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}^{(\alpha)} = (p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)}, \dots)$ для $\alpha = 1, \dots, n+2$, $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}$ и $p_m^{(\alpha)} = \text{tr}(C_\alpha)^m$ для $\alpha = 1, \dots, n$, а $p_m^{(n+2)} = \text{tr}(A_{12} \cdots A_{n1})^m$.

Отметим, что правая часть в формуле (39) совпадает с производящим рядом, который в работе [18] обозначен как $Z_{n+2,0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Если ввести $Z^\sigma = Z_{\sigma(n)}^\dagger Z_{\sigma(n-1)}^\dagger \cdots Z_{\sigma(1)}^\dagger$, где $\sigma \in S_n$, то интеграл от $\tau_1(\text{ZZ}^\sigma)$ – это производящая функция чисел Гурвица, которая будет выписана в следующей работе. Отметим, что такому интегралу можно сопоставить хордовую диаграмму, $2n$ вершин которой пронумерованы последовательностью чисел $1, 2, \dots, n, \sigma(n), \sigma(n-1), \dots, \sigma(1)$, и вершины с одинаковыми номерами соединены хордами. Хорды отвечают спариванию матриц $(Z_\alpha, Z_\alpha^\dagger)$, $\alpha = 1, \dots, n$, по правилам, заданным уравнениями (9) и (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Здесь и ниже можно заменить простейшую тау-функцию τ_1 гипергеометрической тау-функцией τ_r и таким образом получить производящие функции для более общих взвешенных сумм чисел Гурвица, в которых веса определяются выбором функции r .

2.2. Нечетные эйлеровы характеристики базы. Комплексные матрицы.

В этом пункте мы представим производящие функции для чисел Гурвица, описывающих накрытия клейновых поверхностей.

Эйлерова характеристика $E = 1$ и $n + 1$ точек ветвления.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Имеет место следующее равенство:*

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(Z, \mathbf{p}) \tau_1^{\text{BKP}}(Z^*) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{n+1}: \\ |\Delta^{n+1}|=d}} H_N^{1,n+1}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{n+1}) \prod_{\alpha=1}^{n+1} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}^{(\alpha)} = (p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)}, \dots)$ для $\alpha = 1, \dots, n + 2$, $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}$ и $p_m^{(\alpha)} = \text{tr}(C_\alpha)^m$ для $\alpha = 1, \dots, n$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n$, мы получаем

$$\int e^{V(\mathbf{p}, Z)} \tau_1^{\text{BKP}}(Z^*) d\Omega = \sum_{\lambda} ((N)_\lambda)^n s_\lambda(\mathbf{p}).$$

Правая часть последнего равенства является примером гипергеометрической тау-функции иерархии ВКП [45].

ЗАМЕЧАНИЕ 13. В обозначениях предложения 2 имеем формальное равенство (понимаемое как почленное равенство, если подынтегральное выражение разлагать по функциям Шура)

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{BKP}}(ZZ^*) d\Omega &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}_\infty) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{n+1}: \\ |\Delta^{n+1}|=d}} H_N^{2,n+1}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{n+1}) \prod_{\alpha=1}^{n+1} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (40)$$

В этом случае у нас нет свободных параметров $\mathbf{p}$, как в других интегралах (см. замечание 9), и мы не можем оборвать ряд, выбрав специальным образом эти параметры. При $n = 1$ правая часть (40) совпадает с известным выражением для суммы функций Шура [39]. При $n > 1$ правая часть (40) есть тау-функция иерархии ВКП в случае $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n - 1$, и тогда $\mathbf{p}^{(n)}$ – высшие времена иерархии.

Далее, как и в предыдущем случае тау-функций иерархии цепочки Тоды, мы произведем замену $Z^* \rightarrow Z^{(t)}$ и получим другие ряды, которые порождают числа Гурвица с иной эйлеровой характеристикой базовой поверхности.

Эйлерова характеристика $E < 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. 1. Пусть $t = 2k \geq 2$ и C_{odd} и C_{even} заданы в (35). Тогда

$$\begin{aligned} & \int \tau_1^{\text{TL}}(Z, \mathbf{p}^{(1)}) \tau_1^{\text{BKP}}(Z^{(t)}) d\Omega = \\ & = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{3-2k} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(C_{\text{odd}}) s_\lambda(C_{\text{even}})}{(s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^3} \prod_{\alpha=t+1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ & = \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{3+n-2k}: \\ |\Delta^{3+n-2k}|=d}} H_N^{3-2k, 3+n-2k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{3+n-2k}) \prod_{\alpha=1}^{3+n-2k} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

где $p_m^{(2)} = \text{tr}(C_{\text{odd}})^m$, $p_m^{(3)} = \text{tr}(C_{\text{even}})^m$ и $p_m^{(\alpha)} = \text{tr} C_{\alpha-3+2k}^m$ для $\alpha = 4, \dots, 3+n-2k$.

2. Пусть $n = 2k - 1$ и теперь C_{odd} и C_{even} заданы в (37). В этом случае

$$\begin{aligned} & \int \tau_1^{\text{TL}}(Z, \mathbf{p}^{(1)}) \tau_1^{\text{BKP}}(Z^{(t)}) d\Omega = \\ & = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{3-2k} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(C_{\text{odd}} C_{\text{even}})}{(s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^2} \prod_{\alpha=t+1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ & = \sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1: \\ |\Delta^1|=d}} \cdots \sum_{\substack{\Delta^{3+n-2k}: \\ |\Delta^{3+n-2k}|=d}} H_N^{3-2k, 3+n-2k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{3+n-2k}) \prod_{\alpha=1}^{3+n-2k} \mathbf{p}_{\Delta^\alpha}^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

где $p_m^{(2)} = \text{tr}(C_{\text{odd}} C_{\text{even}})^m$ и $p_m^{(\alpha)} = \text{tr} C_{\alpha-3+2k}^m$ для $\alpha = 3, \dots, 3+n-2k$.

Правые части формул (36) и (38) равны $F^{3-t, 3+n-t; 0}$ и $F^{2-t, 2+n-t; 0}$ соответственно.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Применим k раз формулу (10). Степень подынтегрального выражения $\text{Deg} = 3$ (см. замечание 6), поэтому благодаря замечанию 1 эйлерова характеристика накрываемой поверхности $E = 3 - 2k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Замена

$$d\Omega \rightarrow d\Omega(a_1, \dots, a_k) = \prod_{i=1}^k \det(Z_\alpha Z_\alpha^\dagger)^{a_i} d\mu(Z_i)$$

приводит к добавлению множителя $\prod_{\alpha=1}^n (a_i + N)_\lambda$ к каждому члену в сумме по разбиениям λ (подробности см. в п. Г.2). Можно сравнить такие вставки с формулами из работы [30] и также с результатами для другой матричной модели – модели цепочек взаимодействующих матриц [18].

2.3. Представление правой части равенства (30) в форме фермионного вакуумного среднего. Каждая гипергеометрическая тау-функция как в случае иерархии КП, так и в случае иерархии ВКП может быть представлена в виде фермионного вакуумного среднего. Покажем это на примере формулы (30).

Двухкомпонентные фермионные поля мы обозначаем как $\psi^{(i)}$ и $\psi^{\dagger(i)}$, $i = 1, 2$. Пусть $|0, 0\rangle$ – правый вакуумный вектор, левый вакуумный вектор $\langle N, -N|$ имеет разные уровни моря Дирака: N для первой компоненты и $-N$ для второй (подробности см. в приложении Г).

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} ((N)_{\lambda})^n s_{\lambda}(\mathbf{p}) s_{\lambda}(\mathbf{p}^*) &= \\ &= \int \prod_{N \geq i > j \geq 1} |z_i - z_j|^2 \prod_{i=1}^N e^{V(t, z_i) + V(\mathbf{p}^*, \bar{z}_i)} w(n, |z_i|) d^2 z_i = \\ &= \langle N, -N | \Gamma^{(1)}(\mathbf{p}) \Gamma^{(2)}(\mathbf{p}^*) g | 0, 0 \rangle, \end{aligned}$$

$2de^{1)}$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(\alpha)}(\mathbf{p}) &= \exp \sum_{m>0} p_m J_m^{(\alpha)}, \quad J_m^{(\alpha)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k^{(\alpha)} \psi_{k+m}^{\dagger(\alpha)}, \\ g &= \exp \int \psi^{(1)}(z) \psi^{\dagger(2)}(\bar{z}) w(n, |z|) d^2 z \end{aligned}$$

u

$$w(n, z) = \int (\Gamma(s))^n |z|^{-2s} ds. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соотношением

$$\int |z|^{2k} w(n, |z|) d^2 z = r(1) \dots r(k).$$

Надо проверить, что если выбрать $w(n, |z|)$ в виде (41), то $r(x) = x^n$. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} (\Gamma(s))^n |z|^{2k-2s} d^2 z ds &= \int_{\gamma_k} (\Gamma(s+k))^n |z|^{-2s} d^2 z ds = \\ &= 1^n 2^n \dots k^n \int_{\gamma_0} (\Gamma(s))^n |z|^{-2s} d^2 z ds, \end{aligned}$$

где контур γ_0 в комплексной s -плоскости – это прямая $(-i\infty + 1/2, +i\infty + 1/2)$, а контур $\gamma_k = (-i\infty + k/2, +i\infty - k/2)$. Далее достаточно использовать известную формулу $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin \pi s$.

Больше деталей можно найти в приложении Г.

3. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ УНИТАРНЫХ МАТРИЦ

Теперь рассмотрим такие произведения:

$$U := (U_1 C_1) \dots (U_n C_n), \quad (42)$$

$$U^* := U_n^\dagger \dots U_1^\dagger, \quad (43)$$

$$U^{(t)} := U_n^\dagger \dots U_n^\dagger, \quad t \leq n, \quad (44)$$

где $U_\alpha^\dagger \in U(N)$. Матрицу $U^{(t)}$ можно получить действием $[t/2]$ транспозиций на U^* . Положим $U^{(0)} = U^*$ и $U^{(n)} = U_1^\dagger \dots U_n^\dagger$.

¹⁾Здесь $\Gamma(s)$ – это гамма-функция (не путайте с $\Gamma^{(\alpha)}$ выше).

Мы используем тау-функции $\tau_1^{\text{TL}}(X, \mathbf{p})$ и $\tau_1^{\text{BKP}}(X)$, введенные формулами (4), (5) и обозначаем как d_*U меру Хаара на унитарной группе (для явного выражения см. формулу (II.6) в приложении). Напомним также, что

$$s_\lambda(\mathbb{I}_N) = (N)_\lambda s_\lambda(\mathbf{p}_\infty) = \frac{\dim \lambda}{|\lambda|!} (N)_\lambda.$$

Почти все результаты, касающиеся интегралов от унитарных матриц, можно получить из результатов для комплексных матриц из предыдущего раздела с помощью замены $s_\lambda(\mathbf{p}_\infty) \rightarrow s_\lambda(\mathbb{I}_N)$, которая вытекает из замены соотношений (9), (10) на соотношения (7), (8).

Для упрощения формул мы рассмотрим только два частных случая $t = 0$ и $t = n$.

3.1. Четная эйлерова характеристика. Унитарные матрицы.

Эйлерова характеристика $E = 2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(U, \mathbf{p}) \tau_1^{\text{TL}}(U^*, \mathbf{p}^*) \prod_{\alpha=1}^n d_*U_\alpha &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}^*) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)} = \\ &= F^{2, n+2; 1} \left(\begin{matrix} N \\ -n \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(n+2)} \right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}^{(\alpha)} = (p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)}, \dots)$ для $\alpha = 1, \dots, n+2$, $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}$ и $p_m^{(\alpha)} = \text{tr}(C_\alpha)^m$ для $\alpha = 1, \dots, n$.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n$, мы получаем*

$$\int e^{V(\mathbf{p}, U) + V(\mathbf{p}^*, U^\dagger)} \prod_{\alpha=1}^n d_*U_\alpha = \sum_{\lambda} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}^*),$$

и это выражение не зависит от n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *В обозначениях предложения 11 имеем*

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(UU^*, \mathbf{p}) \prod_{\alpha=1}^n d_*U_\alpha &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbb{I}_N) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)} = \\ &= F^{2, n+1; 1} \left(\begin{matrix} N \\ 1-n \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Сумма в последнем выражении является тау-функцией цепочки Тоды, если взять $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n-1$, при этом $\mathbf{p}^{(n)}$ и $\mathbf{p}^{(n+1)}$ играют роль высших времен.

В качестве следующего шага произведем замену $U^* \rightarrow U^{(n)}$ и получим другой ряд, порождающий числа Гурвица с иной эйлеровой характеристикой базовой поверхности.

Эйлерова характеристика $E = 4 - 2k$. Замена $U^* \rightarrow \tilde{U}^*$ приводит к результатам, сходным со случаем комплексных матриц в разделе 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. 1. Если $n = 2k \geq 2$, то

$$\begin{aligned} & \int \tau_1^{\text{TL}}(U, \mathbf{p}^{(1)}) \tau_1^{\text{TL}}(U^{(n)}, \mathbf{p}^{(2)}) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha = \\ & = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(\mathbf{p}^{(2)}) s_\lambda(C_1 C_3 \dots C_{2k-1}) s_\lambda(C_2 C_4 \dots C_{2k}) (s_\lambda(\mathbb{I}_N))^{-2k} = \\ & = F^{4-2k, 4; 1} \left(\begin{matrix} N \\ -2k \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(4)} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } p_m^{(3)} = \text{tr}(C_1 C_3 \dots C_{2k-1})^m, p_m^{(4)} = \text{tr}(C_2 C_4 \dots C_{2k})^m.$$

2. Если $n = 2k - 1$, то

$$\begin{aligned} & \int \tau_1^{\text{TL}}(U, \mathbf{p}^{(1)}) \tau_1^{\text{TL}}(U^{(n)}, \mathbf{p}^{(2)}) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha = \\ & = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(\mathbf{p}^{(2)}) s_\lambda(C_1 C_3 \dots C_{2k-1} C_2 C_4 \dots C_{2k-2}) (s_\lambda(\mathbb{I}_N))^{1-2k} = \\ & = F^{4-2k, 3; 1} \left(\begin{matrix} N \\ 1 - 2k \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } p_m^{(3)} = \text{tr}(C_1 C_3 \dots C_{2k-1} C_2 C_4 \dots C_{2k-2})^m.$$

Также имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. 1. Если $n = 2k \geq 2$, то

$$\begin{aligned} & \int \tau_1^{\text{TL}}(UU^{(n)}, \mathbf{p}) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha = \\ & = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(C_1 C_3 \dots C_{2k-1}) s_\lambda(C_2 C_4 \dots C_{2k}) (s_\lambda(\mathbb{I}_N))^{1-2k} = \\ & = F^{4-2k, 3; 1} \left(\begin{matrix} N \\ 1 - 2k \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p} \text{ и } p_m^{(2)} = \text{tr}(C_1 C_3 \dots C_{2k-1})^m, p_m^{(3)} = \text{tr}(C_2 C_4 \dots C_{2k})^m.$$

2. Если $n = 2k - 1 \geq 1$, то

$$\begin{aligned} & \int \tau_1^{\text{TL}}(UU^{(n)}, \mathbf{p}) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha = \\ & = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(C_1 C_3 \dots C_{2k-1} C_2 C_4 \dots C_{2k-2}) (s_\lambda(\mathbb{I}_N))^{2-2k} = \\ & = F^{4-2k, 2; 1} \left(\begin{matrix} N \\ 2 - 2k \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p} \text{ и } p_m^{(2)} = \text{tr}(C_1 C_3 \dots C_{2k-1} C_2 C_4 \dots C_{2k-2})^m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Если мы заменим матрицу U^* из формулы (43) на произведение $U_{\sigma(n)}^\dagger U_{\sigma(n-1)}^\dagger \dots U_{\sigma(1)}^\dagger$, то получим другую эйлерову характеристику E , которая задается перестановкой $\sigma \in S_n$. При замене матрицы $U^{(n)}$ на $U^{(t)}$ получим $E = 2 - 2[t/2]$.

3.2. Нечетная эйлерова характеристика базы. Унитарные матрицы.

В этом пункте мы представляем производящие функции чисел Гурвица клейновых поверхностей.

Эйлерова характеристика $E = 1$ и $n + 1$ точек ветвления.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(U, \mathbf{p}) \tau_1^{\text{BKP}}(U^*) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)} = \\ &= F^{1, n+1; 1} \left(\begin{matrix} N \\ -n \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(n+1)} \right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}^{(\alpha)} = (p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)}, \dots)$ для $\alpha = 1, \dots, n+1$, $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}$ и мы взяли $p_m^{(\alpha)} = \text{tr}(C_\alpha)^m$ для $\alpha = 1, \dots, n$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n$, мы получаем*

$$\int e^{V(\mathbf{p}, U)} \tau_1^{\text{BKP}}(U^*) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha = \sum_{\lambda} ((N)_\lambda)^n s_\lambda(\mathbf{p}).$$

Правая часть этого равенства является примером гипергеометрической тау-функции иерархии ВКП [45].

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *В обозначениях предложения 15 имеем равенство*

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{BKP}}(UU^*) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} s_\lambda(\mathbb{I}_N) \prod_{\alpha=1}^n \frac{s_\lambda(C_\alpha)}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)} = \\ &= F^{1, n; 1} \left(\begin{matrix} N \\ 1 - n \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(n)} \right). \end{aligned}$$

Сумма в правой части есть гипергеометрическая тау-функция иерархии ВКП, если взять $C_\alpha = \mathbb{I}_N$, $\alpha = 1, \dots, n-1$; при этом набор $\mathbf{p}^{(n)}$ играет роль высших времен иерархии.

Далее мы производим замену $U^* \rightarrow U^{(n)}$ и получаем ряд, который порождает числа Гурвица с иной эйлеровой характеристикой базовой поверхности.

Эйлерова характеристика $E = 3 - 2k$, две и три точки ветвления.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. 1. *Если $n = 2k \geq 2$, то*

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(U, \mathbf{p}^{(1)}) \tau_1^{\text{BKP}}(U^{(n)}) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha &= \\ &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(C_1 C_3 \dots C_{2k-1}) s_\lambda(C_2 C_4 \dots C_{2k})}{(s_\lambda(\mathbb{I}_N))^3} (s_\lambda(\mathbb{I}_N))^{3-2k} = \\ &= F^{3-2k, 3; 1} \left(\begin{matrix} N \\ -2k \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)} \right), \end{aligned}$$

где $p_m^{(2)} = \text{tr}(C_1 C_3 \dots C_{2k-1})^m$, $p_m^{(3)} = \text{tr}(C_2 C_4 \dots C_{2k})^m$.

2. Если $n = 2k - 1$, то

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{TL}}(U, \mathbf{p}^{(1)}) \tau_1^{\text{BKP}}(U^{(n)}) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha &= \\ &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(C_1 C_3 \dots C_{2k-1} C_2 C_4 \dots C_{2k-2})}{(s_\lambda(\mathbb{I}_N))^2} (s_\lambda(\mathbb{I}_N))^{3-2k} = \\ &= F^{3-2k, 2; 1} \left(\begin{matrix} N \\ 1 - 2k \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)} \right), \end{aligned}$$

где $p_m^{(2)} = \text{tr}(C_1 C_3 \dots C_{2k-1} C_2 C_4 \dots C_{2k-2})^m$.

Кроме того, мы имеем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. 1. Если $n = 2k \geq 2$, то

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{BKP}}(UU^{(n)}) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \frac{s_\lambda(C_1 C_3 \dots C_{2k-1}) s_\lambda(C_2 C_4 \dots C_{2k})}{(s_\lambda(\mathbb{I}_N))^2} (s_\lambda(\mathbb{I}_N))^{3-2k} = \\ &= F^{3-2k, 2; 1} \left(\begin{matrix} N \\ 1 - 2k \end{matrix} \middle| \mathbf{p}^{(1)} \mathbf{p}^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

где $p_m^{(1)} = \text{tr}(C_1 C_3 \dots C_{2k-1})^m$, $p_m^{(2)} = \text{tr}(C_2 C_4 \dots C_{2k})^m$.

2. Если $n = 2k - 1 \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \int \tau_1^{\text{BKP}}(UU^{(n)}) \prod_{\alpha=1}^n d_* U_\alpha &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \frac{s_\lambda(C_1 C_3 \dots C_{2k-1} C_2 C_4 \dots C_{2k-2})}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)} (s_\lambda(\mathbb{I}_N))^{3-2k} = \\ &= F^{3-2k, 1; 1} \left(\begin{matrix} N \\ 2 - 2k \end{matrix} \middle| \mathbf{p} \right), \end{aligned} \quad (46)$$

где $p_m = \text{tr}(C_1 C_3 \dots C_{2k-1} C_2 C_4 \dots C_{2k-2})^m$.

Правые части равенств (45) и (46) равны $F^{3-2k, 2; 0}$ и $F^{3-2k, 1; 0}$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Если мы заменим произведение матриц U^* из формулы (43) на произведение $U_{\sigma(n)}^\dagger U_{\sigma(n-1)}^\dagger \dots U_{\sigma(1)}^\dagger$, то получим другую эйлерову характеристику E , которая определяется перестановкой $\sigma \in S_n$. При замене матрицы $U^{(n)}$ на $U^{(t)}$ получим $E = 1 - 2[t/2]$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В представленной работе мы рассмотрели матричные модели определенного типа: интегралы от гипергеометрических тау-функций; при этом аргументом тау-функций является произведение матриц. Главным образом мы изучали интегралы от простейших (“вакуумных”) тау-функций, но объяснили, как наши рассуждения можно обобщить на любые гипергеометрические тау-функции (см. замечание 10 и пример 1, а также соотношение (34)). Рассмотрены тау-функции двух иерархий: цепочки Тоды (в частности, иерархии КП) и иерархии ВКП (Каца–ван де Лера). Мы показали,

что такие интегралы порождают числа Гурвица в задаче накрытия римановых или клейновых поверхностей с разными эйлеровыми характеристиками. Эйлерова характеристика определяется порядком сомножителей в произведении матриц. Сами интегралы в общем случае не являются тау-функциями (и заведомо не являются ими при неположительных эйлеровых характеристиках E накрываемой поверхности), однако можно надеяться, что они наследуют некоторые свойства симметрии тау-функций. Мы использовали лишь произведения комплексных и унитарных матриц, но было бы интересно найти другие примеры.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Разбиения и функции Шура

Напомним, что характеры унитарной группы $U(N)$ индексируются разбиениями и совпадают с функциями Шура [39]. Разбиением $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ называется набор неотрицательных целых чисел λ_i , которые называются частями разбиения λ и которые упорядочены следующим образом: $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Число ненулевых частей разбиения λ называется длиной разбиения и обозначается как $\ell(\lambda)$. Число $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ называется весом разбиения λ . Совокупность всех разбиений будем обозначать как $\mathbb{P}$.

Функция Шура для разбиения λ в случае $\ell(\lambda) \leq N$ может быть определена как следующая функция переменных $x = (x_1, \dots, x_N)$:

$$s_\lambda(x) = \frac{\det[x_j^{\lambda_i - i + N}]_{i,j}}{\det[x_j^{-i + N}]_{i,j}}. \quad (\text{П.1})$$

Если условие $\ell(\lambda) \leq N$ не выполнено, полагают $s_\lambda(x) = 0$. Как можно видеть, $s_\lambda(x)$ есть симметричный однородный полином степени $|\lambda|$ от $x_1, \dots, x_N$ и $\deg x_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Если x – набор собственных значений матрицы X , вместо $s_\lambda(x)$ мы пишем $s_\lambda(X)$.

Существует еще одно определение функции Шура как квазиоднородного несимметричного полинома степени $|\lambda|$ от других переменных $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$, которые называются степенными суммами (здесь $\deg p_m = m$). Введем обозначение

$$s_{\{h\}}(\mathbf{p}) = \det[s_{(h_i + j - N)}(\mathbf{p})]_{i,j},$$

где $\{h\}$ означает любой набор из N попарно различных неотрицательных целых чисел, и где функции Шура $s_{(i)}$ на разбиении длины единица определены с помощью формулы

$$\exp\left\{\sum_{m>0} \frac{1}{m} p_m z^m\right\} = \sum_{m \geq 0} s_{(i)}(\mathbf{p}) z^i.$$

Тогда, если положить $h_i = \lambda_i - i + N$, где N не меньше длины разбиения λ , то

$$s_\lambda(\mathbf{p}) = s_{\{h\}}(\mathbf{p}). \quad (\text{П.2})$$

Определения (П.1) и (П.2) эквивалентны, $s_\lambda(\mathbf{p}) = s_\lambda(x)$, при условии, что переменные $\mathbf{p}$ и x связаны соотношением степенных сумм $p_m = \sum_i x_i^m$.

Если аргумент функции Шура обозначен жирной строчной буквой, мы используем определение (П.2), если строчная буква не жирная, используется определение (П.1), прописная буква в аргументе обозначает матрицу с собственными значениями $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Несложно проверить, что

$$s_\lambda(\mathbf{p}) = (-1)^{|\lambda|} s_{\lambda^{\text{tr}}}(-\mathbf{p}), \quad (\text{П.3})$$

где λ^{tr} обозначает разбиение, сопряженное разбиению λ (в книге [39] оно обозначается как λ^*). Диаграмма Юнга сопряженного разбиения получается из диаграммы Юнга λ транспонированием по отношению к главной диагонали, и $\lambda_1 = \ell(\lambda^{\text{tr}})$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Интегралы по унитарной группе

Рассмотрим интеграл по унитарной группе, который зависит от двух полубесконечных наборов параметров $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ и $\bar{\mathbf{p}} = (p_1^*, p_2^*, \dots)$:

$$\begin{aligned} I_{U(N)}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) &:= \int_{U(N)} e^{\text{tr } V(\mathbf{p}, U) + \text{tr } V(\bar{\mathbf{p}}^*, U^{-1})} d_* U = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_N \leq 2\pi} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_j} - e^{-i\theta_k}|^2 \prod_{j=1}^N e^{\sum_{m>0} \frac{1}{m} (p_m e^{im\theta_j} + p_m^* e^{-im\theta_j})} d\theta_j, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где

$$V(\mathbf{p}, x) := \sum_{n>0} \frac{1}{n} p_n x^n. \quad (\text{П.5})$$

Здесь $d_* U$ обозначает меру Хаара группы $U(N)$,

$$d_* U = \frac{1}{(2\pi)^N} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_j} - e^{-i\theta_k}|^2 \prod_{j=1}^N d\theta_j, \quad -\pi \leq \theta_1 < \dots < \theta_N \leq \pi, \quad (\text{П.6})$$

а $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}$ являются собственными значениями матрицы $U \in U(N)$. Подынтегральная экспонента в формуле (П.4) может рассматриваться как возмущение меры Хаара, и параметры $\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}^*$ называют константами связи по аналогии с задачами квантовой теории.

Используя равенство Коши–Литтлвуда

$$\tau(\mathbf{p}|\mathbf{p}^*) := \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p_m^* p_m = \sum_{\lambda \in \mathbb{P}} s_\lambda(\mathbf{p}^*) s_\lambda(\mathbf{p})$$

и свойство ортогональности неприводимых характеров унитарной группы

$$\int s_\lambda(U) s_\mu(U^{-1}) d_* U = \delta_{\lambda, \mu},$$

получаем формулу

$$I_{U(n)}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) = \sum_{\lambda \in \mathbb{P}: \ell(\lambda) \leq n} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\bar{\mathbf{p}}), \quad (\text{П.7})$$

которая задает интеграл по унитарным матрицам как разложение в ряд теории возмущений по константам связи.

Формула (П.7) впервые была приведена в работе [50] в контексте изучения модели Брезана–Гросса–Виттена. Было показано, что при некоторых ограничениях $I_{U(n)}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})$ можно приравнять к тау-функции решетки Тоды [25] и [26]. В этом случае ряды с функциями Шура (П.7) совпадают с рядами из работ [51] и [52].

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Числа Гурвица [23]

В.1. Определения и примеры. Для диаграммы Юнга Δ число $|\Delta|$ есть вес диаграммы, а $\ell(\Delta)$ – число строк. Обозначим как $(d_1, \dots, d_\ell)$ диаграмму Юнга со строками длины $d_1, \dots, d_\ell$, что соответствует разбиению числа $d = \sum d_i$. Нам понадобится понятие кодлинны разбиения Δ , определяемой как $\ell^*(\Delta) := |\Delta| - \ell(\Delta)$.

Рассмотрим связную компактную поверхность Ω без границы и разветвленное накрытие $f: \Sigma \rightarrow \Omega$ поверхности Ω связной либо несвязной поверхностью Σ . Пусть накрытие f имеет степень d . Это означает, что прообраз $f^{-1}(z)$ состоит из d точек $z \in \Omega$ везде, кроме нескольких точек, которые называются *критическими точками* накрытия f . Рассмотрим прообраз $f^{-1}(z) = \{p_1, \dots, p_\ell\}$ точки $z \in \Omega$. Обозначим через d_i степень накрытия f в точке p_i . Это означает, что в окрестности точки p_i функция f гомеоморфна, $x \mapsto x^{d_i}$. Набор $(d_1, \dots, d_\ell)$, который является разбиением d , называется *топологическим типом* точки z .

Зафиксируем точки $z_1, \dots, z_F$ и разбиения $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}$ числа d . Обозначим через $\tilde{C}_{\Omega(z_1, \dots, z_F)}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$ множество разветвленных накрытий $f: \Sigma \rightarrow \Omega$ с критическими точками $z_1, \dots, z_F$ топологических типов $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}$.

Накрытия $f_1: \Sigma_1 \rightarrow \Omega$ и $f_2: \Sigma_2 \rightarrow \Omega$ называются изоморфными, если существует гомеоморфизм $\varphi: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ такой, что $f_1 = f_2 \varphi$. Обозначим как $\text{Aut}(f)$ группу автоморфизмов накрытия f . Изоморфные накрытия имеют изоморфные группы автоморфизмов степени $|\text{Aut}(f)|$.

Теперь рассмотрим множество $C_{\Omega(z_1, \dots, z_F)}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$ изоморфных классов в $\tilde{C}_{\Omega(z_1, \dots, z_F)}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$. Это конечное множество. Сумма

$$H^{E,F}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}) = \sum_f (d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}) \frac{1}{|\text{Aut}(f)|}$$

по $f \in C_{\Omega(z_1, \dots, z_F)}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$ не зависит от положения точек $z_1, \dots, z_F$ и называется *числом Гурвица*. В этих формулах F обозначает число точек ветвления, а E – эйлерову характеристику базовой поверхности.

ПРИМЕР 2. Пусть $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{RP}^2$ – накрытие без критических точек. Тогда если поверхность Σ связна, то $\Sigma = \mathbb{RP}^2$, $\deg f = 1$ или $\Sigma = S^2$, $\deg f = 2$. Если $d = 3$, то $\Sigma = \mathbb{RP}^2 \amalg \mathbb{RP}^2 \amalg \mathbb{RP}^2$ или $\Sigma = \mathbb{RP}^2 \amalg S^2$. Отсюда

$$H^{1,0}(3) = \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} = \frac{2}{3}.$$

Числа Гурвица возникают в различных областях математики, от алгебраической геометрии до интегрируемых систем. Они хорошо изучены для ориентируемых поверхностей Ω . В этом случае число Гурвица совпадает со взвешенной суммой чисел

голоморфных разветвленных накрытий римановой поверхности Ω другими римановыми поверхностями при наличии критических точек $z_1, \dots, z_F \in \Omega$ топологических типов $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}$. Известный изоморфизм между римановыми поверхностями и комплексными алгебраическими кривыми дает интерпретацию чисел Гурвица как чисел морфизмов комплексных алгебраических кривых.

Точно так же число Гурвица для неориентируемой поверхности Ω совпадает со взвешенной суммой чисел дианалитических разветвленных накрытий клейновых поверхностей без границы другими клейновыми поверхностями, кроме того, оно совпадает со взвешенной суммой чисел морфизмов вещественных алгебраических кривых без вещественных неподвижных точек [53]–[55]. Расширение теории на все клейновы поверхности и все вещественные алгебраические кривые приводит к числам Гурвица для поверхностей с границами [56], [57].

Числа Гурвица допускают чисто алгебраическое описание. Всякое разветвленное накрытие $f: \Sigma \rightarrow \Omega$ с критическими точками $z_1, \dots, z_F \in \Omega$ порождает гомоморфизм $\phi: \pi_1(u, \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_F\}) \rightarrow S_\Gamma$, где u – точка на поверхности Ω , в группу перестановок множества $\Gamma = f^{-1}(u)$ при помощи монодромий на контурах из $\pi_1(u, \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_F\})$. Более того, если $l_i \in \pi_1(u, \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_F\})$ – контур вокруг z_i , то циклический тип перестановки $\phi(l_i)$ – это как раз $\Delta^{(i)}$.

Обозначим через $\text{Hom}_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$ группу гомоморфизмов

$$\phi: \pi_1(u, \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_F\}) \rightarrow S_\Gamma \cong S_d$$

с указанным свойством. Изоморфные накрытия порождают элементы из группы $\text{Hom}_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$, сопряженные с помощью S_d . Таким образом, мы построили взаимно однозначное соответствие между $C_{\Omega(z_1, \dots, z_F)}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$ и классами сопряженности группы $\text{Hom}_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$.

Рассмотрим введенные понятия более подробно. Любой элемент $s \in S_d$ порождает внутренний автоморфизм $I_s(g) = sgs^{-1}$ группы S_d . Таким образом, S_d действует на $\text{Hom}_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$ как $s(h) = I_s h$. Орбита такого действия изоморфизмов $I = \{I_s\}$ отвечает классу эквивалентности накрытий. Более того, группа $A = \{s \in S_d | s(h) = h\}$ изоморфна группе $\text{Aut}(f)$, причем накрытие f соответствует гомоморфизму h .

Рассмотрим разбиение на орбиты действия I :

$$\text{Hom}_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}) = \bigcup_{i=1}^r H_i.$$

Тогда мощность множества H_i равна

$$|H_i| = \frac{d!}{|A(h_i)|} = \frac{d!}{|\text{Aut}(f_i)|}, \quad h_i \in H_i.$$

С другой стороны, орбиты H_i взаимно однозначно соотносятся с классами накрытий. Поэтому

$$\frac{1}{d!} |\text{Hom}_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})| = \frac{1}{d!} \sum_{i=1}^r |H_i| = \sum_{i=1}^r \frac{1}{|\text{Aut}(f_i)|}$$

является числом Гурвица $H_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$.

Теперь найдем число $|\text{Hom}_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})|$ с помощью характеров группы S_d . Напомним, что цикловой тип элемента $s \in S_d$ есть мощность $\Delta = (d_1, \dots, d_\ell)$ на подмножествах, на которые перестановка s разбивает $\{1, \dots, d\}$. Любое разбиение Δ числа d порождает множество $C_\Delta \subset S_d$, состоящее из перестановок циклового типа Δ . Мощность множества C_Δ равна

$$|C_\Delta| = \frac{|\Delta|!}{z_\Delta}, \quad z_\Delta = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{i^{m_i}}{m_i!}, \quad (\text{П.8})$$

где m_i обозначает число частей, равных i , в разбиении Δ (тогда разбиение Δ часто обозначается как $(1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$). Более того, если $s_1, s_2 \in C_\Delta$, то $\chi(s_1) = \chi(s_2)$ для любого комплексного характера χ группы перестановок S_d . В результате мы можем определить $\chi(\Delta)$ по разбиению Δ как $\chi(\Delta) = \chi(s)$ для $s \in C_\Delta$.

Формула Медныха–Поздняковой–Джонса, [41], [42], [58], [59] говорит, что

$$|\text{Hom}_\Omega(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})| = d! \sum_{\lambda} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^E \prod_{i=1}^F |C_{\Delta^{(i)}}| \frac{\chi_\lambda(\Delta^{(i)})}{\dim \lambda},$$

где $E = E(\Omega)$ – эйлерова характеристика поверхности Ω , а χ_λ пробегает по всем неприводимым комплексным характеристам группы S_d , ассоциированным с диаграммами Юнга веса d . Таким образом, получаем

$$H^{E,k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^k) = \sum_{\lambda: |\lambda|=d} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^E \varphi_\lambda(\Delta^1) \dots \varphi_\lambda(\Delta^k). \quad (\text{П.9})$$

Чтобы получить числа Гурвица для проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, надо положить $E = 1$, а для сферы Римана берем $E = 2$.

ПРИМЕР 3. Положим $E = 1$, $F = 0$, $d = 3$. Тогда

$$H^{1,0}(3) = \sum_{\lambda: |\lambda|=3} \frac{\dim \lambda}{d!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

В общем случае для неразветвленного накрытия плоскости $\mathbb{RP}^2$ мы получаем следующую производящую функцию (ср. с соотношением (П.38) ниже):

$$e^{c^2/2+c} = \sum_{d \geq 0} c^d H^{1,0}(d). \quad (\text{П.10})$$

Показатель экспоненты отражает тот факт, что связные неразветвленные накрытия проективной плоскости могут быть либо проективной плоскостью (слагаемое c в показателе отвечает однолистному накрытию), либо сферой Римана, противоположные точки сферы соответствуют точке проективной плоскости (слагаемое $c^2/2$ отвечает двулистному накрытию, при этом 2 в знаменателе – порядок автоморфизма при накрытии сферой).

В конце этого пункта мы приводим чисто комбинаторное определение проективных чисел Гурвица [41], [42]. Рассмотрим симметрическую группу S_d и уравнение

$$R^2 X_1 \dots X_F = 1, \quad R, X_i \in S_d, \quad X_i \in C_{\Delta^{(i)}}, \quad i = 1, \dots, F, \quad (\text{П.11})$$

где $C_{\Delta^{(i)}}$ суть цикловые классы для заданного множества разбиений $\Delta^{(i)}$ с весом d . Тогда $H^{1,F}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)})$ – это число решений уравнения (П.11), деленное на $d!$. Например, для неразветвленного трехлистного накрытия получаем четыре решения уравнения $R^2 = 1$ в группе перестановок S_3 : единичный элемент и три транспозиции. То есть $H^{1,0} = 4/3!$, как и было получено в примерах выше. Число решений уравнения $R^2 = 1$ в S_d задается формулой (П.10).

В.2. Замечания к формуле Медных–Поздняковой–Джонса [23]. Начнем с замечания о контексте этого пункта.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Как вытекает из работы Дийкграафа [40], числа Гурвица для замкнутых ориентируемых поверхностей образуют двумерную топологическую теорию поля. Расширение этого результата на случай клейновых поверхностей было найдено в [57] (см. теорему 5.2 в указанной работе и также следствие 3.2 в работе [60]). С другой стороны, формула Медных–Поздняковой–Джонса дает описание чисел Гурвица в терминах характеров симметрических групп. В этом пункте фактически мы даем интерпретацию аксиом топологической теории поля Клейна [57] для чисел Гурвица в терминах характеров симметрических групп; этот подход отличается от подхода упомянутой работы [57].

Сформулируем следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} H^{E+E_1, F+F_1}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F+F_1)}) = \\ = \sum_{\Delta} \frac{d!}{|C_{\Delta}|} H^{E+1, F+1}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}, \Delta) H^{E_1+1, F_1+1}(d; \Delta, \Delta^{(F+1)}, \dots, \Delta^{(F_1)}). \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

В частности,

$$H^{E-1, F}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}) = \sum_{\Delta} H^{E, F+1}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}, \Delta) \chi(\Delta),$$

где $\chi(\Delta) = d! H^{1,1}(d; \Delta) / |C_{\Delta}|$ – рациональные числа, задающиеся по разбиению Δ с помощью формулы

$$\chi(\Delta) = \sum_{\lambda: |\lambda| = |\Delta|} \chi_{\lambda}(\Delta) = \left[\prod_{\substack{i > 0, \\ i \text{ четное}}} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_i^2}} \cdot p_i^{m_i} \prod_{\substack{i > 0, \\ i \text{ нечетное}}} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_i^2} + \frac{\partial}{\partial p_i}} \cdot p_i^{m_i} \right]_{\mathbf{p}=0}, \quad (\text{П.13})$$

в которой $\chi_{\lambda}(\Delta)$ – характеры представления, пронумерованного разбиениями λ , симметрической группы S_d , $d = |\lambda|$, вычисленные на цикловом классе $\Delta = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$.

В частности, мы получаем, что числа Гурвица для проективной плоскости можно получить из чисел Гурвица для сферы Римана, в то время как числа Гурвица для тора или бутылки Клейна получаются из чисел Гурвица для проективной плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем второе равенство в (П.13). Оно следует из соотношений

$$\exp \left\{ \sum_{i > 0} \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_i^2} + \sum_{\substack{i > 0, \\ i \text{ нечетное}}} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\tilde{\partial}), \quad (\text{П.14})$$

$$[s_{\lambda}(\tilde{\partial}) \cdot s_{\mu}(\mathbf{p})]_{\mathbf{p}=0} = \delta_{\lambda, \mu}, \quad p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots =: p_{\Delta} = \sum_{\lambda} \chi_{\lambda}(\Delta) s_{\lambda}(\mathbf{p}), \quad (\text{П.15})$$

где $s_\lambda(\tilde{\partial})$ – функция Шура (П.2), в аргументе $\mathbf{p}$ которой каждое число p_i заменено производной $i \partial / \partial p_i$. Оператор теплопроводности в левой части (П.14) играет важную роль. Формула (П.14) выводится из известного соотношения

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = \prod_{i < j} \frac{1}{1 - x_i x_j} \prod_i \frac{1}{1 - x_i}, \quad p_m(\mathbf{x}) := \sum_i x_i^m, \quad (\text{П.16})$$

которое можно найти в [39]. Соотношения (П.15) также можно найти в книге [39].

Равенство (П.12) следует из свойства ортогональности характеров

$$\sum_{\Delta} |C_{\Delta}| \chi_{\lambda}(\Delta) \chi_{\mu}(\Delta) = d! \delta_{\mu, \lambda},$$

в котором $|\mu| = |\lambda| = |\Delta| = d$, что дает

$$\sum_{\Delta} \varphi_{\lambda}(\Delta) \chi(\Delta) = \frac{d!}{\dim(\lambda)}.$$

Наконец, формула (П.9) дает (П.12).

Ниже мы увидим, что оператор теплопроводности, входящий в формулу (П.13), также связывает решения иерархии 2КП (цепочки Тоды) и иерархии ВКП (см. формулу (П.40)).

Воспользуемся обозначениями Фробениуса [39] для разбиения λ :

$$\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa} | \beta_1, \dots, \beta_{\kappa}), \quad \alpha_1 > \dots > \alpha_{\kappa} \geq 0, \quad \beta_1 > \dots > \beta_{\kappa} \geq 0.$$

Число $\kappa = \kappa(\lambda)$ обозначает длину главной диагонали диаграммы Юнга разбиения λ .

ЛЕММА 5. *Нормированный характер, индексированный разбиением λ , вычисленный на цикле Δ (напоминаем, что $d = |\lambda|$), равен нулю, если $\kappa(\lambda) > 1$, а на разбиении $\Delta = (d)$ он вычисляется явно:*

$$\varphi_{\lambda}((d)) = (-1)^{\ell(\lambda)+1} \left(\frac{d!}{\dim \lambda} \right) \frac{1}{d} \delta_{1, \kappa(\lambda)}. \quad (\text{П.17})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что функция Шура, отвечающая диаграмме Юнга из одного крюка, скажем, $(\alpha_i | \beta_j)$, может быть записана так:

$$s_{(\alpha_i | \beta_j)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{d} (-1)^{\beta_j} p_{\alpha_i + \beta_j + 1} + \dots,$$

где многоточием обозначены члены, которые не зависят от p_a с $a \geq \alpha_i + \beta_j + 1$. Это можно получить, например, из формулы Якоби–Труди $s_{\lambda}(\mathbf{p}) = \det s_{(\lambda_i - i + j)}(\mathbf{p})$. Тогда из тождества Джамбелли $s_{\lambda}(\mathbf{p}) = \det s_{(\alpha_i | \beta_j)}(\mathbf{p})$ следует, что s_{λ} не зависит от p_a при $a > \alpha_1 + \beta_1 + 1$. Таким образом, s_{λ} не зависит от p_a с $a \geq d > \alpha_1 + \beta_1 + 1$ при $\kappa(\lambda) > 1$. Согласно формуле (11) это означает, что $\varphi_{\lambda}((d)) = 0$, если $\kappa(\lambda) > 1$. Для диаграммы Юнга $\lambda = (\alpha_1 | \beta_1)$ из одного крюка мы имеем $\alpha_1 + \beta_1 + 1 = d$, и формула отображения характеров (11) дает

$$s_{(\alpha_1 | \beta_1)}(\mathbf{p}) = \frac{\dim \lambda}{d!} (p_d \varphi_{\lambda}((d)) + \dots),$$

где многоточием обозначены члены, не зависящие от p_d . Сравнивая две формулы, получаем (П.17).

Для d -листного накрытия мы называем точку ветвления *максимально разветвленной*, если ее профиль ветвления описывается разбиением (d) . Такой профиль описывает слияние в этой точке ветвления всех d листов накрываемой поверхности.

Соотношение (П.17) позволяет приравнять числа Гурвица, описывающие накрытия двух базовых клейновых поверхностей (с разными эйлеровыми характеристиками), если для обеих поверхностей профили содержат ненулевое число максимально разветвленных профилей. Формула Медныха–Поздняковой–Джонса приводит к следующему результату.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. Для любого натурального g

$$H^{E-2g, F+1}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}, (d)) = d^{2g} H^{E, F+2g+1}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}, \underbrace{(d), (d), \dots, (d)}_{2g}). \quad (\text{П.18})$$

Впервые эта формула была доказана Загиром (для четных E), см. приложение А в замечательной книге [58]. Мы получили ее другим способом и для всех E .

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Присутствие профиля (d) означает, что накрытие связно.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. В приложении А к книге [58], написанном Загиром, был введен полином

$$R_{\Delta}(q) := \frac{\prod_{i=1}^{\ell \Delta} (1 - q^{d_i})}{1 - q} =: \sum_r (-1)^r q^r \chi_r(\Delta).$$

Было показано, что χ_r (для $0 \leq r \leq d - 1$) является характером неприводимого представления группы S_d , который задается формулами $\chi_r(g) = \text{tr}(g, \pi_r)$, где $g \in S_d$, $\pi_r = \wedge^r(\text{St}_d)$. Здесь векторное пространство St_d есть

$$\text{St}_d = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d \mid x_1 + \dots + x_d = 0\}$$

и группа S_d действует в нем перестановками координат. Можно сделать уточнение: характер χ_r совпадает с характером χ_{λ} , если $\lambda = (d - r|r)$. Чтобы это понять, рассмотрим функцию Шура $s_{\lambda}(\mathbf{p}(q, 0))$, где $p_m(q, 0) := 1 - q^m$ и λ пока не фиксированы. Имеет место формула (см. пример 23 в главе I.3 в книге [39])

$$s_{\lambda}(\mathbf{p}) = (-1)^{\ell(\lambda)-1} (1 - q) q^{\ell(\lambda)-1} \delta_{\kappa(\lambda), 1}.$$

Положим в этой формуле $k = \ell(\lambda) - 1$, тогда $\lambda = (d - k|k)$. С другой стороны, формула (11) говорит, что

$$\begin{aligned} s_{(d-k|k)}(\mathbf{p}(q, 0)) &= (1 - q) \sum_{\Delta} \frac{|C_{\Delta}|}{d!} \chi_{(d-k|k)}(\Delta) R_{\Delta}(q) = \\ &= (1 - q) \sum_{r=0}^{d-1} (-q)^r \sum_{\Delta} \frac{|C_{\Delta}|}{d!} \chi_{(d-k|k)}(\Delta) \chi_r(\Delta). \end{aligned}$$

Сравним последние соотношения. Ортогональность характеров приводит к равенству $\chi_k = \chi_{(d-k|k)}$. Это, кстати, означает, что при наличии максимально разветвленной точки ветвления сумма по разбиениям в формуле (18) ограничивается только суммой по диаграммам Юнга λ с одним крюком.

Формула (П.51) ниже показывает, каким образом тау-функции порождают числа Гурвица накрытий с максимально разветвленными точками ветвления.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Двухкомпонентные фермионы, тау-функции
иерархии 2КП и многоматричные модели

Некоторые аспекты материала планируется развить в будущей работе [29].

Г.1. Фермионы. Введем фермионные операторы $\psi_i^{(\alpha)}$ и $\psi_i^{\dagger(\alpha)}$ с такими каноническими антикоммутиационными соотношениями:

$$\psi_i^{(\alpha)}\psi_j^{\dagger(\beta)} + \psi_j^{\dagger(\beta)}\psi_i^{(\alpha)} = \delta_{i,j}\delta_{\alpha,\beta}, \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, p; \quad (\text{П.19})$$

все остальные антикоммутаторы равны нулю. Ниже мы рассмотрим только случаи $p = 1, 2$ (одно- или двухкомпонентные фермионы). В случае $p = 1$ мы будем опускать верхний индекс: $\psi_i := \psi_i^{(1)}$, $\psi_i^{\dagger} := \psi_i^{\dagger(1)}$. Левые и правые вакуумные векторы $\langle 0; 0|$ и $|0; 0\rangle$ (где $\langle 0; 0|1|0; 0\rangle = 1$) определены формулами

$$\begin{aligned} \langle 0; 0|\psi_{-i-1}^{(\alpha)} &= \langle 0; 0|\psi_i^{\dagger(\alpha)} = 0, \\ \psi_i^{(\alpha)}|0; 0\rangle &= \psi_{-i-1}^{\dagger(\alpha)}|0; 0\rangle = 0, \end{aligned} \quad i < 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (\text{П.20})$$

При заданных разбиениях $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ вводится следующий фоковский вектор:

$$|N, \lambda; -N, \nu\rangle = \psi_{\nu_1-1+N}^{(2)} \dots \psi_{\nu_N}^{(2)} \psi_{\lambda_1-1+N}^{(1)} \dots \psi_{\lambda_N}^{(1)} |0; 0\rangle.$$

Г.2. Тау-функции иерархии 2КП [25]. Известно [25], что функция

$$\mathbb{I}_N(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) = \langle N; -N | \Gamma^{(1)}(\mathbf{p}) \Gamma^{(2)}(\mathbf{p}^*) g | 0; 0 \rangle, \quad (\text{П.21})$$

где

$$g = \exp \sum_{\alpha, \beta=1,2} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \psi_i^{(\alpha)} \psi_j^{\dagger(\beta)} C_{i,j}^{\alpha,\beta}, \quad (\text{П.22})$$

$$\Gamma^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = \sum_{k>0} \frac{1}{k} p_k J_k^{(\alpha)}, \quad J_k^{(\alpha)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \psi_i^{(\alpha)} \psi_{i+k}^{\dagger(\alpha)}, \quad (\text{П.23})$$

является примером тау-функции иерархии 2КП и дает решение соответствующих уравнений Хироты (одновременно являясь примером тау-функции полубесконечной цепочки Тоды). Наборы $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ и $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots)$ называются высшими временами иерархии 2КП. Постоянные $C_{i,j}^{\alpha,\beta}$ играют роль интегралов движения, которые определяют решение нелинейных уравнений, вытекающих из уравнений Хироты.

Теперь введем фермиевские поля

$$\psi^{(\alpha)}(z) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \psi_i^{(\alpha)} z^i, \quad \psi^{\dagger(\alpha)}(z) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \psi_i^{\dagger(\alpha)} z^{-i-1}. \quad (\text{П.24})$$

Имеем

$$\Gamma^{(\alpha)}|0; 0\rangle = |0; 0\rangle, \quad (\text{П.25})$$

что является следствием равенства $J_k^{(\alpha)}|0; 0\rangle = 0$. Нам потребуются соотношения

$$\begin{aligned}\Gamma^{(\alpha)}(\mathbf{p})\psi^{(\alpha)}(z) &= e^{V(\mathbf{p},z)}\psi^{(\alpha)}(z)\Gamma^{(\alpha)}(\mathbf{p}), \\ \Gamma^{(\alpha)}(\mathbf{p})\psi^{\dagger(\alpha)}(z) &= e^{-V(\mathbf{p},z)}\psi^{\dagger(\alpha)}(z)\Gamma^{(\alpha)}(\mathbf{p}),\end{aligned}\quad (\text{П.26})$$

которые можно получить из равенств $[J_k^{(\alpha)}, \psi_i^{(\alpha)}] = \psi_{i-k}^{(\alpha)}$ и $[J_k^{(\alpha)}, \psi_i^{\dagger(\alpha)}] = \psi_{i+k}^{\dagger(\alpha)}$, вытекающих из (П.19).

Также используем известную формулу [25]

$$\langle N, -N | \Gamma^{(1)}(\mathbf{p}) \Gamma^{(2)}(\mathbf{p}^*) | N, \lambda; -N, \nu \rangle = s_\lambda(\mathbf{p}) s_\nu(\mathbf{p}^*), \quad (\text{П.27})$$

где s_λ – функции Шура.

Г.3. Многократные интегралы [13], [22]. Выберем оператор (П.22) таким образом:

$$g = \exp \left\{ c \int_{\mathbb{C}} \psi^{(1)}(z) \psi^{\dagger(2)}(\bar{z}) \mu(z, \bar{z}) d^2 z \right\}. \quad (\text{П.28})$$

ЛЕММА 6. *Имеет место равенство*

$$\langle N; -N | \psi^{(1)}(z_1) \dots \psi^{(1)}(z_N) \psi^{\dagger(2)}(\bar{z}_1) \dots \psi^{\dagger(2)}(\bar{z}_N) | 0; 0 \rangle = (-1)^{\dots} |\Delta(z)|^2. \quad (\text{П.29})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получаем, подставив разложение (П.24) в левую часть формулы (П.29) и затем используя (П.19) и (П.20).

Из леммы 6 и формул (П.26) и (П.25) мы получаем равенство

$$\mathbb{I}_N(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) = \frac{c^N}{N!} \int |\Delta(z)|^2 \prod_{i=1}^N \mu(z_i, \bar{z}_i) e^{V(\mathbf{p}, z_i) - V(\mathbf{p}^*, \bar{z}_i)} d^2 z_i;$$

видно, что его правая часть является частным случаем тау-функции иерархии 2КП. Затем вставим (П.24) в формулу (П.28) и получим

$$g = \exp \left\{ c \sum_{i,j} \psi_i^{(1)} \psi_j^{(2)} m_{i,j} \right\}, \quad m_{i,j} = \int z^i \bar{z}^j \mu(z, \bar{z}) d^2 z.$$

Из (П.21) следует, что

$$g|0; 0\rangle = \sum_{N \geq 0} \frac{c^N}{N!} \sum_{\lambda, \mu} |N, \lambda; -N \nu\rangle g_{\lambda, \nu}(N),$$

где

$$g_{\lambda, \nu}(N) = \det[m_{h_j, h'_j}]_{i,j}, \quad h_i = \lambda_i - i + N, \quad h'_i = \nu_i - i + N. \quad (\text{П.30})$$

Мы предполагаем, что $g_{\lambda, \nu}(N) = 0$, если длина любого из разбиений λ или ν превышает N . Из формулы (П.27) мы получаем равенство

$$\mathbb{I}_N(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) = \frac{c^N}{N!} \sum_{\lambda, \nu: \ell(\lambda), \ell(\nu) \leq N} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\nu(\mathbf{p}^*) g_{\lambda, \nu}(N). \quad (\text{П.31})$$

Г.4. Гипергеометрическая функция как тау-функция иерархии 2КП.

В статье [12] было показано, что так называемая гипергеометрическая функция матричного аргумента²⁾

$$\begin{aligned} {}_nF_q \left(\mathbf{p}, \mathbf{p}^* \left| \begin{matrix} a_1 + N, a_2 + N, \dots, a_n + N \\ b_1 + N, b_2 + N, \dots, b_q + N \end{matrix} \right. \right) = \\ = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) s_{\lambda}(\mathbf{p}^*) \frac{\prod_{\alpha=1}^n (a_{\alpha} + N)_{\lambda}}{\prod_{\alpha=1}^q (b_{\alpha} + N)_{\lambda}} = \tau^{\text{TL}}(N, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*) \end{aligned} \quad (\text{П.32})$$

является примером тау-функции цепочки Тоды. Здесь N – номер узла цепочки Тоды (дискретное время) и два набора $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$, $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots)$ являются высшими временами релятивистской цепочки Тоды, которая записывается в виде

$$\begin{aligned} \tau^{\text{TL}}(N, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*) \partial_{p_1} \partial_{p_1^*} \tau^{\text{TL}}(N, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*) - \partial_{p_1} \tau^{\text{TL}}(N, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*) \partial_{p_1^*} \tau^{\text{TL}}(N, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*) = \\ = N \tau^{\text{TL}}(N + 1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*) \tau^{\text{TL}}(N - 1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*). \end{aligned}$$

Это уравнение хорошо изучено и имеет ряд приложений. Обычно тау-функцию цепочки Тоды не записывают как тау-функцию иерархии 2КП (П.21), но мы запишем ее в таком виде. Чтобы получить ровно тот множитель в гипергеометрической тау-функции, который стоит при произведении функций Шура, возьмем

$$i\mu(z, \bar{z}) = \pi G_{q,n}^{n,0} \left(|z|^2 \left| \begin{matrix} b_1, b_2, \dots, b_q \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{matrix} \right. \right),$$

где G – функция Майера. Действительно, как хорошо известно, выполняется равенство

$$m_{i,k} = \delta_{i,k} \int_0^{+\infty} x^k G_{q,n}^{n,0} \left(x \left| \begin{matrix} b_1, b_2, \dots, b_q \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{matrix} \right. \right) dx = \delta_{i,k} \frac{\prod_{\alpha=1}^n \Gamma(a_{\alpha} + k + 1)}{\prod_{\alpha=1}^q \Gamma(b_{\alpha} + k + 1)}.$$

Вычисляем детерминант (П.30) и видим, что ряд в правой части (П.31) как раз дает ${}_nF_q$ из уравнения (П.32). На следующем шаге покажем, что ${}_nF_0$ совпадает со статистической суммой комплексного ансамбля Жинибра.

Г.5. Произведение комплексных матриц и тау-функции иерархии 2КП.

Рассмотрим ансамбль взаимодействующих случайных комплексных матриц, заданных статистической суммой $\mathbb{I}_N^{\beta}$ (в этом пункте мы рассматриваем $\mathbb{I}_N^{\beta}$ при $\beta = 2$):

$$\mathbb{I}_N^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*; a_1, \dots, a_n) = \int \dots \int e^{\text{Tr } V(\mathbf{p}, \mathbf{Z}) + \text{Tr } V(\mathbf{p}^*, \mathbf{Z}^{\dagger})} \prod_{\alpha=1}^n e^{-\text{Tr } \mathbf{Z}_{\alpha}^{\dagger} \mathbf{Z}_{\alpha}} \det(\mathbf{Z}^{\dagger} \mathbf{Z})^{a_{\alpha}} d\mathbf{Z}_{\alpha},$$

где $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \dots \mathbf{Z}_n$, функция $V(\mathbf{p}, x)$ определяется формулой (П.5) и a_{α} – заданные числа. Мы называем $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ и $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots)$ константами связи.

ТЕОРЕМА 1. *Статистическая сумма $\mathbb{I}_N^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*; a_1, \dots, a_n)$ является тау-функцией иерархии 2КП и задается формулой*

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_N^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*; a_1, \dots, a_n) = {}_nF_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}^* | a_1 + N, a_2 + N, \dots, a_n + N) = \\ = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{p}) s_{\lambda}(\mathbf{p}^*) \prod_{\alpha=1}^n (a_{\alpha} + N)_{\lambda}. \end{aligned}$$

²⁾Когда говорят про матричные аргументы, пусть это матрицы A и B , предполагается зависимость от $p_k = \text{Tr } A^k$ и $p_k^* = \text{Tr } B^k$ соответственно.

Тау-функция выражается через свободные фермионы следующим образом:

$$\mathbb{I}_N^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*; a_1, \dots, a_n) = \langle N; -N | \Gamma^{(1)}(\mathbf{p}) \Gamma^{(2)}(\mathbf{p}^*) e^{c\Phi_n(a_1, \dots, a_n)} | 0; 0 \rangle, \quad (\text{П.33})$$

где

$$\Phi_n(a_1, \dots, a_n) = \int_{\mathbb{C}} \psi^{(1)}(z) \psi^{\dagger(2)}(\bar{z}) w_n^{a_1, \dots, a_n}(z, \bar{z}) d^2 z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из рассмотрения в предыдущих разделах. Можно начать с формулы (П.33). Тогда тот факт, что $\mathbb{I}_N^2$ является тау-функцией, вытекает из рассуждений п. Г.2. Из рассуждений п. Г.3 следует, что фермионное среднее равно

$$\mathbb{I}_N^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*; a_1, \dots, a_n) = \int_{\mathbb{C}} |\Delta(z)|^2 \prod_{i=1}^N e^{V(\mathbf{p}, z_i) - V(\mathbf{p}^*, \bar{z}_i)} w_n^{(a_1, \dots, a_n)}(z) d^2 z_i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Можно рассмотреть более общий взаимодействующий ансамбль со статистической суммой

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_N^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*, L_1, L_2; a_1, \dots, a_n) = \\ = \int \dots \int e^{\text{Tr } V(\mathbf{p}, Z) - \text{Tr } V(\mathbf{p}^*, Z^\dagger)} \det Z^{L_1} \det(Z^\dagger)^{-L_2} \prod_{\alpha=1}^n e^{-\text{Tr } Z_\alpha^\dagger Z_\alpha} \det(Z^\dagger Z)^{a_\alpha} dZ_\alpha, \end{aligned}$$

которая тоже представляется в виде тау-функции иерархии 2КП; ее фермионное представление таково:

$$\mathbb{I}_N^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*, L_1, L_2; a_1, \dots, a_n) = \langle L_1 + N, L_2 - N | \Gamma^{(1)}(\mathbf{p}), \Gamma^{(2)}(\mathbf{p}^*) e^{c\Phi_n(a_1, \dots, a_n)} | L_1, L_2 \rangle.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Тау-функции иерархии ВКП [23]

Д.1. Иерархия ВКП–Каца–ван де Лера. Существуют две иерархии ВКП: одна была введена в серии работ киотской группы (см., в частности, работу [25]), другая – Кацем и ван де Лером [10]. Мы рассмотрим именно последнюю. Она в себя включает знаменитую иерархию КП как специальную редукцию. Можно показать [61], что иерархия ВКП в некотором смысле эквивалентна трехкомпонентной иерархии КП, введенной в [25] (описанной ранее в работе [62] с помощью L -А пар дифференциальных операторов с матричнозначными коэффициентами). Для более подробного описания отсылаем к работе [10], а здесь мы выпишем первое нетривиальное уравнение для тау-функции (уравнение Хироты):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \tau(N, n, \mathbf{p})}{\partial p_2} \tau(N+1, n+1, \mathbf{p}) - \frac{1}{2} \tau(N, n, \mathbf{p}) \frac{\partial \tau(N+1, n+1, \mathbf{p})}{\partial p_2} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau(N, n, \mathbf{p})}{\partial^2 p_1} \tau(N+1, n+1, \mathbf{p}) + \frac{1}{2} \tau(N, n, \mathbf{p}) \frac{\partial^2 \tau(N+1, n+1, \mathbf{p})}{\partial^2 p_1} - \\ - \frac{\partial \tau(N, n, \mathbf{p})}{\partial p_1} \frac{\partial \tau(N+1, n+1, \mathbf{p})}{\partial p_1} = \tau(N+2, n+2, \mathbf{p}) \tau(N-1, n-1, \mathbf{p}). \quad (\text{П.34}) \end{aligned}$$

Тау-функция иерархии ВКП зависит от высших непрерывных времен $t_m = p_m/m$, $m = 1, 2, \dots$, и дискретного параметра N . В работе [45] мы добавили второй дискретный параметр n . Простейшее уравнение Хироты, связывающее тау-функции

для соседних значений n , таково:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tau(N, n+1, \mathbf{p}) \frac{\partial^2 \tau(N+1, n+1, \mathbf{p})}{\partial^2 p_1} - \frac{1}{2} \frac{\tau(N, n+1, \mathbf{p})}{\partial^2 p_1} \tau(N+1, n+1, \mathbf{p}) = \\ & = \frac{\partial \tau(N+2, n+2, \mathbf{p})}{\partial p_1} \tau(N-1, n, \mathbf{p}) - \frac{\partial \tau(N+1, n+2, \mathbf{p})}{\partial p_1} \tau(N, n, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{П.35})$$

Полный набор уравнений Хироты с двумя дискретными параметрами приведен в [61].

Общее решение уравнений Хироты для иерархии ВКП может быть записано как

$$\tau(N, n, \mathbf{p}) = \sum_{\lambda} A_{\lambda}(N, n) s_{\lambda}(\mathbf{p}), \quad (\text{П.36})$$

где коэффициент A_{λ} удовлетворяет соотношению Плюккера для изотропного грасманиана и (это можно показать с помощью формулы Вика) может быть записан в форме пфаффиана некоторой матрицы.

Д.2. Гипергеометрическая тау-функция иерархии ВКП. Нас интересует определенный подкласс тау-функций вида (П.36) иерархии ВКП, который был введен в работе [45]: так называемые гипергеометрические тау-функции иерархии ВКП; их можно сравнить с подобными тау-функциями цепочки Тоды и иерархий КП, найденными в [4] и [11].

Как и в работе [11], мы поступаем следующим образом. Пусть λ – диаграмма Юнга. При произвольной заданной функции r одной переменной мы строим произведение

$$r_{\lambda}(x) := \prod_{(i,j) \in \lambda} r(x+j-i),$$

которое называется произведением содержаний (или иногда обобщенным символом Похгаммера, отнесенным к диаграмме λ).

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Если $r = fg$, то $r_{\lambda}(x) = f_{\lambda}(x)g_{\lambda}(x)$. Если $\tilde{r}(x) = (r(x))^n$, где $n \in \mathbb{C}$, то $\tilde{r}_{\lambda}(x) = (r_{\lambda}(x))^n$.

Раасмотрим следующие суммы по разбиениям:

$$\sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} r_{\lambda}(n) c^{|\lambda|} s_{\lambda}(\mathbf{p}) =: \tau_r^{\text{B}}(N, n, \mathbf{p}), \quad (\text{П.37})$$

где s_{λ} – функции Шура. В работе [45] было показано, что с точностью до множителя формула (П.37) определяет тау-функцию иерархии ВКП.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. При любой функции r тау-функция $g(n) \tau_r^{\text{B}}(N, n, \mathbf{p})$ является решением уравнения Хироты для иерархии ВКП. Здесь $g(n)$ – функция (П.49).

Отметим две момента: во-первых, хотя дискретные параметры входят в уравнения Хироты, для наших целей множитель $g(n)$ не важен; во-вторых, число N , определяющее длину ряда (П.37), должно быть выбрано достаточно большим, и мы можем взять $N = +\infty$.

Такие тау-функции называются гипергеометрическими, так как гипергеометрические функции одной переменной можно получить как частные случаи (П.37). Например, можно выбрать $p_m = x^m$. Тогда рациональная функция r в (П.37) задает

обобщенную гипергеометрическую функцию одной переменной, а тригонометрическая функция r – базисную (q -деформированную) гипергеометрическую функцию. Однако наиболее для нас важная тау-функция является самой простой.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим простейший случай: пусть $r(x) = 1$ для всех x . Тогда тау-функция не зависит от n и будет обозначаться как $\tau_1(N, \mathbf{p})$. Другие гипергеометрические тау-функции можно получить, подействовав специально выбранным вертексным оператором на $\tau_1(N, \mathbf{p})$ (см., например, (П.45)). Если мы дополнительно положим $N = +\infty$, то

$$\tau_1^B(\infty, \mathbf{p}) = \sum_{\lambda} c^{|\lambda|} s_{\lambda}(\mathbf{p}) = \exp \sum_{m>0} \left(\frac{c^2}{2m} p_m^2 + c \frac{p_{2m-1}}{2m-1} \right). \quad (\text{П.38})$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Каждая тау-функция τ_r^B может быть записана как пфаффиан некоторой матрицы [45].

Связь гипергеометрических тау-функций иерархий 2КП и ВКП. Роль гипергеометрических функций матричного аргумента как тау-функций иерархии КП [12] была отмечена в работе [35] в контексте комбинаторных задач. Гипергеометрическая тау-функция иерархии 2КП может быть записана в виде

$$\sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} r_{\lambda}(n) c^{|\lambda|} s_{\lambda}(\mathbf{p}) s_{\lambda}(\bar{\mathbf{p}}) =: \tau_r^{2\text{КП}}(N, n, \mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}), \quad (\text{П.39})$$

где множитель $r_{\lambda}(n)$ такой же, как в (П.37). В этом случае два независимых набора $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ и $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots)$ и два дискретных параметра N и n играют роль высших времен иерархии (мы не отмечаем зависимости правой части от константы c , поскольку эта зависимость тривиальна). Тогда гипергеометрические тау-функции иерархий 2КП и ВКП связаны друг с другом,

$$\left[\exp \left\{ \sum_{i>0} \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i^2} + \sum_{\substack{i>0, \\ i \text{ нечетное}}} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_i} \right\} \tau_r^{2\text{КП}}(N, n, \mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) \right]_{\bar{\mathbf{p}}=0} = \tau_r^B(N, n, \mathbf{p}), \quad (\text{П.40})$$

что следует из равенств (П.14) и (П.15),

$$\left[\exp \left\{ \sum_{i>0} \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{p}_i^2} + \sum_{\substack{i>0, \\ i \text{ нечетное}}} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_i} \right\} s_{\lambda}(\mathbf{p}) \right]_{\bar{\mathbf{p}}=0} = 1.$$

Гипергеометрические тау-функции цепочки Тоды и иерархии ВКП в терминах действия вертексного оператора [23]. Мы предлагаем два типа задания функции r , которая определяет произведение содержаний в формуле (П.37):

$$r(x) = \exp \sum_{m>0} \frac{1}{m} \zeta_m h^m x^m, \quad (\text{П.41})$$

$$r(x) = t^{x\xi_0} \exp \sum_{m \neq 1} \frac{1}{m} \xi_m t^{mx}. \quad (\text{П.42})$$

Здесь комплексное число t и наборы $\{\zeta_m, m > 0\}$ и $\{\xi_m, m \in \mathbb{Z}\}$ являются свободными параметрами. Как и в работах [36], [44], мы вводим дополнительные параметры c

и h такие, что степень параметра s равна степени накрытия, в то время как степени параметра h , которые входят в (П.41), задают эйлерову характеристику накрывающей поверхности.

Параметризации (П.41) и (П.42) могут быть переписаны соответственно в виде

$$r(\zeta, h; x) = e^{V(\zeta, hx)}, \quad (\text{П.43})$$

$$\begin{aligned} r(\xi, x|t) &= e^{V(\xi_+, t^x) + \xi_0 x \ln t + V(\xi_-, t^{-x})} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{m \neq 0} \frac{1 - t^m}{m t^m} p_m^* t^{mx} + \xi_0 x \ln t \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.44})$$

где ξ – набор, составленный из параметров ξ_0 , и $\xi_{\pm} = (\xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \dots)$, а V определено формулой (П.5).

Используя формулы бозонизации [25], [63], гипергеометрические функции (П.39) и (П.37) можно представить (см. [45]) в терминах действия вертексных операторов. Для функции r , заданной формулой (П.42) (или, что то же самое, формулой (П.44)), тау-функция (П.37) может быть записана так:

$$\tau_r^B(N, n, \mathbf{p}) = \frac{1}{g(n)} \exp \left\{ \xi_0 \hat{h}_2(n) \ln t + \sum_{m \neq 0} p_m^* \hat{h}(n, t^m) \right\} \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} c^{|\lambda|} s_{\lambda}(\mathbf{p}), \quad (\text{П.45})$$

где $\hat{h}(n, t^m)$, $m \in \mathbb{Z}$, – коммутирующие операторы, определенные как вертексные операторы,

$$\hat{h}(n, t) := t^n \operatorname{res}_z \frac{dz}{z} \exp \left\{ \sum_{i>0} (t^i - 1) \frac{z^i p_i}{i} \right\} \exp \left\{ - \sum_{i>0} (t^{-i} - 1) z^{-i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\}, \quad (\text{П.46})$$

и где дифференциальные операторы $\hat{h}_2(n)$ определяются с помощью производящей функции,

$$\hat{h}(n, e^{\epsilon}) =: 1 + \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^{i+1}}{(i+1)!} \hat{h}_i(n).$$

В явном виде операторы $\hat{h}_i(n)$ были выписаны в работе [64]. Из (П.46) получаем

$$\begin{aligned} \hat{h}_0(n) &= n, \quad \hat{h}_1(n) = n^2 + \sum_{i>0} i p_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \\ \hat{h}_2(n) &= n^3 + \sum_{i,j} \left((i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + i j p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right). \end{aligned}$$

В частности, оператор $\hat{h}_2(0)$ известен как оператор разрезания и склейки [65].

Имеет место интересный факт: как отмечено Элиашбергом в работе [66], функция (П.46) является производящей функцией гамильтонианов квантового бездисперсионного уравнения КдФ на окружности (где подразумевается квантование первой гамильтоновой структуры).

Если функция r задается формулой (П.41) (или, эквивалентно, формулой (П.43)), то тау-функция (П.37) может быть записана как

$$\tau_r^B(N, n, \mathbf{p}) = \frac{1}{g(n)} \exp \left\{ \sum_{m>0} p_m^* \hat{h}_m(n) \right\} \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} c^{|\lambda|} s_{\lambda}(\mathbf{p}).$$

ПРИМЕР 5. Пусть

$$V(\zeta, x) = V(\mathbf{p}^*, x - 1) - V(\mathbf{p}^*, x). \quad (\text{П.47})$$

При $N = +\infty$, $n = 0$ и $r(x) = e^{\zeta_1 x}$ (т. е. $p_m^* = 0$ при $m > 2$; см. (П.47)) получаем

$$\tau_r^{\text{БКР}}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} e^{\zeta_1 \varphi_{\lambda}(\Gamma)} c^{|\lambda|} s_{\lambda}(\mathbf{p}) = e^{\zeta_1 \hat{h}_2(0)} \exp \left\{ \sum_{m \geq 0} \frac{c^2}{2m} p_m^2 + \frac{c}{2m-1} p_{2m-1} \right\}.$$

Д.3. Гипергеометрические тау-функции иерархии ВКП, выраженные в терминах свободных фермионов [45]. Некоторые детали этого пункта можно найти в работах [11], [45].

Пусть $\{\psi_i, \psi_i^{\dagger}, i \in \mathbb{Z}\}$ – фермиевские операторы рождения и уничтожения, которые удовлетворяют обычным антикоммутиационным соотношениям и условиям аннигиляции вакуума:

$$[\psi_i, \psi_j] = \delta_{i,j}, \quad \psi_i |n\rangle = \psi_{-i-1} |n\rangle = 0 \quad \text{при} \quad i < n.$$

В отличие от дискретной иерархии КП, введенной в работе [25], для описания иерархии ВКП [10] требуется дополнительная фермионная мода ϕ , которая антикоммутирует со всеми операторами кроме себя, $\phi^2 = 1/2$, и для которой $\phi|0\rangle = (1/\sqrt{2})|0\rangle$ [10]. Тогда гипергеометрическая тау-функция иерархии ВКП, введенная в работе [45], может быть записана как фермионное среднее,

$$\begin{aligned} g(n) \tau_r^{\text{БКР}}(N, n, \mathbf{p}) &= \\ &= \langle n | e^{\sum_{m>0} \frac{1}{m} J_m p_m} e^{\sum_{i<0} U_i \psi_i^{\dagger} \psi_i - \sum_{i \geq 0} U_i \psi_i \psi_i^{\dagger}} e^{\sum_{i>j} \psi_i \psi_j - \sqrt{2} \phi \sum_{i \in \mathbb{Z}} \psi_i} | n - N \rangle = \\ &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} e^{-U_{\lambda}(n)} s_{\lambda}(\mathbf{p}) = g(n) \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} r_{\lambda}(n) s_{\lambda}(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (\text{П.48})$$

где

$$J_m = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \psi_i \psi_{i+m}^{\dagger}, \quad m > 0, \quad U_{\lambda}(n) = \sum_i U_{h_i+n}, \quad r(i) = e^{U_{i-1}-U_i}$$

и

$$g(n) := \langle n | e^{\sum_{i<0} U_i \psi_i^{\dagger} \psi_i - \sum_{i \geq 0} U_i \psi_i \psi_i^{\dagger}} | n \rangle = \begin{cases} e^{-U_0 - \dots - U_{n-1}}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ e^{U_{-1} + \dots + U_n}, & n < 0. \end{cases} \quad (\text{П.49})$$

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Если нет дополнительной фермионной моды ϕ , то в сумме по разбиениям (П.49) отсутствуют разбиения с нечетной длиной. Можно избежать этого ограничения, если ввести пару тау-функций дискретной иерархии КП, но это, на наш взгляд, выглядит неестественно.

Кроме ряда (П.49), такой же ряд, но уже без ограничения $\ell(\lambda) \leq N$, тоже является тау-функцией иерархии ВКП, однако это отвечает единственному значению свободного параметра $n = 0$, введение зависимости от n разрушает простой вид тау-функции (см. работу [45]).

Д.4. Тау-функция иерархии ВКП, порождающая числа Гурвица [23].

Как правило, гипергеометрические тау-функции иерархии ВКП генерируют взвешенные суммы чисел Гурвица. Однако есть ряд особых случаев, когда тау-функция генерирует сами числа Гурвица; это связано с замечанием 3.

Будем различать случаи параметризаций (П.43) и (П.44).

Во-первых, выпишем простейший случай с одной точкой ветвления, когда $r = 1$ и $N = \infty$. Этот случай описывается тау-функцией $\tau_1^{\text{ВКП}}$, в которой удобно сделать замену $p_m \rightarrow h^{-1}c^m p_m$. Получим

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{1}{h^2} \sum_{m>0} \frac{1}{2m} p_m^2 c^{2m} + \frac{1}{h} \sum_{\text{нечетные } m} \frac{1}{m} p_m c^m \right\} = \\ = \sum_{d>0} c^d \sum_{\Delta: |\Delta|=d} h^{-\ell(\Delta)} \mathbf{p}_{\Delta} H^{1,a}(d; \Delta), \end{aligned} \quad (\text{П.50})$$

где мы полагаем $a = 0$, если $\Delta = (1^d)$, иначе $a = 1$. Тогда $H^{1,1}(d; \Delta)$ – это число Гурвица, дающее число d -листных накрытий проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ с одной точкой ветвления типа $\Delta = (d_1, \dots, d_l)$, $|\Delta| = d$ (не обязательно связной) клейновой поверхностью с эйлеровой характеристикой $E' = \ell(\Delta)$. Например, при $d = 3$, $E' = 1$ мы получаем $H^{1,1}(3; \Delta) = \delta_{\Delta, (3)}/3$. Для неразветвленных накрытий (т. е. для части суммы (П.50) с $a = 0$, $E' = d$) мы получаем формулу (П.10).

Заметим, что показатель экспоненты в левой части равенства (П.50) является производящей функцией чисел Гурвица для связных накрытий

$$\frac{1}{h^2} \sum_{d=2m} c^{2m} p_m^2 H_{\text{con}}^{1,1}(d; (m, m)) + \frac{1}{h} \sum_{d=2m-1} c^{2m-1} p_{2m-1} H_{\text{con}}^{1,1}(d; (2m-1)),$$

где $H_{\text{con}}^{1,1}$ описывает d -листное накрытие либо сферой Римана (члены с $d = 2m$), либо проективной плоскостью (при $d = 2m - 1$). Это единственный способ накрыть проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ связной поверхностью, если точка ветвления единственна.

Геометрический смысл показателя экспоненты в (П.50) можно объяснить следующим образом. Проективную плоскость можно считать единичным диском с отождествленными противоположными точками z и $-z$ на границе $|z| = 1$. Если мы накрываем сферу Римана сферой Римана, $z \rightarrow z^m$, то получаем две критические точки с одинаковыми профилями. Однако, поскольку сферой Римана мы накрываем плоскость $\mathbb{RP}^2$, мы имеем композицию отображения $z \rightarrow z^m$ на сфере Римана с факторизацией посредством антиподальной инволюции $z \rightarrow -1/\bar{z}$. Таким образом, в единственной критической точке 0 в $\mathbb{RP}^2$ мы имеем профиль ветвления (m, m) . Группа автоморфизмов в этом случае – это диэдральная группа порядка $2m$, состоящая из вращений на угол $2\pi/m$ и антиподальной инволюции $z \rightarrow -1/\bar{z}$. В результате $H_{\text{con}}^{1,1}(d; (m, m)) = 1/2m$ и есть множитель в первой сумме в показателе экспоненты в формуле (П.50).

Теперь накроем проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ проективной плоскостью $\mathbb{RP}^2$ с помощью отображения $z \rightarrow z^d$. Для четных d мы имеем критическую точку 0 , кроме того, каждая точка единичного круга $|z| = 1$ является критической (“складка”), а мы с самого начала ограничиваемся изолированными критическими точками. Для нечетных $d = 2m - 1$ существует единственная критическая точка 0 , в этом случае

группа автоморфизмов состоит из поворотов на угол $2\pi/(2m-1)$. Таким образом, в этом случае $H^{1,1}(d; (2m-1)) = 1/(2m-1)$, что совпадает с коэффициентом в второй суммы в показателе экспоненты в (П.50).

Далее рассмотрим гипергеометрическую функцию иерархии ВКП в параметризации (П.43), где мы положим $\zeta_1 = \beta + \sum_{i=1}^L a_i^{-1}$ и $\zeta_k = \sum_{i=1}^L a_i^{-k}$:

$$H^{1,b+m+1}(d; \underbrace{\Gamma, \dots, \Gamma}_b, \underbrace{(d), \dots, (d)}_m, \Delta) = c^{-d} h^{E'}[\tau(+\infty, 0, \mathbf{p}|\zeta)]_{b,m}, \quad (\text{П.51})$$

где скобки $[\cdot]_{b,m}$ обозначают коэффициент при члене $\mathbf{p} \Delta \prod_{i=1} a_i^{-1}$, который равен числу d -листных накрытий проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ со следующим типом ветвления: b – простая точка ветвления, m – максимально разветвленная точка ветвления и одна точка ветвления типа $\Delta = (d_1, \dots, d_l)$. Каждая накрывающая поверхность является связной клейновой поверхностью в случае $m > 0$ и не обязательно связной в случае $m = 0$. Эйлерова характеристика накрывающей поверхности равна $E' = \ell(\Delta) - b - m(d-1)$.

Напомним, что согласно приведенному в утверждении 19 соответствию (П.18) проективное число Гурвица (П.51) равно числу Гурвица, относящемуся к различным базовым поверхностям.

Д.5. Уравнения Хироты для тау-функции иерархии ВКП с двумя дискретными переменными. Интересующая нас иерархия ВКП была введена в работе [10], где тау-функция данной иерархии не содержала дискретной переменной n . Нам потребуется небольшое обобщение иерархии ВКП, которое включает n как дополнительную переменную (одно из высших времен иерархии); см. работы [45] и [61]. Уравнения Хироты для тау-функций $\tau^B(N, n, \mathbf{p})$ этой модифицированной иерархии ВКП таковы:

$$\begin{aligned} & \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{N'-N-1} e^{V(\mathbf{p}'-\mathbf{p}, z)} \tau(N'-1, n, \mathbf{p}' - [z^{-1}]) \tau(N+1, n+1, \mathbf{p} + [z^{-1}]) + \\ & + \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{N-N'-3} e^{V(\mathbf{p}-\mathbf{p}', z)} \tau(N'+1, n+2, \mathbf{p}' + [z^{-1}]) \tau(N-1, n-1, \mathbf{p} - [z^{-1}]) = \\ & = \tau(N'+1, n+1, \mathbf{p}') \tau(N-1, n, \mathbf{p}) - \\ & - \frac{1}{2} (1 - (-1)^{N'+N}) \tau(N', n+1, \mathbf{p}'|g) \tau(N, n, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (\text{П.52})$$

$$\begin{aligned} & \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{N'-N-2} e^{V(\mathbf{p}'-\mathbf{p}, z)} \tau(N'-1, n-1, \mathbf{p}' - [z^{-1}]) \tau(N+1, n+1, \mathbf{p} + [z^{-1}]) + \\ & + \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{N-N'-2} e^{V(\mathbf{p}-\mathbf{p}', z)} \tau(N'+1, n+1, \mathbf{p}' + [z^{-1}]) \tau(N-1, n-1, \mathbf{p}' - [z^{-1}]) = \\ & = \frac{1}{2} (1 - (-1)^{N'+N}) \tau(N', n, \mathbf{p}') \tau(N, n, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{П.53})$$

Здесь $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$, $\mathbf{p}' = (p'_1, p'_2, \dots)$ и $\mathbf{p} + [z^{-1}] = (p_1 + z^{-1}, p_2 + z^{-2}, p_3 + z^{-3}, \dots)$, а V определено формулой (П.5). Уравнения (П.53) совпадают с уравнениями из работы [10], а уравнения (П.52) связывают между собой тау-функции с разными дискретными временами n ; эти уравнения были выписаны в работах [45] и [61].

Полагая в уравнении (П.53) $N' = N + 1$ и $p_i = p'_i$ при $i \neq 2$ и удерживая лишь члены, линейные по $p'_2 - p_2$, мы получаем (П.34). Полагая в (П.52) $N' = N + 1$ и $p_i = p'_i$ при $i \neq 1$ и удерживая лишь члены, линейные по $p'_1 - p_1$, получаем (П.35).

Отметим, что в работе [61] было установлено соответствие между иерархией ВКП и иерархией 2КП (правильнее сказать, трехкомпонентной иерархией с “замороженной” третьей компонентой).

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Некоторые матричные интегралы, порождающие числа Гурвица из работ [22], [23]

Для случая когда накрываемая поверхность есть проективная плоскость $\mathbb{CP}^1$, примеры матричных интегралов, порождающих числа Гурвица, были рассмотрены в работах [17]–[19], [28], [21], [49], [59].

Можно показать, что ряды теории возмущений по константам связи для этих интегралов (фейнмановские графы) связаны с гипергеометрическими тау-функциями цепочки Тоды (иерархии КП и иерархии 2КП). Это фактически означает, что данные ряды порождают числа Гурвица с не более чем двумя произвольными профилями (произвольный профиль соответствует члену ряда теории возмущений по константам связи – высшим временам). У цепочки Тоды и иерархии 2КП есть два независимых набора высших времен, которые дают две критические точки для чисел Гурвица. В то же время профили в остальных критических точках подчинены определенным условиям, и источником этих дополнительных профилей является выбор функции в произведении содержаний в гипергеометрической тау-функции (П.39).

Здесь мы вкратце изложим, как построить несколько производящих рядов для чисел Гурвица в случае накрытия проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$. Эти ряды могут не быть тау-функциями, но их можно представить как интегралы от тау-функции матричного аргумента. Если матричный интеграл в примерах ниже является тау-функцией иерархии ВКП, то он порождает числа Гурвица с одним произвольным профилем (поскольку иерархия ВКП содержит лишь один набор непрерывных высших времен), а все остальные подчинены ограничениям, идентичным тем, которые упомянуты выше для случая $\mathbb{CP}^1$. Во всех примерах функция V взята из (П.5). Напомним, что в качестве предельных значений $\mathbf{p}(q, t)$ из (12) можно взять $\mathbf{p}(a) = (a, a, \dots)$ и $\mathbf{p}_\infty = (1, 0, 0, \dots)$. Напомним также, что $H^{E,F}(d; \dots)$ – числа Гурвица только в случае $d \leq N$, где N – размер матриц.

Подробнее об интегралах, порождающих накрытия проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, см. работы [22], [23]. Новизна результатов работы [22] по сравнению с работой [1] состоит в рассмотрении произведения матриц и тау-функции иерархии ВКП.

Приведем несколько примеров. Все они включают простейшую тау-функцию иерархии ВКП от матричного аргумента X [45], определяемую так (ср. с формулой (П.16)):

$$\begin{aligned} \tau_1^{\text{ВКП}}(X) &:= \sum_{\lambda} s_{\lambda}(X) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m>0} \frac{1}{m} (\text{tr } X^m)^2 + \sum_{\substack{m>0, \\ m \text{ нечетные}}} \frac{1}{m} \text{tr } X^m \right\} = \\ &= \frac{\det^{1/2} \frac{1+X}{1-X}}{\det^{1/2} (\mathbb{I}_N \otimes \mathbb{I}_N - X \otimes X)}. \end{aligned}$$

Эта функция в примерах ниже является частью меры интегрирования. Другие множители в подынтегральном выражении представляют собой простейшие тау-функции $\tau_1^{\text{KP}}(X, \mathbf{p}) := e^{\text{tr } V(\mathbf{p}, X)}$ иерархии КП с функцией V из (II.5), в которой параметры $\mathbf{p}$ играют роль констант связи. Ряд теории возмущений по константам связи мы записываем как сумму по разбиениям от произведений функций Шура; этот ряд аналогичен рядам, рассмотренным выше.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим проективный аналог производящей функции Окунькова [36] как интеграл по нормальным матрицам. Из соотношения

$$(2\pi\zeta_1^{-1})^{1/2} e^{(n\zeta_0)^2/2\zeta_1} e^{\zeta_0 n c + \zeta_1 c^2/2} = \int_{\mathbb{R}} e^{x_i n \zeta_0 + (c x_i - x_i^2/2)\zeta_1} dx_i,$$

используя равенство $\varphi_\lambda(\Gamma) = \sum_{(i,j) \in \lambda} (j - i)$, аналогично работе [67] можно вывести соотношение

$$e^{n|\lambda|\zeta_0} e^{\zeta_1 \varphi_\lambda(\Gamma)} \delta_{\lambda, \mu} = K \int s_\lambda(M) s_\mu(M^\dagger) \det(M M^\dagger)^{n\zeta_0} e^{(-\zeta_1/2) \text{tr}(\ln(M M^\dagger))^2} dM,$$

где K – некий несущественный множитель, M – нормальная матрица (т. е. матрица, коммутирующая со своей эрмитово сопряженной) с собственными значениями $z_1, \dots, z_N$, $\ln |z_i| = x_i$, и где

$$dM = d_* U \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \prod_{i=1}^N d^2 z_i.$$

Тогда $\mathbb{RP}^2$ -аналог производящего ряда Окунькова [36] может быть представлен как интеграл:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} e^{n|\lambda|\zeta_0 + \zeta_1 \varphi_\lambda(\Gamma)} s_\lambda(\mathbf{p}) = \\ = K \int e^{V(\mathbf{p}, M)} e^{\zeta_0 n \text{tr} \ln(M M^\dagger) - (\zeta_1/2)(\text{tr} \ln(M M^\dagger))^2} \tau_1^{\text{BKP}}(M^\dagger) dM. \end{aligned}$$

Напомним, что в работе [36] изучались числа Гурвица с произвольным числом простых точек ветвления и двумя произвольными профилями. В нашем аналоге, описывающем накрытия проективной плоскости, произвольный профиль только один, поскольку в отличие от цепочки Тоды иерархия ВКП имеет лишь один набор (непрерывных) высших времен.

Похожее представление для накрытия проективной плоскости $\mathbb{CP}^1$, т. е. для самого производящего ряда Окунькова, было построено в работе [68]. В работе [69] было выписано струнное уравнение, которое характеризует двойные числа Гурвица.

Ниже используются следующие обозначения: $d_* U$ – мера Хаара для группы $U(N)$, $\int_{U(N)} d_* U = 1$; если Z – комплексная матрица, то

$$d\Omega(Z, Z^\dagger) = \pi^{-n^2} e^{-\text{tr}(Z Z^\dagger)} \prod_{i,j=1}^N d \text{Re } Z_{ij} d \text{Im } Z_{ij};$$

если M – эрмитова матрица, то мера интегрирования задается как

$$dM = \prod_{i \leq j} d \text{Re } M_{ij} \prod_{i < j} d \text{Im } M.$$

Известно [39], что

$$\int s_\lambda(Z) s_\mu(Z^\dagger) d\Omega(Z, Z^\dagger) = (N)_\lambda \delta_{\lambda, \mu},$$

где $(N)_\lambda := \prod_{(i,j) \in \lambda} (N + j - i)$ – символ Похгаммера, связанный с разбиением λ . Аналогичное соотношение было использовано в работах [1], [7], [13], [18], [67] для моделей эрмитовых, комплексных и нормальных матриц.

Напомним, что

$$s_\lambda(\mathbb{I}_N) = (N)_\lambda s_\lambda(\mathbf{p}_\infty), \quad s_\lambda(\mathbf{p}_\infty) = \frac{\dim \lambda}{d!}, \quad d = |\lambda|.$$

ПРИМЕР 7. Рассмотрим случай трех точек ветвления. Производящая функция проективных чисел Гурвица для накрытия проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ с тремя произвольными профилями в трех критических точках имеет вид

$$\sum_{\lambda, \ell(\lambda) \leq N} \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(1)}) s_\lambda(\Lambda) s_\lambda(\mathbf{p}^{(2)})}{(s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^2} = \int \tau_1^{\text{BKP}}(Z_1 \Lambda Z_2) \prod_{i=1,2} e^{V(\mathbf{p}^{(i)})} \text{tr } Z_i^\dagger d\Omega(Z_i, Z_i^\dagger). \quad (\text{П.54})$$

Если $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}(q, t)$ (с произвольными q, t) и $\Lambda = \mathbb{I}_N$, то правая часть выражения (П.54) превращается в гипергеометрическую тау-функцию иерархии ВКП.

ПРИМЕР 8. Рассмотрим теперь “проективный” аналог двухматричной модели. Интеграл

$$\int \tau_1^{\text{BKP}}(cM_2) e^{\text{tr } V(\mathbf{p}, M_1) + \text{tr}(M_1 M_2)} dM_1 dM_2 = \sum_{\lambda} c^{|\lambda|} (N)_\lambda s_\lambda(\mathbf{p}), \quad (\text{П.55})$$

в котором M_1, M_2 – эрмитовы матрицы, является примером гипергеометрической тау-функции иерархии ВКП.

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Используя результаты работы [65], мы можем показать, что правая часть равенства (П.55) является проективным аналогом производящей функции так называемых строго монотонных чисел Гурвица, введенных Гулденом и Джексонсом. В проективном случае эти числа дают количество путей на графе Кэли симметрической группы, начальной точкой которых является некоторое заданное разбиение. В то же время конечная точка (конечное разбиение) не является фиксированной: мы берем взвешенную сумму по всем возможным конечным точкам Δ , и вклад каждой конечной точки берется с весом $\chi(\Delta)$ из леммы 4.

ПРИМЕР 9. Рассмотрим интеграл по унитарным матрицам. Производящие ряды проективных чисел Гурвица с произвольными профилями в n критических точках и ограниченными профилями в остальных точках имеют вид

$$\begin{aligned} & \int e^{\text{tr}(cU_1^\dagger \dots U_{n+m}^\dagger)} \left(\prod_{i=n+1}^{n+m} \tau_1^{\text{BKP}}(U_i) d_* U_i \right) \left(\prod_{i=1}^n \tau_1^{\text{KP}}(U_i, \mathbf{p}^{(i)}) d_* U_i \right) = \\ & = \sum_{d \geq 0} c^d (d!)^{1-m} \sum_{\lambda: \substack{|\lambda|=d, \\ \ell(\lambda) \leq N}} \left(\frac{\dim \lambda}{d!} \right)^{2-m} \left(\frac{s_\lambda(\mathbb{I}_N)}{\dim \lambda} \right)^{1-m-n} \prod_{i=1}^n \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(i)})}{\dim \lambda}. \end{aligned} \quad (\text{П.56})$$

Здесь $\mathbf{p}^{(i)}$ – параметры. Эти ряды порождают определенную линейную комбинацию чисел Гурвица с эйлеровой характеристикой $E = 2 - m$, $m \geq 0$. Интеграл (II.56) превращается в гипергеометрическую тау-функцию ВКП, если мы выберем параметры следующим образом: $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}(q_i, t_i)$ для $i = 2, \dots, n$, где параметры q_i, t_i произвольны, и в дополнение положим $m = 1$.

В случае $n = 1$ такая тау-функция иерархии ВКП может считаться аналогом производящей функции так называемых несвязных чисел Бускэ–Мело–Шаффера (см. пример 2.16 в обзоре [70]). В случае $n = m = 1$ получим следующую тау-функцию иерархии ВКП:

$$\int \tau_1^{\text{BKP}}(U_2) e^{\text{tr } V(\mathbf{p}, U_1) + \text{tr}(c U_1^\dagger U_2^\dagger)} d_* U_1 d_* U_2 = \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} c^{|\lambda|} \frac{s_\lambda(\mathbf{p})}{(N)_\lambda}.$$

Если мы сравним этот ряд с теми, которые используются в работах [48], [44], то сможем заметить, что он является проективным аналогом производящей функции так называемых слабо монотонных чисел Гурвица. В проективном случае он дает количество путей на графе Кэли, начальной точкой которых является заданное разбиение. Но в проективном случае вместо неподвижной конечной точки мы рассматриваем сумму по всевозможным конечным точкам Δ с весом $\chi(\Delta)$ из леммы 4.

ПРИМЕР 10. Наконец, рассмотрим интегралы по комплексным матрицам. Аналог производящих функций для кривых Белого из работ [19], [21] выглядит следующим образом (ср. с (20)):

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N N^l \sum_{\substack{\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n+1)}, \\ \ell(\Delta^{n+1})=l}} c^d H^{E, n+1}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n+1)}) \prod_{i=1}^n \mathbf{p}_{\Delta^{(i)}}^{(i)} = \\ &= \sum_{\lambda} c^{|\lambda|} \frac{(d!)^{m-2} (N)_\lambda}{(\dim \lambda)^{m-2}} \prod_{i=1}^n \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(i)})}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \int e^{\text{tr}(c Z_1^\dagger \dots Z_{n+m}^\dagger)} \left(\prod_{i=n+1}^{n+m} \tau_1^{\text{BKP}}(Z_i) d\Omega(Z_i, Z_i^\dagger) \right) \left(\prod_{i=1}^n \tau_1^{\text{KP}}(Z_i, \mathbf{p}^{(i)}) d\Omega(Z_i, Z_i^\dagger) \right), \end{aligned}$$

где $E = 2 - m$ есть эйлерова характеристика накрываемой поверхности.

Ряд в следующем примере порождает сами проективные числа Гурвица (для того чтобы избавиться от множителя $(N)_\lambda$, в сумме по разбиениям используется смешанное интегрирование по группе $U(N)$ и по комплексным матрицам):

$$\begin{aligned} & \sum_{\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)}} c^d H^{1, n}(d; \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)}) \prod_{i=1}^n \mathbf{p}_{\Delta^{(i)}}^{(i)} = \\ &= \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} c^{|\lambda|} \frac{\dim \lambda}{d!} \prod_{i=1}^n \frac{s_\lambda(\mathbf{p}^{(i)})}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)} = \\ &= \int \tau_1^{\text{KP}}(c U^\dagger Z_1^\dagger \dots Z_k^\dagger, \mathbf{p}^{(n)}) \tau_1^{\text{BKP}}(U) d_* U \prod_{i=1}^{n-1} \tau_1^{\text{KP}}(Z_i, \mathbf{p}^{(i)}) d\Omega(Z_i, Z_i^\dagger). \end{aligned}$$

Здесь Z , Z_i – комплексные $(N \times N)$ -матрицы и $U \in U(N)$. Как и в предыдущих примерах, ряд в правой части равенства можно превратить в тау-функцию иерархии ВКП. Для этого можно выбрать все параметры как $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}(q_i, t_i)$, $i = 1, \dots, n$, кроме одного, который приобретет смысл высшего времени иерархии.

Благодарности. Я благодарен А. Одзиевичу и университету Белостока за теплое гостеприимство, которое позволило аккуратно записать эту работу. Я благодарен С. Натанзону, А. Одзиевичу, Дж. Харнаду, А. Миронову (ИТЭФ) и ван де Леру за различные замечания, касающиеся связанных с этой работой вопросов. Особая благодарность Е. Страхову за то, что он привлек мое внимание к работам по квантовому хаосу, посвященным произведению случайных матриц, и за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] A. Yu. Orlov, “New solvable matrix integrals”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:supp02 (2004), 276–293.
- [2] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, “Matrix models of two-dimensional gravity and Toda theory”, *Nucl. Phys. B*, **357**:2 (1991), 565–618.
- [3] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Orlov, A. Zabrodin, “Matrix models among integrable theories: forced hierarchies and operator formalism”, *Nucl. Phys. B*, **366**:3 (1991), 569–601.
- [4] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, “Generalized Kazakov–Migdal–Kontsevich model: group theory aspects”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:14 (1995), 2015–2051.
- [5] A. Zabrodin, “New applications of non-Hermitian random matrices”, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **4**, Suppl. 2 (200), S851–S861, arXiv:cond-mat/0210331; R. Teodorescu, E. Bettelheim, O. Agam, A. Zabrodin, P. Wiegmann, “Normal random matrix ensemble as a growth problem”, *Nucl. Phys. B*, **704**:3 (2005), 407–444.
- [6] Дж. Харнад, А. Ю. Орлов, “Скалярные произведения симметрических функций и матричные интегралы”, *ТМФ*, **137**:3 (2003), 375–392.
- [7] A. Yu. Orlov, “Soliton theory, symmetric functions and matrix integrals”, *Acta Appl. Math.*, **86**:1–2 (2005), 131–158.
- [8] P. Di Francesco, C. Itzykson, “A generating function for fatgraphs”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Théor.*, **59**:2 (1993), 117–139.
- [9] V. A. Kazakov, M. Staudacher, T. Wynter, “Character expansion methods for matrix models of dually weighted graphs”, *Commun. Math. Phys.*, **177**:2 (1996), 451–468, arXiv:hep-th/9502132.
- [10] V. Kac, J. van de Leur, “The geometry of spinors and the multicomponent BKP and DKP hierarchies”, *The Bispectral Problem* (Montréal, Canada, March 1997), CRM Proceedings and Lecture Notes, **14**, eds. J. Harnad, A. Kasman, AMS, Providence, RI, 1998, 159–202.
- [11] A. Yu. Orlov, D. M. Scherbin, *Fermionic representation for basic hypergeometric functions related to Schur polynomials*, arXiv:nlin/0001001.
- [12] А. Ю. Орлов, Д. М. Щербин, “Гипергеометрические решения солитонных уравнений”, *ТМФ*, **128**:1 (2001), 84–108.
- [13] J. Harnad, A. Yu. Orlov, “Fermionic construction of partition functions for two matrix models and perturbative Schur functions expansions”, *J. Phys. A.: Math. Gen.*, **39**:28 (2006), 8783–8809.
- [14] J. W. van de Leur, “Matrix integrals and geometry of spinors”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:2 (2001), 288–310.
- [15] A. Yu. Orlov, T. Shiota, K. Takasaki, *Pfaffian structures and certain solutions to BKP hierarchies II. Multiple integrals*, arXiv:1611.02244.

- [16] A. Yu. Orlov, “Deformed Ginibre ensembles and integrable systems”, *Phys. Lett. A*, **378**:4 (2014), 319–328.
- [17] R. de Mello Koch, S. Ramgoolam, “From Matrix Models and quantum fields to Hurwitz space and the absolute Galois group”, [arXiv:1002.1634](#).
- [18] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, “On KP-integrable Hurwitz functions”, *JHEP*, **11** (2014), 080, 30 pp., [arXiv:1405.1395](#).
- [19] P. Zograf, “Enumeration of Gronthendieck’s dessins and KP hierarchy”, *Int. Math. Res. Notices*, **2015**:24 (2015), 13533–13544, [arXiv:1312.2538](#).
- [20] I. P. Goulden, M. Guay-Paquet, J. Novak, “Monotone Hurwitz numbers and HCIZ integral”, *Ann. Math. Blaise Pascal*, **21**:1 (2014), 71–99.
- [21] J. Ambjorn, L. O. Chekhov, “The matrix model for dessins d’enfants”, *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, **1**:3 (2014), 337–361, [arXiv:1404.4240](#).
- [22] S. M. Natanzon, A. Yu. Orlov, *Hurwitz numbers and BKP hierarchy*, [arXiv:1407.8323](#).
- [23] S. M. Natanzon, A. Yu. Orlov, “BKP and projective Hurwitz numbers”, *Lett. Math. Phys.*, **107**:6 (2017), 1065–1109, [arXiv:1501.01283](#).
- [24] L. O. Chekhov, “The Harer–Zagier recursion for an irregular spectral curve”, *J. Geom. Phys.*, **110** (2016), 30–43, [arXiv:1512.09278](#).
- [25] M. Jimbo, T. Miwa, “Solitons and infinite dimensional Lie algebras”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [26] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations* (University of Tokyo, December 20–27, 1982), *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **4**, ed. K. Okamoto, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1–95.
- [27] A. Alexandrov, “Matrix models for random partitions”, *Nucl. Phys. B*, **851**:3 (2011), 620–650.
- [28] Я. Амбьорн, Л. О. Чехов, “Матричная модель для гипергеометрических чисел Гурвица”, *ТМФ*, **181**:3 (2014), 421–435, [arXiv:1409.3553](#).
- [29] A. Yu. Orlov, E. Strahov, “Products of random matrices and τ -functions”, to be published.
- [30] G. Akemann, J. R. Ipsen, M. Kieburg, *Products of rectangular random matrices: singular values and progressive scattering*, [arXiv:1307.7560](#).
- [31] G. Akemann, T. Chechinski, M. Kieburg, “Spectral correlation functions of the sum of two independent complex Wishart matrices with unequal covariances”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:31 (2016), 315201, 33 pp.
- [32] G. Akemann, E. Strahov, “Hard edge limit of the product of two strongly coupled random matrices”, *Nonlinearity*, **29**:12 (2016), 3743–3776, [arXiv:1511.09410](#).
- [33] E. Strahov, “Dynamical correlation functions for products of random matrices”, *Random Matrices Theory Appl.*, **4**:4 (2015), 1550020, 28 pp., [arXiv:1505.02511](#).
- [34] E. Strahov, “Differential equations for singular values of products of Ginibre random matrices”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:32 (2014), 325203, 27 pp., [arXiv:1403.6368](#).
- [35] I. P. Goulden, D. M. Jackson, “The KP hierarchy, branched covers, and triangulations”, *Adv. Math.*, **219**:3 (2008), 932–951.
- [36] A. Okounkov, “Toda equations for Hurwitz numbers”, *Math. Res. Lett.*, **7**:4 (200), 447–453, [arXiv:math/0004128](#).
- [37] A. Okounkov, R. Pandharipande, “Gromov–Witten theory, Hurwitz theory and completed cycles”, *Ann. Math. (2)*, **163**:2 (2006), 517–560, [arXiv:math.AG/0204305](#).
- [38] А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, С. М. Натанзон, “Полный набор операторов разрезания и склейки в теории Гурвица–Концевича”, *ТМФ*, **166**:1 (2011), 3–27, [arXiv:0904.4227](#).
- [39] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1984.
- [40] R. Dijkgraaf, “Mirror symmetry and elliptic curves”, *The Moduli Space of Curves*, *Progress in Mathematics*, **129**, eds. R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer, Birkhäuser, Boston, 1995, 149–163.

- [41] А. Д. Медных, Г. Г. Позднякова, “О числе неэквивалентных накрытий над компактной неориентируемой поверхностью”, *Сиб. матем. журн.*, **27**:1 (1986), 123–131.
- [42] G. A. Jones, “Enumeration of homomorphisms and surface-coverings”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **46**:4 (1995), 485–507.
- [43] J. Harnad, “Weighted Hurwitz numbers and hypergeometric τ -functions: an overview”, *String-Math 2014* (University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, June 9–13, 2014), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **93**, eds. V. Bouchard, C. Doran, S. Mendez-Diez, C. Quigley, AMS, Providence, RI, 2016, 289–333, arXiv:1504.03408.
- [44] M. Guay-Paquet, J. Harnad, “2D Toda τ -functions as combinatorial generating functions”, *Lett. Math. Phys.*, **105**:6 (2015), 827–852.
- [45] A. Yu. Orlov, T. Shiota, K. Takasaki, *Pfaffian structures and certain solutions to BKP hierarchies I. Sums over partitions*, arXiv:1201.4518.
- [46] J. Harnad, A. Yu. Orlov, “Hypergeometric τ -functions, Hurwitz numbers and enumeration of paths”, *Commun. Math. Phys.*, **338**:1 (2015), 267–284, arXiv:1407.7800.
- [47] K. I. Gross, D. S. Richards, “Special functions of matrix argument. I. Algebraic induction, zonal polynomials, and hypergeometric functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **301**:2 (1987), 781–811.
- [48] I. P. Goulden, M. Guay-Paquet, J. Novak, “Monotone Hurwitz numbers in genus zero”, *Canad. J. Math.*, **65**:5 (2013), 1020–1042, arXiv:1204.2618.
- [49] M. Kazarian, P. Zograf, “Virasoro constraints and topological recursion for Grothendieck’s dessin counting”, *Lett. Math. Phys.*, **105**:8 (2015), 1057–1084, arXiv:1406.5976.
- [50] A. Mironov, A. Morozov, G. Semenoff, “Unitary matrix integrals in the framework of the generalized Kontsevich model”, *Internat. J. Modern. Phys. A*, **11**:28 (1996), 5031–5080.
- [51] K. Takasaki, “Initial value problem for the Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations* (University of Tokyo, December 20–27, 1982), *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **4**, ed. K. Okamoto, North-Holland, Amsterdam, 1984, 139–163.
- [52] T. Takebe, “Representation theoretical meaning of initial value problem for the Toda lattice hierarchy. I”, *Lett. Math. Phys.*, **21**:1 (1991), 77–84; “Representation theoretical meaning of initial value problem for the Toda lattice hierarchy. II”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **27**:3 (1991), 491–503.
- [53] N. L. Alling, N. Greenleaf, *Foundation of the Theory of Klein Surfaces*, *Lecture Notes in Mathematics*, **219**, Springer, Berlin, 1971.
- [54] С. М. Натанзон, “Клейновы поверхности”, *ВМН*, **45**:6(276) (1990), 47–90.
- [55] S. M. Natanson, *Moduli of Riemann Surfaces, Real Algebraic Curves and Their Superanalogs*, *Translations of Mathematical Monographs*, **225**, AMS, Providence, RI, 2004.
- [56] С. М. Натанзон, “Дисковые одинарные числа Гурвица”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:1 (2010), 44–58.
- [57] А. Д. Медных, “Определение числа неэквивалентных накрытий над компактной римановой поверхностью”, *Докл. АН СССР*, **239**:2 (1978), 269–271.
- [58] С. К. Ландо, А. К. Звонкин, *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО, М., 2010.
- [59] A. A. Alexeevski, S. M. Natanson, “Noncommutative two-dimensional field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves”, *Selecta Math. (N. S.)*, **12**:3–4 (2006), 307–377, arXiv:math/0202164.
- [60] А. В. Алексеевский, С. М. Натанзон, “Алгебра двудольных графов и числа Гурвица лоскутных поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), 3–24.
- [61] J. W. van de Leur, A. Yu. Orlov, “Pfaffian and determinantal tau functions I”, *Lett. Math. Phys.*, **105**:11 (2015), 1499–1531.
- [62] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.

- [63] А. К. Погребков, В. Н. Сушко, “Квантовые солитоны и их связь с фермионными полями при $(\sin \varphi)_2$ -взаимодействии”, *ТМФ*, **26**:3 (1976), 419–424.
- [64] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, “Integrability of Hurwitz partition functions. I. Summary”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:4 (2012), 045209, 10 pp., arXiv: 1103.4100.
- [65] I. P. Goulden, D. M. Jackson, “Transitive factorizations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:1 (1997), 51–60.
- [66] Ya. Eliashberg, “Symplectic field theory and its applications”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v.1 (Madrid, Spain, August 22–26, 2006), eds. M. Sanz-Solé, J. Soria, J. L. Varona, J. Verdera, EMS, Zürich, 2007, 117–246.
- [67] A. Yu. Orlov and T. Shiota, “Schur function expansion for normal matrix model and associated discrete matrix models”, *Phys. Lett. A*, **343**:5 (2005), 384–396.
- [68] A. Alexandrov and A. V. Zabrodin, “Free fermions and tau-functions”, *J. Geom. Phys.*, **67** (2013), 37–80, arXiv: 1212.6049.
- [69] K. Takasaki, “Generalized string equations for double Hurwitz numbers”, *J. Geom. Phys.*, **62**:5 (2012), 1135–1156.
- [70] M. E. Kazarian and S. K. Lando, “An algebro-geometric proof of Witten’s conjecture”, *J. Amer. Math. Soc.*, **20**:4 (2007), 1079–1089.