Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Об одном подходе к моделированию искусственных генных сетей, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 3, 547–568

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:59:54

© 2018 г. С. Д. Глызин*, А. Ю. Колесов*, Н. Х. Розов†

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИСКУССТВЕННЫХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ

Предлагается новая математическая модель репрессилатора – простейшей кольцевой генной сети, состоящей из трех элементов. Рассматриваемая модель представляет собой некоторую трехмерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящую от одного параметра. Исследуются вопросы о существовании и устойчивости в этой системе релаксационного периодического движения.

Ключевые слова: репрессилатор, генные сети, релаксационный цикл, асимптотика, устойчивость.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9321>

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Интерес к искусственным генетическим осцилляторам вызван тем обстоятельством, что они являются упрощенными моделями таких ключевых биологических процессов, как клеточный цикл и циркадные ритмы. Простейший генетический осциллятор, предложенный в работе [1] и названный репрессилатором, состоит из трех элементов. Каждый из этих элементов однонаправленно ингибирует соседний (см. рис. 1, на котором элемент A подавляет синтез B , элемент B подавляет синтез C , а третий элемент C , замыкая цикл, подавляет синтез A).

Математическая модель системы, показанной на рис. 1, имеет вид

$$\dot{m}_j = -m_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^\gamma} + \alpha_0, \quad \dot{u}_j = \beta(m_j - u_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.10160.2017/5.1) и при поддержке РФФИ (грант № 15-01-04066_a).

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, colesov@uniyar.ac.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: fpo.mgu@mail.ru

Рис. 1

где $u_0 = u_3$. Следуя работе [1], считаем, что каждый элемент осциллятора представляет собой набор из мРНК (матричной рибонуклеиновой кислоты) с концентрацией m_j и белка с концентрацией u_j . Предполагаем далее, что изменение во времени концентраций m_j характеризуется процессами синтеза и деградации. Первый из этих процессов описывается функцией $\alpha/(1 + u_{j-1}^\gamma)$, где u_{j-1} – концентрация белка-репрессора для j -й мРНК, $\gamma = \text{const} > 0$ – коэффициент кооперативности, $\alpha = \text{const} > 0$ – скорость транскрипции в отсутствие репрессора. Второй процесс описывается линейным слагаемым “ $-m_j$ ”. И, наконец, аддитивная добавка $\alpha_0 > 0$ в уравнении для m_j отвечает за утечку промотора.

В случае концентраций белков u_j ситуация проще. А именно, предполагаем, что их динамика представлена линейными процессами синтеза (слагаемое βm_j в уравнении для u_j из системы (1.1)) и деградации (слагаемое “ $-\beta u_j$ ” в том же уравнении). Здесь $\beta = \text{const} > 0$ – отношение скорости деградации белка к скорости деградации мРНК.

Как правило, исследование модели (1.1) проводится в предположении о малости β и α_0 . В этой ситуации после замены $\beta t \rightarrow t$ и отбрасывания добавки α_0 получается сингулярно возмущенная система, к которой затем применяется известный принцип сведения Тихонова [2]. Результатом этого сведения оказывается система

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^\gamma}, \quad j = 1, 2, 3, \quad u_0 = u_3. \quad (1.2)$$

Вопрос об автоколебаниях системы (1.2) и аналогичных систем, возникающих при моделировании генных сетей, изучался многими авторами (см., например, [3]–[8]). Из содержащихся в указанных работах результатов аналитических и численных исследований вытекает существование у модели (1.2) при $\gamma > 2$ и при подходящем увеличении α устойчивого цикла, обладающего свойством самосимметричности (инвариантности по отношению к циклическим перестановкам координат). Из упомянутого свойства следует, что этот цикл допускает представление вида

$$(u_1, u_2, u_3) = (u(t), u(t + h), u(t + 2h)), \quad (1.3)$$

где $h > 0$ – фазовый сдвиг, и имеет период $T = 3h$.

Описанный выше характер взаимодействия концентраций u_j и m_j вполне аналогичен взаимодействию шести экологических популяций – трех хищников и трех жертв. Действительно, предположим, что u_j , $j = 1, 2, 3$, и m_j , $j = 1, 2, 3$, – плотности численности популяций хищников и жертв соответственно. Тогда в силу (1.1)

каждый хищник u_j питается только одной жертвой m_j (при $m_j \equiv 0$ численность u_j затухает по экспоненциальному закону) и в то же время оказывает давление только на жертву m_{j+1} . Последнее выражается в том, что при увеличении u_j уменьшается скорость роста численности m_{j+1} . Кроме того, при отсутствии хищника-репрессора ($u_{j-1} \equiv 0$) численность m_j стремится при $t \rightarrow +\infty$ к пороговому значению $m_j = \alpha + \alpha_0$.

Для математического моделирования интересующей нас генной сети приведенная экологическая интерпретация позволяет воспользоваться подходом Колесова [9]. Упомянутый подход приводит к системе

$$\dot{m}_j = \frac{r_1}{1+a}[1+a(1-u_{j-1})-m_j]m_j + \alpha, \quad \dot{u}_j = r_2[m_j - u_j]u_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.4)$$

где $u_0 = u_3$ и все постоянные r_1, r_2, a, α положительны. Подчеркнем, что в уравнение для m_j , нарушая его вольтерровскую структуру, мы специально добавили последнее слагаемое α , аналогичное последнему слагаемому α_0 в (1.1). Как будет показано ниже, в отличие от системы (1.1), где можно положить $\alpha_0 = 0$, в нашем случае требование $\alpha > 0$ является обязательным.

Как и система (1.1), новая математическая модель репрессилатора (1.4) допускает некоторое упрощение. А именно, предположим сначала, что $r_2 \gg 1$, $r_1 = r \sim 1$. Тогда согласно принципу сведения [2] при $r_2 \rightarrow +\infty$ имеем $m_j = u_j$, $j = 1, 2, 3$. Что же касается компонент u_j , то для них получаем систему

$$\dot{u}_j = \frac{r}{1+a}[1+a(1-u_{j-1})-u_j]u_j + \alpha, \quad j = 1, 2, 3, \quad u_0 = u_3. \quad (1.5)$$

На следующем этапе упрощения устремим в (1.5) параметр a к $+\infty$ и в получившейся системе выполним замены $rt \rightarrow t$, $\alpha/r \rightarrow \alpha$. В результате приходим к аналогичной (1.2) трехмерной модели репрессилатора

$$\dot{u}_j = (1 - u_{j-1})u_j + \alpha, \quad j = 1, 2, 3, \quad u_0 = u_3. \quad (1.6)$$

Локальный и численный анализ системы (1.6) приводит к выводу, что ее динамика по параметру α достаточно проста. А именно, в инвариантном конусе $K \subset \mathbb{R}^3$ векторов с положительными координатами она имеет единственное состояние равновесия

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_*, \quad u_* = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}, \quad (1.7)$$

экспоненциально устойчивое при $\alpha > 2$ и неустойчивое при $0 < \alpha < 2$. Далее, при уменьшении параметра α и при прохождении его через критическое значение $\alpha = 2$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа от состояния равновесия (1.7) ответвляется устойчивый цикл вида (1.3). Этот цикл сохраняется при всех $\alpha \in (0, 2)$, а при $\alpha \rightarrow 0$ приобретает релаксационный характер. Наглядное представление о нем дает график зависимости от t фигурирующей в (1.3) функции $u(t)$ при $\alpha = 0.05$ (см. рис. 2).

В настоящей статье рассматриваются вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости цикла (1.3) системы (1.6) при $\alpha \ll 1$. Точнее говоря, анализу подлежит система

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right)x + \varepsilon^2, \quad \dot{y} = \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)y + \varepsilon^2, \quad \dot{z} = \left(1 - \frac{y}{\varepsilon}\right)z + \varepsilon^2, \quad (1.8)$$

Рис. 2

Рис. 3

получающаяся из (1.6) при заменах $u_1 = x/\alpha$, $u_2 = y/\alpha$, $u_3 = z/\alpha$ и при $\alpha = \varepsilon \ll 1$. Для этой системы ниже будет установлено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Найдется такое достаточно малое положительное ε_0 , что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ система (1.8) допускает экспоненциально орбитально устойчивый самосимметричный цикл*

$$C: (x, y, z) = (x_*(t, \varepsilon), x_*(t + h(\varepsilon), \varepsilon), x_*(t + 2h(\varepsilon), \varepsilon)) \in K \quad (1.9)$$

периода $T = 3h(\varepsilon)$. Кроме того, для функции $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(0, \varepsilon) \equiv 1$, и фазового сдвига $h(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} x_*(t, \varepsilon) &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) e^{-1} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \\ \min_{0 \leq t \leq T} x_*(t, \varepsilon) &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \frac{\varepsilon^3}{\ln(1/\varepsilon)} e, \\ h(\varepsilon) &= \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Наглядное представление о цикле (1.9) дает рис. 3, где изображена его фазовая траектория при $\varepsilon = 0.05$.

2. ОСНОВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Ниже будет изложено геометрическое доказательство теоремы 1, основанное на асимптотическом анализе оператора последования Пуанкаре по траекториям системы (1.8). В связи с этим предпримем некоторые вспомогательные построения.

Основная особенность цикла системы (1.8) заключается в том, что в любой момент времени t только одна его компонента имеет порядок единицы или асимптотически велика, а две остальные асимптотически малы. Принимая во внимание это обстоятельство, для произвольного вектора $w = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$, принадлежащего множеству

$$\mathcal{U} = \{w = (y_0, z_0) : y_0 > 0, z_0 > 0\}, \quad (2.1)$$

рассмотрим решение $(x(t, w, \varepsilon), y(t, w, \varepsilon), z(t, w, \varepsilon))$, $t \geq 0$, системы (1.8) с начальными условиями

$$x|_{t=0} = 1, \quad y|_{t=0} = \varepsilon^3 y_0, \quad z|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)} z_0 \quad (2.2)$$

(причина выбора таких порядков малости y, z прояснится в последующем). Далее, обозначим через $t = h(w, \varepsilon)$ первый положительный корень уравнения

$$z(t, w, \varepsilon) = 1 \quad (2.3)$$

(если таковой существует) и определим вспомогательный оператор

$$w \rightarrow \Pi_0(w, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left(x(t, w, \varepsilon) \varepsilon^{-3}, y(t, w, \varepsilon) \varepsilon^{-1} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \Big|_{t=h(w, \varepsilon)}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим также вектор

$$w_* = (1, 1) \quad (2.5)$$

из множества (2.1).

Подробный асимптотический анализ оператора (2.4) содержится в следующем разделе. Здесь же приведем итоговый результат.

ТЕОРЕМА 2. *По любому компактному множеству $\Omega \subset \mathcal{U}$ можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ оператор (2.4) определен на Ω и удовлетворяет при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическому равенству*

$$\max_{w \in \Omega} (\|\Pi_0(w, \varepsilon) - w_*\|_{\mathbb{R}^2} + \|\partial_w \Pi_0(w, \varepsilon)\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2}) = O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right), \quad (2.6)$$

где ∂_w – производная Фреше по w .

Обратимся к доказательству теоремы 1 и заметим, что всю его техническую часть вбирает в себя теорема 2. Действительно, обозначим через Π оператор последования Пуанкаре по траекториям системы (1.8), определенный на секущей плоскости $\{(x, y, z) : x = 1\}$ посредством соотношения

$$\Pi : \left(1, \varepsilon^3 y_0, \frac{\varepsilon z_0}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \rightarrow (x(t, w, \varepsilon), y(t, w, \varepsilon), z(t, w, \varepsilon))|_{t=T(w, \varepsilon)}, \quad (2.7)$$

Рис. 4

где $t = T(w, \varepsilon)$ – второй положительный корень уравнения $x(t, w, \varepsilon) = 1$, а w принадлежит компактному множеству $\Omega \subset \mathcal{U}$. Будем считать это множество выбранным таким образом, что $w_* \in \text{int } \Omega$, где w_* – вектор (2.5), $\text{int } \Omega$ – внутренность Ω .

В свою очередь, оператор (2.7) можно представить в виде суперпозиции вида $\Pi_3 \circ \Pi_2 \circ \Pi_1$, где Π_1 – оператор соответствия по траекториям системы (1.8), действующий из плоскости $\{(x, y, z): x = 1\}$ в $\{(x, y, z): z = 1\}$, а Π_2, Π_3 – аналогичные операторы, осуществляющие соответствие между плоскостями $\{(x, y, z): z = 1\}$, $\{(x, y, z): y = 1\}$ и $\{(x, y, z): y = 1\}$, $\{(x, y, z): x = 1\}$ (см. рис. 4, иллюстрирующий действия этих операторов). Из способа определения Π_0 (см. (2.4)) автоматически следует, что

$$\Pi_1: \left(1, \varepsilon^3 y_0, \frac{\varepsilon z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right) \rightarrow \left(\varepsilon^3 y_{(1)}, \frac{\varepsilon z_{(1)}}{\ln(1/\varepsilon)}, 1\right), \quad (2.8)$$

где $w_{(1)} = (y_{(1)}, z_{(1)}) = \Pi_0(w, \varepsilon)$. Далее, в силу (2.6) имеем $w_{(1)} = w_* + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, и, следовательно, $w_{(1)} \in \Omega$ (так как, напомним, $w_* \in \text{int } \Omega$).

При построении оператора Π_2 мы должны рассмотреть задачу Коши для системы (1.8) с начальными условиями

$$x|_{t=0} = \varepsilon^3 y_{(1)}, \quad y|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)} z_{(1)}, \quad z|_{t=0} = 1. \quad (2.9)$$

Но поскольку задача (1.8), (2.9) после замены переменных $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (z, x, y)$ и последующего переобозначения $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \rightarrow (x, y, z)$ переходит в задачу вида (1.8), (2.2) (с заменой $(y_0, z_0) \in \Omega$ на $(y_{(1)}, z_{(1)}) \in \Omega$), то для Π_2 получается аналогичное (2.8) представление

$$\Pi_2: \left(\varepsilon^3 y_{(1)}, \frac{\varepsilon z_{(1)}}{\ln(1/\varepsilon)}, 1\right) \rightarrow \left(\frac{\varepsilon z_{(2)}}{\ln(1/\varepsilon)}, 1, \varepsilon^3 y_{(2)}\right), \quad (2.10)$$

где $w_{(2)} = (y_{(2)}, z_{(2)}) = \Pi_0(w_{(1)}, \varepsilon) \in \Omega$. Что же касается оператора Π_3 , то для него из тех же соображений имеем

$$\Pi_3: \left(\frac{\varepsilon z_{(2)}}{\ln(1/\varepsilon)}, 1, \varepsilon^3 y_{(2)} \right) \rightarrow \left(1, \varepsilon^3 y_{(3)}, \frac{\varepsilon z_{(3)}}{\ln(1/\varepsilon)} \right), \quad (2.11)$$

где $w_{(3)} = (y_{(3)}, z_{(3)}) = \Pi_0(w_{(2)}, \varepsilon) \in \Omega$.

Возвращаясь к оператору (2.7), заметим, что в координатах (y_0, z_0) он записывается в виде

$$\tilde{\Pi}: (y_0, z_0) \rightarrow \left(y(t, w, \varepsilon) \varepsilon^{-3}, z(t, w, \varepsilon) \varepsilon^{-1} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \Big|_{t=T(w, \varepsilon)}. \quad (2.12)$$

В свою очередь, в силу соотношений (2.8), (2.10), (2.11) оператор (2.12) действует из Ω в Ω и задается равенством $\tilde{\Pi} = \Pi_0^3$, где Π_0 – оператор (2.4). Остается добавить, что, во-первых, свойство (2.6) гарантирует существование у Π_0 в множестве Ω единственной экспоненциально устойчивой неподвижной точки $w = w_*(\varepsilon)$, $w_*(\varepsilon) \rightarrow w_*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а во-вторых, в исходной системе (1.8) данной точке соответствует экспоненциально орбитально устойчивый цикл. А поскольку этот цикл является самосимметричным (плоскости $\{(x, y, z): x = 1\}$, $\{(x, y, z): z = 1\}$ и $\{(x, y, z): y = 1\}$ разбивают его на три участка, переходящих друг в друга при циклических перестановках координат), то он допускает представление (1.9), в котором

$$x_*(t, \varepsilon) = x(t, w, \varepsilon)|_{w=w_*(\varepsilon)}, \quad h(\varepsilon) = h(w, \varepsilon)|_{w=w_*(\varepsilon)}. \quad (2.13)$$

Итак, проблема доказательства теоремы 1 свелась к доказательству теоремы 2. В процессе обоснования последней для функций (2.13) будут получены требуемые асимптотические равенства (1.10).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Выберем произвольный компакт $\Omega \subset \mathcal{U}$ и обратимся к задаче Коши (1.8), (2.2) при $w = (y_0, z_0) \in \Omega$. Ниже будут получены равномерные по $w \in \Omega$ асимптотические формулы при $\varepsilon \rightarrow 0$ для компонент $x(t, w, \varepsilon)$, $y(t, w, \varepsilon)$, $z(t, w, \varepsilon)$ ее решения и их производных по y_0, z_0 на пяти различных промежутках изменения t .

На первом этапе рассмотрим отрезок времени

$$0 \leq t \leq \bar{t}, \quad \bar{t} = \lambda_1 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.1)$$

где $\lambda_1 \in (0, 1)$ произвольно фиксировано. При указанных t выполним в (1.8) замены

$$x = x_1, \quad y = \varepsilon^3 y_1, \quad z = \frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)} z_1. \quad (3.2)$$

В результате приходим к задаче Коши

$$\dot{x}_1 = \left(1 - \frac{z_1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) x_1 + \varepsilon^2, \quad \varepsilon \dot{y}_1 = (\varepsilon - x_1) y_1 + 1, \quad (3.3)$$

$$\dot{z}_1 = (1 - \varepsilon^2 y_1) z_1 + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon},$$

$$x_1|_{t=0} = 1, \quad y_1|_{t=0} = y_0, \quad z_1|_{t=0} = z_0. \quad (3.4)$$

Ее решение обозначим через $(x_1(t, w, \varepsilon), y_1(t, w, \varepsilon), z_1(t, w, \varepsilon))$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. На отрезке времени (3.1) для компонент $x_1(t, w, \varepsilon)$, $z_1(t, w, \varepsilon)$ решения задачи Коши (3.3), (3.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место асимптотические представления

$$x_1 = \bar{x}(t, z_0, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)e^t, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon^2}{\ln(1/\varepsilon)}\right)(t+1)e^{2t}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial z_0} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial z_0}(t, z_0, \varepsilon) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\ln(1/\varepsilon)}\right)(t+1)e^{2t}, \quad (3.6)$$

$$z_1 = \bar{z}(t, z_0, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)e^t, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = O(\varepsilon^2)(t+1)e^t, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial z_0} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z_0}(t, z_0, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)(t+1)e^t, \quad (3.8)$$

где

$$\bar{x}(t, z_0, \varepsilon) = \exp\left\{t - \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}(e^t - 1) - \varepsilon(e^t - 1 - t)\right\}, \quad (3.9)$$

$$\bar{z}(t, z_0, \varepsilon) = z_0 e^t + (e^t - 1)\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.10)$$

Что же касается компоненты $y_1(t, w, \varepsilon)$, то она на любом отрезке времени вида $\delta \leq t \leq \bar{t}$, $\delta = \text{const} > 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускает представления

$$y_1 = \bar{y}(t, z_0, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)e^{-t}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon^2}{\ln(1/\varepsilon)}\right)(t+1), \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial z_0} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial z_0}(t, z_0, \varepsilon) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\ln(1/\varepsilon)}\right)(t+1), \quad (3.12)$$

где

$$\bar{y}(t, z_0, \varepsilon) = \frac{1}{\bar{x}} + \frac{2\varepsilon}{\bar{x}^2} - \frac{\bar{z}}{\bar{x}^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (3.13)$$

а $\bar{x}$, $\bar{z}$ – функции (3.9), (3.10). Кроме того, остатки в формулах (3.5)–(3.8), (3.11), (3.12) имеют указанные порядки малости равномерно по t, w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Анализ задачи Коши (3.3), (3.4) проведем при априорных предположениях

$$y_1 \leq M_1 e^{-t}, \quad \left| \frac{\partial y_1}{\partial y_0} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial y_1}{\partial z_0} \right| \leq M_3. \quad (3.14)$$

Здесь и ниже через M_1 , M_2 и т. д. обозначаются некоторые универсальные (не зависящие от t, w, ε) положительные константы, точные значения которых несущественны.

Обратимся сначала к третьему уравнению системы (3.3), считая в нем y_1 уже известной функцией, удовлетворяющей оценкам (3.14). Объединяя эти оценки с формулой

$$z_1 = z_0 \exp\left\{\int_0^t (1 - \varepsilon^2 y_1) d\tau\right\} + \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (1 - \varepsilon^2 y_1) ds\right\} d\tau \cdot \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.15)$$

нетрудно убедиться в справедливости при $\varepsilon \rightarrow 0$ для компоненты $z_1(t, w, \varepsilon)$ равномерных по t, w асимптотических представлений (3.7), (3.8).

В случае компоненты $x_1(t, w, \varepsilon)$ рассуждения аналогичны: обращаясь к первому уравнению системы (3.3) и считая в нем z_1 уже известной функцией, для x_1 получаем аналогичную (3.15) явную формулу. Далее, учитывая в этой формуле соотношения (3.7), (3.8), приходим к требуемым асимптотическим представлениям (3.5), (3.6).

Для отыскания асимптотики компоненты $y_1(t, w, \varepsilon)$ заметим следующее: из структуры правых частей системы (3.3) и из результатов работ [2], [10] вытекает существование у этой системы экспоненциально орбитально устойчивого (с показателем экспоненты порядка ε^{-1}) гладкого инвариантного многообразия медленных движений. Упомянутое многообразие задается равенствами вида

$$\begin{aligned} & \{(x_1, y_1, z_1) : y_1 = H(x_1, z_1, \varepsilon), (x_1, z_1) \in \mathcal{V}_1\}, \\ & \mathcal{V}_1 = \left\{ (x_1, z_1) : 1 \leq x_1 \leq M_4 \ln^{\lambda_1} \frac{1}{\varepsilon}, |z_1| \leq M_5 \ln^{\lambda_1} \frac{1}{\varepsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где постоянные $M_4, M_5 > 0$ произвольно фиксированы, а функция H при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускает равномерные по $(x_1, z_1) \in \mathcal{V}_1$ асимптотические представления

$$H = \frac{1}{x_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{x_1} \left(2 - \frac{z_1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) + \frac{1}{x_1^2} O(\varepsilon^2) \right), \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{x_1} \left(2 - \frac{z_1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) + \frac{1}{x_1^2} O(\varepsilon^2) \right), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{1}{x_1^2} \left(\frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)} + \frac{1}{x_1} O\left(\frac{\varepsilon^2}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right). \quad (3.19)$$

Далее, при увеличении t происходит асимптотически быстрое “падение” фазовой точки $(x_1(t, w, \varepsilon), y_1(t, w, \varepsilon), z_1(t, w, \varepsilon))$ на многообразие (3.16) и последующее движение в асимптотически малой его окрестности (по прошествии времени $t = \delta$, $\delta = \text{const} > 0$, близость упомянутой фазовой точки к многообразию (3.16) оценивается сверху величиной порядка $e^{-c/\varepsilon}$, $c = \text{const} > 0$). Тем самым, отбрасывая экспоненциально малые добавки, при $t \geq \delta$ имеем

$$y_1(t, w, \varepsilon) = H(x_1, z_1, \varepsilon)|_{x_1=x_1(t, w, \varepsilon), z_1=z_1(t, w, \varepsilon)}. \quad (3.20)$$

Для того чтобы обеспечить применимость соотношения (3.20) на интересующем нас асимптотически большом отрезке времени $\delta \leq t \leq \bar{t}$, подберем соответствующим образом постоянные M_4, M_5 из (3.16) (выбор этих постоянных означает, что мы рассматриваем не все многообразие медленных движений, а лишь определенный его участок). Опираясь на асимптотические представления для $x_1(t, w, \varepsilon)$, $z_1(t, w, \varepsilon)$ (см. (3.5), (3.7)) и учитывая оценку $\lambda_1 < 1$, нетрудно увидеть, что требуемые в (3.20) условия

$$1 \leq x_1(t, w, \varepsilon) \leq M_4 \ln^{\lambda_1} \frac{1}{\varepsilon}, \quad z_1(t, w, \varepsilon) \leq M_5 \ln^{\lambda_1} \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.21)$$

будут заведомо выполняться при $M_4 > 1, M_5 > \max_{w \in \Omega} z_0$.

Итак, мы убедились, что при $\delta \leq t \leq \bar{t}$ оценки (3.21) действительно имеют место, а значит, при указанных t справедлива и формула (3.20). Что же касается интересующих нас асимптотических равенств (3.11)–(3.13), то они получаются из нее при повторном разложении по ε с учетом уже установленной информации (3.5)–(3.10), (3.17)–(3.19).

Отдельно остановимся на проверке априорных предположений (3.14), при которых были выведены представления (3.5)–(3.13). Отметим сразу, что на промежутке $0 \leq t \leq \delta$ конечной длины их справедливость очевидна. В случае же асимптотически большого промежутка $\delta \leq t \leq \bar{t}$ из формул (3.11)–(3.13) заключаем, что нужные оценки (3.14) автоматически выполняются при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ с любыми фиксированными константами $M_1 > 1$, $M_2, M_3 > 0$. Лемма доказана.

На втором этапе выполним в системе (1.8) замену времени

$$t = \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \tau \quad (3.22)$$

и аналогичные (3.2) замены переменных

$$x = x_2 \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad y = \frac{\varepsilon^3}{\ln(1/\varepsilon)} y_2, \quad z = \varepsilon z_2. \quad (3.23)$$

В результате приходим к системе

$$\frac{dx_2}{d\tau} = (1 - z_2)x_2 + \varepsilon\mu, \quad \mu \frac{dy_2}{d\tau} = (\mu - x_2)y_2 + 1, \quad \frac{dz_2}{d\tau} = (1 - \varepsilon\mu y_2)z_2 + \varepsilon, \quad (3.24)$$

где $\mu = \varepsilon / \ln(1/\varepsilon)$. Полученную систему будем рассматривать на отрезке $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, где

$$\tau_1 = -(1 - \lambda_1) \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.25)$$

а $\tau_2 = \tau_2(z_0, \varepsilon)$ – положительный корень уравнения

$$\exp(\tau - z_0 e^\tau) = \varepsilon \ln^{n_1} \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.26)$$

при некотором фиксированном $n_1 \in \mathbb{N}$. Несложный анализ уравнения (3.26) приводит к выводу, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \ln \left(\frac{1}{z_0} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + (1 - n_1) \frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} - \frac{\ln z_0}{\ln(1/\varepsilon)} + O \left(\frac{\ln^2(\ln(1/\varepsilon))}{\ln^2(1/\varepsilon)} \right), \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial z_0} &= \frac{e^{\tau_2}}{1 - z_0 e^{\tau_2}} = -\frac{1}{z_0} + O \left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

В соответствии с предыдущим этапом и заменами (3.2), (3.22), (3.23) мы должны дополнить систему (3.24) начальными условиями

$$x_2|_{\tau=\tau_1} = x_{2,0}(w, \varepsilon), \quad y_2|_{\tau=\tau_1} = y_{2,0}(w, \varepsilon), \quad z_2|_{\tau=\tau_1} = z_{2,0}(w, \varepsilon), \quad (3.28)$$

где

$$x_{2,0} = \frac{x_1(\bar{t}, w, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad y_{2,0} = y_1(\bar{t}, w, \varepsilon) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad z_{2,0} = \frac{z_1(\bar{t}, w, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

а τ_1 – момент времени (3.25). Обозначим через $x_2(\tau, w, \varepsilon)$, $y_2(\tau, w, \varepsilon)$, $z_2(\tau, w, \varepsilon)$ компоненты решения задачи Коши (3.24), (3.28) и выявим их асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подчеркнем, что асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ фигурирующих в (3.28) функций $x_{2,0}$, $y_{2,0}$, $z_{2,0}$ уже известна: из соотношений (3.5)–(3.13) вытекают равномерные по $w \in \Omega$ представления

$$\begin{aligned} x_{2,0} &= \exp\left(-\frac{z_0}{\ln^{1-\lambda_1}(1/\varepsilon)} + \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right) \ln^{\lambda_1-1} \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon \ln^{2\lambda_1-1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial x_{2,0}}{\partial y_0} &= O\left(\frac{\varepsilon^2 \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^{2-2\lambda_1}(1/\varepsilon)}\right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{2,0}}{\partial z_0} &= \frac{\partial}{\partial z_0} \left[\exp\left(-\frac{z_0}{\ln^{1-\lambda_1}(1/\varepsilon)} + \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right) \ln^{\lambda_1-1} \frac{1}{\varepsilon} \right] + O\left(\varepsilon \ln^{3\lambda_1-2} \frac{1}{\varepsilon}\right); \\ y_{2,0} &= \exp\left(\frac{z_0}{\ln^{1-\lambda_1}(1/\varepsilon)} - \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right) \ln^{1-\lambda_1} \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial y_{2,0}}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon^2 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{2,0}}{\partial z_0} &= \frac{\partial}{\partial z_0} \left[\exp\left(\frac{z_0}{\ln^{1-\lambda_1}(1/\varepsilon)} - \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right) \ln^{1-\lambda_1} \frac{1}{\varepsilon} \right] + O\left(\varepsilon \ln^{\lambda_1} \frac{1}{\varepsilon}\right); \\ z_{2,0} &= z_0 \ln^{\lambda_1-1} \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon \ln^{\lambda_1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\partial z_{2,0}}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon^2 \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^{1-\lambda_1}(1/\varepsilon)}\right), \\ \frac{\partial z_{2,0}}{\partial z_0} &= \ln^{\lambda_1-1} \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\frac{\varepsilon^2 \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^{1-\lambda_1}(1/\varepsilon)}\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Что касается самого решения задачи (3.24), (3.28), то для него справедлива следующая

ЛЕММА 2. На отрезке $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ компоненты $x_2(\tau, w, \varepsilon)$, $z_2(\tau, w, \varepsilon)$ допускают равномерные по τ, w асимптотические представления

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(1 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) e^\tau\right) \exp\left\{\tau - z_0 e^\tau + \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right\}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon^2 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \exp(2\tau - z_0 e^\tau), \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_0} &= \left(1 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) e^\tau\right) \frac{\partial}{\partial z_0} \exp\left\{\tau - z_0 e^\tau + \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right\}; \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(z_0 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)\right) e^\tau, \quad \frac{\partial z_2}{\partial y_0} = O\left(\varepsilon^2 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) e^\tau, \\ \frac{\partial z_2}{\partial z_0} &= \left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\ln^{n_1-1}(1/\varepsilon)}\right)\right) e^\tau, \end{aligned} \quad (3.33)$$

а для компоненты $y_2(\tau, w, \varepsilon)$ на любом отрезке вида $\tau_1 + \delta \leq \tau \leq \tau_2$, где постоянная $\delta > 0$ произвольно фиксирована, имеют место равномерные по τ, w асимптотические представления

$$\begin{aligned} y_2 &= \left(1 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) e^\tau + O\left(\frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)}\right) (e^\tau + 1) \exp(-\tau + z_0 e^\tau)\right) \times \\ &\quad \times \exp\left\{-\tau + z_0 e^\tau - \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right\}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon^2 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \exp(z_0 e^\tau), \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_0} &= \left(1 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) e^\tau + O\left(\frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)}\right) (e^\tau + 1) \exp(-\tau + z_0 e^\tau)\right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial z_0} \exp\left\{-\tau + z_0 e^\tau - \frac{z_0}{\ln(1/\varepsilon)}\right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование леммы базируется на тех же идеях, что и доказательство леммы 1. А именно, будем считать, что при некоторых $M_1, M_2, M_3 > 0$ выполнены априорные оценки

$$y_2 \leq \frac{M_1}{\varepsilon \ln^{n_1}(1/\varepsilon)}, \quad \left| \frac{\partial y_2}{\partial y_0} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial y_2}{\partial z_0} \right| \leq \frac{M_3}{\varepsilon \ln^{n_1-1}(1/\varepsilon)}. \quad (3.35)$$

Тогда, предполагая функцию y_2 уже известной и дополняя третье уравнение системы (3.24) начальным условием (3.31) при $\tau = \tau_1$, для z_2 после некоторых преобразований получаем равномерные по $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $w \in \Omega$ асимптотические формулы (3.33). В свою очередь, опираясь на асимптотические представления (3.29), (3.33) и считая известной функцию z_2 , из первого уравнения системы (3.24) выводим группу формул (3.32).

Как и в предыдущем случае, при анализе компоненты $y_2(\tau, w, \varepsilon)$ воспользуемся результатами из [2], [10]. Из упомянутых результатов вытекает существование у системы (3.24) аналогичного (3.16) инвариантного многообразия медленных движений:

$$\begin{aligned} &\{(x_2, y_2, z_2): y_2 = H(x_2, z_2, \varepsilon, \mu), (x_2, z_2) \in \mathcal{V}_2\}, \\ \mathcal{V}_2 &= \left\{ (x_2, z_2): M_4 \varepsilon \ln^{n_1} \frac{1}{\varepsilon} \leq x_2 \leq M_5, |z_2| \leq M_6 \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где $M_4, M_5, M_6 > 0$ – произвольно фиксированные константы, а для H при $\mu \rightarrow 0$ справедливы равномерные по $(x_2, z_2) \in \mathcal{V}_2$ и ε асимптотические равенства

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{x_2} \left(1 + \mu \frac{2 - z_2}{x_2} + \frac{1}{x_2^2} O(\mu^2) \right), \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} &= -\frac{1}{x_2^2} \left(1 + 2\mu \frac{2 - z_2}{x_2} + \frac{1}{x_2^2} O(\mu^2) \right), \\ \frac{\partial H}{\partial z_2} &= \frac{1}{x_2} \left(-\frac{\mu}{x_2} + \frac{1}{x_2^2} O(\mu^2) \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

При увеличении τ от $\tau = \tau_1$ до $\tau = \tau_1 + \delta$, где $\delta = \text{const} > 0$, интересующая нас траектория $(x_2(\tau, w, \varepsilon), y_2(\tau, w, \varepsilon), z_2(\tau, w, \varepsilon))$ системы (3.24) успевает приблизиться

к многообразию (3.36) на расстояние порядка $\exp(-c \ln^{\lambda_1}(1/\varepsilon)/\varepsilon)$, $c = \text{const} > 0$. А это значит, что при $\tau \geq \tau_1 + \delta$ функция $y_2(\tau, w, \varepsilon)$ с точностью до экспоненциально малой добавки задается аналогичным (3.20) равенством

$$y_2(\tau, w, \varepsilon) = H(x_2, z_2, \varepsilon, \mu)|_{x_2=x_2(\tau, w, \varepsilon), z_2=z_2(\tau, w, \varepsilon), \mu=\varepsilon/\ln(1/\varepsilon)}. \quad (3.38)$$

Как и ранее, для того чтобы придать соотношению (3.38) законную силу, необходимо убедиться, что $(x_2(\tau, w, \varepsilon), z_2(\tau, w, \varepsilon)) \in \mathcal{V}_2$ при всех $\tau_1 + \delta \leq \tau \leq \tau_2$. Из формул (3.32), (3.33) несложно вывести, что указанное включение заведомо справедливо при

$$M_4 \in (0, 1), \quad M_5 > e^{-1} \max_{w \in \Omega} \frac{1}{}, \quad M_6 > 1. \quad (3.39)$$

Далее, считая неравенства (3.39) выполненными (напомним, что постоянные M_4, M_5, M_6 в нашем распоряжении), снова разложим правую часть (3.38) по ε . В результате, опираясь на представления (3.32), (3.33), (3.37), для y_2 получаем требуемую асимптотику (3.34).

Для завершения доказательства леммы осталось проверить априорные неравенства (3.35). Обратим внимание, что на отрезке $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_1 + \delta$ конечной длины их справедливость очевидна, а на асимптотически большом отрезке $\tau_1 + \delta \leq \tau \leq \tau_2$ эти условия вытекают из представлений (3.34). Точнее говоря, они выполняются при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ с константами $M_1 > 1, M_2 > 0, M_3 > \max_{w \in \Omega}(1/z_0)$. Лемма доказана.

Прежде чем перейти к следующему шагу, введем в рассмотрение положительные корни $\tau = \bar{\tau}(z_0, \varepsilon)$ и $\tau = \tau_3(z_0, \varepsilon)$ уравнений $\exp(\tau - z_0 e^\tau) = \varepsilon$ и $\exp(\tau - z_0 e^\tau) = \varepsilon/\ln^{n_2}(1/\varepsilon)$, $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq 5$, соответственно. Нетрудно увидеть, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ указанные корни допускают асимптотику

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \ln\left(\frac{1}{z_0} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} - \frac{\ln z_0}{\ln(1/\varepsilon)} + O\left(\frac{\ln^2(\ln(1/\varepsilon))}{\ln^2(1/\varepsilon)}\right), \\ \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z_0} &= \frac{e^{\bar{\tau}}}{1 - z_0 e^{\bar{\tau}}} = -\frac{1}{z_0} + O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right); \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \ln\left(\frac{1}{z_0} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) + (1 + n_2) \frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} - \frac{\ln z_0}{\ln(1/\varepsilon)} + O\left(\frac{\ln^2(\ln(1/\varepsilon))}{\ln^2(1/\varepsilon)}\right), \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial z_0} &= \frac{e^{\tau_3}}{1 - z_0 e^{\tau_3}} = -\frac{1}{z_0} + O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

На третьем этапе рассмотрим отрезок $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$. В связи с этим выполним в исходной системе (1.8) замену времени (3.22) и положим

$$x = x_3 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad y = \frac{\varepsilon^2}{\ln(1/\varepsilon)} y_3, \quad z = z_3 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \tau = \bar{\tau} + \frac{s}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (3.42)$$

Здесь новое время s меняется на отрезке $s_1 \leq s \leq s_2$, $s_j = (\tau_{j+1} - \bar{\tau}) \ln(1/\varepsilon)$, $j = 1, 2$, концы которого согласно (3.27), (3.40), (3.41) допускают при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику

$$\begin{aligned} s_1 &= -n_1 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\frac{\ln^2(\ln(1/\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}\right), & \frac{\partial s_1}{\partial z_0} &= O\left(\frac{\ln(\ln(1/\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}\right), \\ s_2 &= n_2 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\frac{\ln^2(\ln(1/\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}\right), & \frac{\partial s_2}{\partial z_0} &= O\left(\frac{\ln(\ln(1/\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}\right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

После замен (3.42) система (1.8) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dx_3}{ds} &= \left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} - z_3 \right) x_3 + \frac{\varepsilon}{\ln^2(1/\varepsilon)}, \\ \frac{dy_3}{ds} &= \left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} - x_3 \right) y_3 + 1, \\ \frac{dz_3}{ds} &= \left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{\ln^2(1/\varepsilon)} y_3 \right) z_3 + \frac{\varepsilon}{\ln^2(1/\varepsilon)}.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Согласно предыдущему шагу получившуюся систему следует дополнить начальными условиями

$$x_3|_{s=s_1} = x_{3,0}(w, \varepsilon), \quad y_3|_{s=s_1} = y_{3,0}(w, \varepsilon), \quad z_3|_{s=s_1} = z_{3,0}(w, \varepsilon),\tag{3.45}$$

где

$$x_{3,0} = \frac{x_2(\tau_2, w, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad y_{3,0} = \varepsilon y_2(\tau_2, w, \varepsilon), \quad z_{3,0} = \frac{z_2(\tau_2, w, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.\tag{3.46}$$

Прежде всего выясним асимптотику функций (3.46). Для этого нам понадобятся формулы (3.27), (3.32)–(3.34). Опираясь на них, нетрудно убедиться, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $w \in \Omega$ имеют место асимптотические представления

$$\begin{aligned}x_{3,0} &= \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right) \ln^{n_1} \frac{1}{\varepsilon}, & \frac{\partial x_{3,0}}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon^2 \ln^{n_1+1} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \right), \\ \frac{\partial x_{3,0}}{\partial z_0} &= O\left(\ln^{n_1-1} \frac{1}{\varepsilon} \right);\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}y_{3,0} &= \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right) \frac{1}{\ln^{n_1}(1/\varepsilon)}, & \frac{\partial y_{3,0}}{\partial y_0} &= O\left(\frac{\varepsilon^2 \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^{n_1-1}(1/\varepsilon)} \right), \\ \frac{\partial y_{3,0}}{\partial z_0} &= O\left(\frac{1}{\ln^{n_1+1}(1/\varepsilon)} \right);\end{aligned}\tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}z_{3,0} &= 1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right), & \frac{\partial z_{3,0}}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon^2 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \right), \\ \frac{\partial z_{3,0}}{\partial z_0} &= O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right).\end{aligned}\tag{3.49}$$

Обозначим компоненты решения задачи Коши (3.44), (3.45) через $x_3(s, w, \varepsilon)$, $y_3(s, w, \varepsilon)$, $z_3(s, w, \varepsilon)$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3. На отрезке $s_1 \leq s \leq s_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняются равномерные по s, w асимптотические равенства

$$\begin{aligned}x_3 &= \left(1 + O\left(\frac{\ln^2 \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right) e^{-s}, & \frac{\partial x_3}{\partial y_0} &= O\left(\frac{\varepsilon \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^2(1/\varepsilon)} \right) e^{-s}, \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_0} &= O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-s};\end{aligned}\tag{3.50}$$

$$y_3 = y_3^0(s) + O\left(\frac{\ln^2 \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right), \quad \frac{\partial y_3}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^2(1/\varepsilon)}\right), \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial z_0} = O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right);$$

$$z_3 = 1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right), \quad \frac{\partial z_3}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon}{\ln^2(1/\varepsilon)}\right), \quad \frac{\partial z_3}{\partial z_0} = O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right), \quad (3.52)$$

где

$$y_3^0(s) = \int_{-\infty}^s \exp\{e^{-s} - e^{-\sigma}\} d\sigma. \quad (3.53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование леммы проведем при априорных предположениях

$$y_3 \leq M_1 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \left| \frac{\partial y_3}{\partial y_0} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial y_3}{\partial z_0} \right| \leq M_3. \quad (3.54)$$

Как обычно, будем считать, что в третьем уравнении системы (3.44) функция y_3 известна и обладает свойствами (3.54). Объединяя эти свойства с асимптотическими представлениями (3.43), (3.49) и анализируя получившуюся задачу Коши для z_3 , приходим к группе формул (3.52). Аналогичным образом рассуждаем и в случае x_3 : рассматриваем первое уравнение системы (3.44), предполагая в нем функцию z_3 уже известной и дополняя его при $s = s_1$ начальным условием (3.47). Опираясь затем на асимптотические представления (3.43), (3.47), (3.52), получаем очередную группу формул (3.50).

В случае компоненты y_3 действуем по той же схеме, т.е. анализируем второе уравнение системы (3.44) с начальным условием (3.48) при $s = s_1$ в предположении, что известной является функция x_3 . При исследовании этой задачи Коши помимо асимптотических равенств (3.43), (3.48), (3.50) используются асимптотические свойства функции (3.53):

$$y_3^0(s) = s + c_0 + O(se^{-s}), \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.55)$$

$$c_0 = \int_{-\infty}^0 \exp(-e^{-\sigma}) d\sigma + \int_0^{+\infty} [\exp(-e^{-\sigma}) - 1] d\sigma;$$

$$y_3^0(s) = e^s + O(e^{2s}), \quad s \rightarrow -\infty. \quad (3.56)$$

Объединяя перечисленные факты и проводя соответствующий подсчет, для y_3 приходим к требуемым формулам (3.51).

Для придания проделанным выше построениям строгого смысла осталось убедиться в справедливости условий (3.54). Из формул (3.43), (3.51), (3.55), (3.56) вытекает, что эти условия заведомо выполняются с константами $M_1 > n_2$, $M_2, M_3 > 0$. Лемма доказана.

На четвертом этапе сделаем в системе (1.8) замену времени (3.22) и положим в ней

$$x = \varepsilon x_4, \quad y = \varepsilon^2 y_4, \quad z = z_4 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \theta = \tau - \tau_3. \quad (3.57)$$

В результате приходим к системе

$$\nu \frac{dx_4}{d\theta} = (\nu - z_4)x_4 + \varepsilon \nu, \quad \frac{dy_4}{d\theta} = (1 - x_4)y_4 + 1, \quad \frac{dz_4}{d\theta} = (1 - \varepsilon y_4)z_4 + \varepsilon \nu, \quad (3.58)$$

где $\nu = 1/\ln(1/\varepsilon)$. Всюду ниже считаем, что новое время θ из (3.57) меняется на отрезке $0 \leq \theta \leq \bar{\theta}$, где $\bar{\theta} = \lambda_2 \ln(1/\varepsilon) - \tau_3$, $\lambda_2 = \text{const} \in (0, 1)$. Саму же систему (3.58) в соответствии с предыдущим шагом дополним начальными условиями

$$x_4|_{\theta=0} = x_{4,0}(w, \varepsilon), \quad y_4|_{\theta=0} = y_{4,0}(w, \varepsilon), \quad z_4|_{\theta=0} = z_{4,0}(w, \varepsilon), \quad (3.59)$$

где

$$x_{4,0} = x_3(s_2, w, \varepsilon) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad y_{4,0} = \frac{y_3(s_2, w, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad z_{4,0} = z_3(s_2, w, \varepsilon). \quad (3.60)$$

При анализе задачи Коши (3.58), (3.59) сначала разберемся с асимптотикой начальных условий (3.60). Из уже установленных представлений (3.43), (3.50)–(3.53) вытекает справедливость при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерных по $w \in \Omega$ асимптотических формул

$$x_{4,0} = \frac{1}{\ln^{n_2-1}(1/\varepsilon)} \left(1 + O\left(\frac{\ln^2 \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right), \quad \frac{\partial x_{4,0}}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^{n_2+1}(1/\varepsilon)} \right), \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial x_{4,0}}{\partial z_0} = O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^{n_2}(1/\varepsilon)} \right);$$

$$y_{4,0} = n_2 \frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} + O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right), \quad \frac{\partial y_{4,0}}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^3(1/\varepsilon)} \right), \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial y_{4,0}}{\partial z_0} = O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^2(1/\varepsilon)} \right);$$

$$z_{4,0} = 1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right), \quad \frac{\partial z_{4,0}}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon}{\ln^2(1/\varepsilon)} \right), \quad \frac{\partial z_{4,0}}{\partial z_0} = O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right). \quad (3.63)$$

Далее, обозначим через $x_4(\theta, w, \varepsilon)$, $y_4(\theta, w, \varepsilon)$, $z_4(\theta, w, \varepsilon)$ компоненты решения задачи (3.58), (3.59). Имеет место следующая

ЛЕММА 4. При любом фиксированном $\delta > \ln 3$ функции $x_4(\theta, w, \varepsilon)$, $y_4(\theta, w, \varepsilon)$, $z_4(\theta, w, \varepsilon)$ допускают при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерные по θ, w асимптотические представления

$$x_4 = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\ln^{n_2-1}(1/\varepsilon)} \right) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \delta, \\ \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right) \frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)} e^{-\theta} & \text{при } \delta \leq \theta \leq \bar{\theta}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial y_0} = \begin{cases} O\left(\frac{\varepsilon}{\ln^{n_2-2}(1/\varepsilon)} \right) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \delta, \\ O(\varepsilon^2) e^{-\theta} & \text{при } \delta \leq \theta \leq \bar{\theta}, \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial z_0} = \begin{cases} O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^{n_2}(1/\varepsilon)} \right) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \delta, \\ O\left(\frac{\varepsilon}{\ln^2(1/\varepsilon)} \right) e^{-\theta} & \text{при } \delta \leq \theta \leq \bar{\theta}; \end{cases}$$

$$y_4 = e^\theta - 1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)e^\theta, \quad \frac{\partial y_4}{\partial y_0} = O\left(\frac{\varepsilon \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^3(1/\varepsilon)}\right)e^\theta, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial y_4}{\partial z_0} = O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^2(1/\varepsilon)}\right)e^\theta;$$

$$z_4 = \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right)e^\theta, \quad \frac{\partial z_4}{\partial y_0} = O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)e^\theta, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial z_4}{\partial z_0} = O\left(\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)e^\theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся сначала к третьему уравнению системы (3.58), считая, что функция y_4 в нем известна и удовлетворяет априорным оценкам

$$y_4 \leq M_1 \frac{\varepsilon^{-\lambda_2}}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad \left|\frac{\partial y_4}{\partial y_0}\right| \leq M_2, \quad \left|\frac{\partial y_4}{\partial z_0}\right| \leq M_3 \varepsilon^{-\lambda_2}. \quad (3.67)$$

Принимая во внимание приведенную информацию об y_4 и опираясь на формулы (3.63), нетрудно убедиться, что для z_4 получаются асимптотические представления (3.66).

Следующий шаг связан с рассмотрением первого уравнения системы (3.58) в предположении, что функция z_4 известна и обладает свойствами (3.66). Это уравнение является сингулярно возмущенным, и к нему применимы результаты [2], [10], из которых следует, что у этого уравнения имеется так называемое “медленное” решение $x_*(\theta, w, \varepsilon)$, допускающее при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерную по $\theta \in [0, \bar{\theta}]$, $w \in \Omega$ асимптотику

$$x_* = \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)} e^{-\theta}, \quad \frac{\partial x_*}{\partial y_0} = O(\varepsilon^2) e^{-\theta}, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial x_*}{\partial z_0} = O\left(\frac{\varepsilon}{\ln^2(1/\varepsilon)}\right) e^{-\theta}.$$

Что касается интересующего нас решения $x_4(\theta, w, \varepsilon)$ указанного уравнения, то в силу формул (3.61) оно отличается от (3.68) на величину

$$O\left(\frac{1}{\ln^{n_2-1}(1/\varepsilon)}\right) \exp\left(-(e^\theta - 1)\left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.69)$$

В частности, при $\theta \in [\delta, \bar{\theta}]$, где $\delta = \text{const} > \ln 3$, остаток (3.69) заведомо меньше ε^2 и вследствие этого может быть отброшен. Таким образом, выяснилась причина справедливости формул (3.64) на отрезке $\delta \leq \theta \leq \bar{\theta}$. Случай $0 \leq \theta \leq \delta$ разбирается аналогично с учетом (3.61), (3.66).

Для получения формул (3.65) обратимся ко второму уравнению системы (3.58), считая известной функцию x_4 . Дополняя его при $\theta = 0$ начальным условием (3.62) и учитывая свойства (3.64), убеждаемся, что асимптотические представления (3.65) действительно выполняются (неравенство $n_2 \geq 5$ используется для определения порядка остатка во второй формуле в (3.65)). Кроме того, асимптотические равенства (3.65) позволяют придать всем нашим построениям строгий смысл, т. е. убедиться в справедливости априорных оценок (3.67). Действительно, эти оценки заведомо выполняются при любых фиксированных $M_1 > \max_{w \in \Omega} z_0$, $M_2, M_3 > 0$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Лемма доказана.

На пятом этапе доказательства теоремы 2 сделаем в системе (1.8) замену времени (3.22) и положим в ней

$$x = \varepsilon^3 x_5, \quad y = \frac{\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)} y_5, \quad z = z_5, \quad \tau = \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varphi. \quad (3.70)$$

В результате получаем систему

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_5}{d\varphi} &= (\varepsilon - z_5)x_5 + 1, & \frac{dy_5}{d\varphi} &= (1 - \varepsilon^2 x_5)y_5 + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \\ \frac{dz_5}{d\varphi} &= \left(1 - \frac{y_5}{\ln(1/\varepsilon)}\right)z_5 + \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (3.71)$$

которая при соответствующей циклической перестановке координат переходит в уже изученную систему (3.3). Далее, будем считать, что новое время φ из (3.70) меняется на отрезке $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, где

$$\varphi_1 = -(1 - \lambda_2) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varphi_2 = \text{const} \in \mathbb{R} \quad (3.72)$$

(постоянная φ_2 будет выбрана чуть позже).

Как обычно, дополним систему (3.71) начальными условиями

$$x_5|_{\varphi=\varphi_1} = x_{5,0}(w, \varepsilon), \quad y_5|_{\varphi=\varphi_1} = y_{5,0}(w, \varepsilon), \quad z_5|_{\varphi=\varphi_1} = z_{5,0}(w, \varepsilon), \quad (3.73)$$

заимствованными из предыдущего шага. В силу замен переменных (3.57), (3.70) и формул (3.64)–(3.66) функции $x_{5,0}$, $y_{5,0}$, $z_{5,0}$ задаются равенствами

$$x_{5,0} = \frac{x_4(\bar{\theta}, w, \varepsilon)}{\varepsilon^2}, \quad y_{5,0} = y_4(\bar{\theta}, w, \varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad z_{5,0} = z_4(\bar{\theta}, w, \varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

и допускают при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерные по $w \in \Omega$ асимптотики

$$\begin{aligned} x_{5,0} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \frac{\varepsilon^{\lambda_2-1}}{z_0}, & \frac{\partial x_{5,0}}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon^{\lambda_2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial x_{5,0}}{\partial z_0} &= -\left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \frac{\varepsilon^{\lambda_2-1}}{z_0^2}; \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} y_{5,0} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) z_0 \varepsilon^{1-\lambda_2}, & \frac{\partial y_{5,0}}{\partial y_0} &= O\left(\frac{\varepsilon^{2-\lambda_2} \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^3(1/\varepsilon)}\right), \\ \frac{\partial y_{5,0}}{\partial z_0} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \varepsilon^{1-\lambda_2}; \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} z_{5,0} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) z_0 \varepsilon^{1-\lambda_2}, & \frac{\partial z_{5,0}}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon^{2-\lambda_2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial z_{5,0}}{\partial z_0} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \varepsilon^{1-\lambda_2}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Обозначим через $x_5(\varphi, w, \varepsilon)$, $y_5(\varphi, w, \varepsilon)$, $z_5(\varphi, w, \varepsilon)$ компоненты решения задачи Коши (3.71), (3.73). Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 5. На отрезке $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ для функций $y_5(\varphi, w, \varepsilon)$, $z_5(\varphi, w, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место равномерные по φ, w асимптотические представления

$$\begin{aligned} y_5 &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) z_0 e^\varphi, & \frac{\partial y_5}{\partial \varphi} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) z_0 e^\varphi, \\ \frac{\partial y_5}{\partial y_0} &= O\left(\frac{\varepsilon \ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln^3(1/\varepsilon)}\right) e^\varphi, & \frac{\partial y_5}{\partial z_0} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) e^\varphi; \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} z_5 &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) z_0 e^\varphi, & \frac{\partial z_5}{\partial \varphi} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) z_0 e^\varphi, \\ \frac{\partial z_5}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) e^\varphi, & \frac{\partial z_5}{\partial z_0} &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) e^\varphi. \end{aligned} \quad (3.78)$$

В случае функции $x_5(\varphi, w, \varepsilon)$ соответствующие асимптотические представления

$$\begin{aligned} x_5 &= \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \frac{e^{-\varphi}}{z_0}, & \frac{\partial x_5}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) e^{-\varphi}, \\ \frac{\partial x_5}{\partial \varphi} &= -\left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \frac{e^{-\varphi}}{z_0}, & & \\ \frac{\partial x_5}{\partial z_0} &= -\left(1 + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) \frac{e^{-\varphi}}{z_0^2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

выполняются при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\varphi \in [\varphi_1 + \delta, \varphi_2]$, $w \in \Omega$, где δ – произвольно фиксированная положительная постоянная.

Доказательство леммы 5 с незначительными изменениями повторяет доказательство леммы 1, так как система (3.3) переходит в (3.71) при замене

$$(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (z_5, x_5, y_5) \quad (3.80)$$

и при переобозначении $t \rightarrow \varphi$. Поэтому акцентируем внимание лишь на некоторых новых моментах.

Сначала, отталкиваясь от априорных оценок

$$x_5 \leq M_1 e^{-\varphi}, \quad \left| \frac{\partial x_5}{\partial y_0} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial x_5}{\partial z_0} \right| \leq M_3 e^{-\varphi}, \quad (3.81)$$

последовательно выводим группы формул (3.77) и (3.78). Далее, привлечем устойчивое многообразие медленных движений

$$\{(x_5, y_5, z_5): x_5 = H(z_5, y_5, \varepsilon)\}, \quad (3.82)$$

получающееся из (3.16) при замене (3.80). Единственное отличие от (3.16) состоит в том, что здесь переменные (z_5, y_5) пробегают множество вида

$$\{(z_5, y_5): M_4 \varepsilon^{1-\lambda_2} \leq z_5 \leq M_5, |y_5| \leq M_6\}, \quad M_4, M_5, M_6 = \text{const} > 0. \quad (3.83)$$

Что же касается асимптотических представлений для H , $\partial H / \partial z_5$, $\partial H / \partial y_5$, то они получаются из (3.17)–(3.19) при замене (3.80).

Как и при доказательстве леммы 1, наличие многообразия (3.82), (3.83) позволяет не только установить асимптотические представления (3.79) на любом отрезке вида $\varphi_1 + \delta \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\delta = \text{const} > 0$, но и убедиться в справедливости априорных предположений (3.81). Соответствующие детали опустим.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Проанализируем аналогичное (2.3) уравнение

$$z_5(\varphi, w, \varepsilon) = 1. \quad (3.84)$$

Согласно (3.78) при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно переходит в уравнение $z_0 e^\varphi = 1$, имеющее единственный корень $\varphi = \ln(1/z_0)$. Далее, предположим, что постоянная φ_2 из (3.72), которую до этого мы считали произвольной, удовлетворяет условию $\varphi_2 > \max_{w \in \Omega} \ln(1/z_0)$. Тогда снова обращаясь к равенствам (3.78), убеждаемся, что в этом случае уравнение (3.84) имеет на отрезке $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ единственный корень $\varphi = \varphi_0(w, \varepsilon)$, допускающий при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерную по $w \in \Omega$ асимптотику

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \ln \frac{1}{z_0} + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right), & \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} &= O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0} &= -\frac{1}{z_0} + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Наличие корня (3.85) означает, что на множестве Ω корректно определен оператор (2.4). Действительно, в силу замен (3.22), (3.70) фигурирующий в (2.4) момент времени $t = h(w, \varepsilon)$ задается равенством

$$h(w, \varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varphi_0(w, \varepsilon). \quad (3.86)$$

Что же касается оператора Π_0 , то согласно леммам 1–5 для него справедливо представление

$$\Pi_0(w, \varepsilon) = (x_5(\varphi, w, \varepsilon), y_5(\varphi, w, \varepsilon))|_{\varphi=\varphi_0(w, \varepsilon)}. \quad (3.87)$$

Отсюда и из соотношений (3.77), (3.79), (3.85) вытекает асимптотическое равенство (2.6). Теорема 2 доказана.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прежде всего завершим доказательство теоремы 1. Напомним, что нам осталось показать справедливость асимптотических равенств (1.10). В связи с этим обратим внимание, что в силу (3.77), (3.79), (3.85) неподвижная точка $w = w_*(\varepsilon)$ оператора (3.87) допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику

$$w_*(\varepsilon) = w_* + O\left(\frac{\ln \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right). \quad (4.1)$$

Заметим далее, что первое соотношение (1.10) вытекает из формул (3.23), (3.32) при $w = w_*(\varepsilon)$ и из (4.1). Что касается минимума $x_*(t, \varepsilon)$, то согласно свойству самосимметричности цикла (1.9) он определяется как минимальное значение из $\min x$, $\min y$, $\min z$. Из лемм 1–5 следует, что это значение имеет порядок $\varepsilon^3/\ln(1/\varepsilon)$. Точнее говоря, в силу (3.34), (4.1) для него справедливо асимптотическое равенство

из (1.10). Остается заметить, что последняя формула в (1.10) – следствие соотношений (3.85), (3.86), (4.1). Теорема 1 полностью доказана.

Для получения более наглядного представления о свойствах цикла (1.9) дадим качественное описание эволюции во времени его компоненты $x_*(t, \varepsilon)$ при $t \geq 0$. Из лемм 1–5 вытекают следующие факты. Сначала $x_*(t, \varepsilon)$ монотонно возрастает примерно по экспоненциальному закону $x_* = e^t$ и достигает за время порядка $\ln \ln(1/\varepsilon)$ значений порядка $\ln(1/\varepsilon)$. Далее следует всплеск переменной $x_*(t, \varepsilon)$, происходящий по закону

$$x_*(t, \varepsilon) \sim \ln \frac{1}{\varepsilon} \cdot \exp(\tau - e^\tau)|_{\tau=t-\ln \ln(1/\varepsilon)}.$$

Этот всплеск сменяется спадом до асимптотически малых значений, который длится время порядка $\ln \ln(1/\varepsilon)$. Затем в течение промежутка времени порядка $\ln(1/\varepsilon)$ компонента $x_*(t, \varepsilon)$ асимптотически мала. И, наконец, происходит экспоненциальный подъем $x_*(t, \varepsilon)$ от асимптотически малых значений до значений порядка единицы, который также занимает время порядка $\ln(1/\varepsilon)$. После этого весь процесс повторяется.

Следует также отметить, что всплески компонент цикла (1.9) разделены во времени, т. е. при каждом t лишь одна компонента имеет порядок единицы или асимптотически велика, а две остальные асимптотически малы. В этом, собственно, и состоит биологический механизм репрессии: в любой момент времени какой-либо один ген подавляет два других. Наша модель (1.6) дает математическое описание указанного механизма.

В заключение отметим, что предложенный в данной статье новый метод математического моделирования искусственных генных сетей может быть применен не только к простейшей сети, показанной на рис. 1, но и к более сложным сетям. В самом общем случае для так называемой полносвязной генной сети наш подход приводит к аналогичной (1.4) системе с запаздываниями

$$\dot{m}_j = \frac{r_{1,j}}{1 + \sum_{k=1}^n a_{j,k}} \left[1 + \sum_{k=1}^n a_{j,k} (1 - u_k) - m_j(t - h_{1,j}) \right] m_j + \alpha_j, \quad (4.2)$$

$$\dot{u}_j = r_{2,j} \left[\sum_{k=1}^n \delta_{j,k} m_k - u_j(t - h_{2,j}) \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

где все параметры $r_{1,j}$, $r_{2,j}$, $a_{j,k}$, $h_{1,j}$, $h_{2,j}$, $\delta_{j,k}$, α_j неотрицательны и

$$r_{1,j} > 0, \quad r_{2,j} > 0, \quad \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} = 1. \quad (4.4)$$

В пояснении здесь нуждается лишь третье соотношение. В экологической интерпретации коэффициент $\delta_{j,k}$ – это доля k -й жертвы в рационе j -го хищника. Тем самым при любом j сумма $\delta_{j,k}$ по k должна равняться единице.

Изучение системы (4.2), (4.3) целесообразно начать с $n = 1$, когда имеется один ген-авторепрессор. В этом случае указанная система принимает вид

$$\dot{m} = \frac{r_1}{1 + a} [1 + a(1 - u) - m(t - h_1)] m + \alpha, \quad \dot{u} = r_2 [m - u(t - h_2)] u, \quad (4.5)$$

где $r_1, r_2 > 0$, $a \geq 0$, $h_1, h_2 \geq 0$, $\alpha \geq 0$. Далее, предположим, что $h_1 > 0$, $h_2 = 0$ (без ограничения общности можно считать, что $h_1 = 1$), $r_1 = r \sim 1$, $r_2 \gg 1$. Тогда, опираясь на уже неоднократно применявшийся принцип сведения [2], имеем $t = u$. Для концентрации белка $u(t)$ из (4.5) получается уравнение

$$\dot{u} = \frac{r}{1+a} [1 + a(1-u) - u(t-1)]u + \alpha. \quad (4.6)$$

При $\alpha = 0$, $a = \text{const} \in (0, 1)$, $r \gg 1$ уравнение (4.6) представляет собой математическую модель популяции млекопитающих с учетом каннибализма. В этом случае вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости релаксационного цикла уравнения (4.6) изучены в монографиях [9], [11]. В случае же, когда $\alpha = \text{const} > 0$, $a = \text{const} \geq 0$, $r \gg 1$, эти проблемы пока не решены.

Список литературы

- [1] M. B. Elowitz, S. Leibler, “A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators”, *Nature*, **403** (2000), 335–338.
- [2] А. Н. Тихонов, “Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных”, *Матем. сб.*, **31(73):3** (1952), 575–586.
- [3] Е. П. Волокитин, “О предельных циклах в простейшей модели гипотетической генной сети”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **7:3** (2004), 57–65.
- [4] O. Buşe, A. Kuznetsov, R. A. Pérez, “Existence of limit cycles in the repressilator equations”, *Internat. J. Bifurcation Chaos*, **19:12** (2009), 4097–4106.
- [5] O. Buşe, R. Pérez, A. Kuznetsov, “Dynamical properties of the repressilator model”, *Phys. Rev. E*, **81:6** (2010), 066206, 7 pp.
- [6] В. А. Лихошвай, Ю. Г. Матушкин, С. И. Фадеев, “Задачи теории функционирования генных сетей”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **6:2** (2003), 64–80.
- [7] Г. В. Демиденко, Н. А. Колчанов, В. А. Лихошвай, Ю. Г. Матушкин, С. И. Фадеев, “Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44:12** (2004), 2276–2295.
- [8] С. И. Фадеев, В. А. Лихошвай, “О гипотетических генных сетях”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **6:3** (2003), 134–153.
- [9] А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, *Релаксационные колебания в математических моделях экологии*, Тр. МИАН, **199**, ред. Е. Ф. Мищенко, Наука, М., 1993.
- [10] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973.
- [11] Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Многоликий хаос*, Физматлит, М., 2012.

Поступила в редакцию 19.12.2016