Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, А. И. Клевин, Б. Ти-
роцци, Скаляризация стационарных квазиклассических
задач для систем уравнений и приложение к физике
плазмы, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 409–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:23:58

© 2017 г.

А. Ю. Аникин^{*†‡}, С. Ю. Доброхотов^{*†},
А. И. Клевин^{*†}, Б. Тироцци[§]

СКАЛЯРИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЕ К ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Предложен метод нахождения асимптотических решений стационарных задач для пучков дифференциальных (и псевдодифференциальных) операторов, символ которых – самосопряженная матрица. Показано, что вопрос построения асимптотических решений, отвечающих выделенному собственному значению (называемому эффективным гамильтонианом, термом или модой), в случае отсутствия смены кратности сводится к изучению объектов, связанных лишь с определителем главного матричного символа и собственным вектором, соответствующим данному (числовому) значению этого эффективного гамильтониана. В качестве примера показано, что стационарные решения могут быть эффективно вычислены в задаче о движении плазмы в ТОКАМАКе.

Ключевые слова: спектр, квазиклассические асимптотики, уравнения плазмы, ТОКАМАК.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9322>

1. ВВЕДЕНИЕ

Канонический оператор Маслова [1] предлагает алгоритм для вычисления подпоследовательностей асимптотических собственных значений и асимптотических собственных функций (спектральных серий) для матричных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов (операторов с матричнозначным символом).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00521, 16-31-00339).

^{*}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
E-mail: anikin83@inbox.ru, dobr@ipmnet.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

[§]ENEA Centro Ricerch di Frascati, Frascati (Roma), Italy.
E-mail: brunellotirozzi@gmail.com

Для многих важных операторов, возникающих в задачах физики, он работает весьма эффективно. Однако в сложных реальных ситуациях при практической реализации этого алгоритма могут возникать затруднения. Они связаны с необходимостью находить зависящие от пространственных и импульсных переменных функции – собственные значения (называемые модами или эффективными гамильтонианами) и собственные векторы главного матричного символа. Задача нахождения собственных значений (функций) легко решается, если размерность матрицы равна 2. Однако если размерность выше, то явные формулы, даже если они существуют, могут быть очень громоздкими (типа формулы Кардано) и их практическая польза весьма сомнительна. В настоящей работе мы предлагаем подходы для борьбы с такими трудностями.

Мы покажем, что для решения стационарных задач необязательно изучать связанную с модой гамильтонову систему – находить лагранжевы многообразия, индексы Маслова, решать уравнение переноса и пр. Вместо этого достаточно изучить систему, гамильтониан которой – определитель главного символа (который, в отличие от моды, вычисляется аналитически для любой размерности матрицы). Такое сведение векторной задачи к скалярной мы будем называть *скаляризацией*. В основе этого метода лежит квазиклассический аналог принципа Мопертюи–Якоби (см. [2]). В настоящей работе мы ограничиваемся случаем отсутствия смены кратности.

Важное обстоятельство состоит в том, что квазиклассическое приближение для стационарных задач опирается на такие траектории классической гамильтоновой системы, у которой эффективный гамильтониан (энергия или квадрат частоты) – глобальная константа, что и позволяет заменить собственное значение матричного символа на его определитель в асимптотических конструкциях. Похожие соображения были использованы в работе [3] для дифференциальных уравнений на комплексном многообразии. Определитель в качестве гамильтониана был использован в работе [4].

Мотивировкой для нашей работы служит стационарная задача для линеаризованной системы уравнений, описывающей движение холодной плазмы в ТОКАМАКе [5]. В этой задаче символ оператора является матрицей размера 12×12 , что делает невозможным непосредственное вычисление ее собственных значений. Мы показываем, что такую спектральную задачу можно свести к задаче для пучка операторов, где символом является уже матрица размера 3×3 .

Под задачей для пучка операторов понимается задача $\hat{\mathbf{H}}(\hat{x}, \hat{p}, E)\Psi(E) = 0$, где оператор зависит от параметра. В частном случае $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{G}}(\hat{x}, \hat{p}) - E$ получается стандартная спектральная задача. Мы будем искать асимптотические решения этой задачи: число E и функцию Ψ (с условием нормировки $\|\Psi\|_{L^2} = 1$) такие, что $\|\hat{\mathbf{H}}\Psi\|_{L^2} = O(h^\beta)$, где $\beta > 0$. Числа E мы будем называть асимптотическими собственными значениями, а множество асимптотических собственных значений из некоторого интервала – спектральной серией. Функции $\Psi(E)$ будем называть асимптотическими решениями или квази модами.

Отметим, что задачи для операторных пучков хорошо известны в теории уравнений с частными производными и в механике сплошных сред. Однако обычный путь их исследования в некотором смысле является обратным по отношению к используемому в нашей работе: более сложную задачу об исследовании пучка сводят к стандартной спектральной задаче [6].

В упомянутой выше задаче о плазме мы предлагаем явную формулу для определителя главного символа. Она весьма громоздка и в типичном случае задает неинтегрируемую гамильтонову систему. Поэтому построение спектральной серии с помощью лагранжевых торов требует дополнительных усилий (использование теории усреднения, нормальных форм в окрестности одного тора и пр.).

Более простой является задача о построении спектральных серий, отвечающих асимптотическим решениям, локализованным в окрестности устойчивого положения равновесия или орбитально устойчивой (эллиптической) замкнутой кривой. Случай окрестности положения равновесия (так называемых нижних энергетических уровней) хорошо изучен и не представляет больших трудностей. Решения, отвечающие эллиптической замкнутой кривой, строятся в рамках теории комплексного ростка Маслова [7] (см. также [8]). Мы показываем, что спектральные серии и асимптотические собственные функции, построенные с помощью комплексного ростка для моды, могут быть получены из комплексного ростка для определителя. Таким образом, мы даем эффективный алгоритм численного нахождения таких спектральных серий.

Структура работы следующая. В разделе 2 мы напоминаем известные квазиклассические формулы в скалярных и векторных стационарных задачах для пучков операторов. В разделе 3 мы проводим скаляризацию для решений, связанных с лиувиллевыми торами. В разделе 4 мы напоминаем теорию комплексного ростка над замкнутой кривой и проводим скаляризацию для такого случая. В разделе 5 мы вычисляем определитель главного символа для уравнения линеаризованной плазмы. Также мы приводим конкретный пример системы, у которой существуют замкнутые траектории, порождающие эффективно вычисляемые спектральные серии.

2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ

2.1. Асимптотика в скалярном случае. Сначала рассмотрим уравнение для пучка дифференциальных или псевдодифференциальных операторов (цифры сверху означают порядок действия операторов [9]; если $H(x, p, E, h)$ – полином по p , то $\hat{H}(E)$ – дифференциальный оператор)

$$\hat{H}(E)\Psi(E) \equiv H(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, E, h)\Psi(x, E, h) = 0$$

с символом $H(x, p, E, h) = H_0(x, p, E) + hH_1(x, p, E) + \dots$. Пусть функция $H_0(x, p, E)$ вещественна, с ней связано гамильтоново векторное поле v_{H_0} (зависящее от параметра E) с фазовым потоком $g_{H_0}^t$ в стандартном симплектическом пространстве, которому соответствует система уравнений

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial p}.$$

Положим

$$\Sigma_E = \{(x, p) : H_0(x, p, E) = 0\} \subset \mathbb{R}_{x,p}^{2n}, \quad \tilde{\Sigma} = \bigcup_{|E-E_0|<\varepsilon} \Sigma_E,$$

а также $\Sigma = \tilde{\Sigma} \cap U$, где $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ – некоторая область. Сделаем следующие предположения:

- A1) $(H_0)'_E \neq 0$ всюду в Σ ;
 A2) гамильтоновы системы с гамильтонианами $H_0 = H_0(E)$ при $|E - E_0| < \varepsilon$ вполне интегрируемы на Σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эти предположения можно ослабить, требуя интегрируемость системы, отвечающей значению параметра E на уровне энергии $\Sigma_E \cap U$.

Построим переменные действие–угол в области Σ для всех гамильтоновых систем $H_0(E)$ (при $|E - E_0| < \varepsilon$): $p = P(I, \vartheta, E)$, $x = X(I, \vartheta, E)$. Пусть $\Lambda^n(I, E) \subset \Sigma$ – инвариантные торы для системы $H_0(E)$, отвечающие своим значениям переменных I . Пусть значения $I_j^\nu = h(\nu_j + m_j/4)$ и E отвечают торам, удовлетворяющим правилу квантования Бора–Зоммерфельда. Здесь $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, а m_j – индекс Маслова цикла, отвечающего переменной ϑ_j . Для каждого набора I_j^ν выберем (единственное в силу предположения A1) значение $E^\nu = \mathcal{E}(I^\nu)$ такое, что $H_0(I^\nu, E^\nu) = 0$; другими словами, мы фиксируем тор $\Lambda = \Lambda(I^\nu, E^\nu) \subset \Sigma_{E^\nu}$.

Предположим, что функции $A_\lambda: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ и λ удовлетворяют уравнению переноса

$$\frac{dA_\lambda}{dt} + \left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial p} + iH_1 - \lambda \frac{\partial H_0}{\partial E} \right) \Big|_{E=E^\nu} A_\lambda = 0, \quad (1)$$

где t – гамильтоново или собственное время, т. е. $d/dt = \{H_0, \cdot\} \equiv \operatorname{ad}_{H_0}$, и

$$\int_\Lambda |A_\lambda|^2 d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n = 1.$$

Построим семейство функций $\psi^\nu: \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}$, используя канонический оператор Маслова: $\psi^\nu = K_{\Lambda^n(I^\nu)} A_\lambda$. Здесь $K_{\Lambda^n(I^\nu)}: C^\infty(\Lambda) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ – канонический оператор, построенный на лагранжевом многообразии $\Lambda^n(I^\nu)$. При этом предполагается, что на $\Lambda^n(I^\nu)$ отмечена точка (которая дает вклад в виде постоянного множителя, по модулю равного единице) и выбрана инвариантная мера $d\mu$ (которая с точностью до множителя равна $d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n$).

Напомним вид канонического оператора в неособой карте. Пусть $\chi_\alpha \in C^\infty(\Lambda^n(I^\nu))$ – функция, носитель которой целиком содержится в карте $\Lambda_\alpha \subset \Lambda$, причем Λ_α диффеоморфно проецируется на $\mathbb{R}_x^n$. Тогда

$$K_{\Lambda^n(I^\nu)}[A\chi_\alpha] = \frac{A(\vartheta(x))\chi_\alpha(\vartheta(x))}{\sqrt{\left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta}(\vartheta(x)) \right|}} e^{iS(\vartheta(x))/h - im\pi/2}. \quad (2)$$

Здесь $S(\vartheta) = \int_{\theta_0}^\vartheta p dx$, $\vartheta = \vartheta(x)$ находится из $X(\vartheta(x)) = x$, а m – индекс Маслова пути, соединяющего точки на торе Λ с координатами ϑ_0 и ϑ (см. [1]).

Положим

$$E(I^\nu) = \mathcal{E}(I^\nu) + h\lambda(I^\nu).$$

Имеет место равенство (см. [1])

$$\|\widehat{H}(E(I^\nu))\psi^\nu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^2).$$

2.2. Асимптотика в векторном случае. Рассмотрим спектральную задачу для пучка операторов, символ которых – самосопряженная $(N \times N)$ -матрица

$$\hat{\mathbf{H}}(E)\Psi = 0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + h\mathbf{H}_1 + \dots$$

Введем следующие обозначения: $\|a\| = |a_1|^2 + \dots + |a_N|^2$, $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_N b_N$, черта означает комплексное сопряжение.

Хорошо известен алгоритм (см. [1], а также [10]) нахождения асимптотического решения $\Psi = \Psi(h)$ и $E = E(h)$.

1. Найти собственные значения и собственные векторы главного символа (моды или эффективные гамильтонианы):

$$\mathbf{H}_0 \chi_r = H_r \chi_r, \quad \|\chi_r\| = 1, \quad r = 1, \dots, N.$$

2. Выбрать какую-нибудь моду H_r и вычислить скалярную функцию:

$$L_r = \langle \overline{\chi_r}, \mathbf{H}_1 \chi_r \rangle - i \left\langle \overline{\chi_r}, \frac{d\chi_r}{dt} \right\rangle - i \left\langle \overline{\chi_r}, \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial p_j} - \frac{\partial H_r}{\partial p_j} \mathbf{I} \right] \frac{\partial \chi_r}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (3)$$

где $d/dt = \text{ad}_{H_r}$.

3. Найти асимптотическое решение скалярной задачи

$$(\hat{H}_r(E) + h\hat{L}_r(E))\psi_r(E) = 0. \quad (4)$$

Оно определяет спектральную серию $E = E(h)$.

4. Вычислить асимптотическое решение исходной задачи по формуле

$$\Psi_r = \hat{\chi}_r \psi_r, \quad \hat{\chi}_r = \chi_r(\overset{1}{x}, \overset{1}{p}).$$

Таким образом, для реализации данного алгоритма на практике нам необходимо иметь явные выражения для собственных значений H_r матрицы $\mathbf{H}_0$. Подобные формулы легко получить в задачах с матрицей размерности 2. Для некоторых классических систем уравнений (для уравнений Максвелла, Дирака, уравнений теории упругостей, линеаризованных уравнений Навье–Стокса) такие формулы хорошо известны, однако для многих других уравнений больших размерностей такие формулы либо слишком громоздки, либо вовсе не существуют. Такая ситуация, например, имеет место для рассматриваемой нами системы линеаризованных уравнений плазмы. Мы предлагаем трюк для обхода возникающего затруднения. А именно, асимптотическое решение будет записываться не в терминах системы с гамильтонианом H , а в терминах системы с гамильтонианом $\mathcal{H} = \det \mathbf{H}_0$.

3. СКАЛЯРИЗАЦИЯ

3.1. Принцип Мопертюи–Якоби. Покажем, как свести изучение гамильтоновой системы v_{H_r} к системе, гамильтониан которой – определитель матрицы $\mathbf{H}_0$. Принципиальную роль играет следующее простое соображение, которое естественно называть принципом Мопертюи–Якоби (см. [11]): если $H, G: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ – две функции в симплектическом пространстве, а $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ – гиперповерхность, на которой

функции H и G постоянны, то векторные поля v_H и v_G всюду на Σ параллельны (и, следовательно, решения гамильтоновых систем совпадают с точностью до замены времени).

Зафиксируем одну моду $-H_r(x, p, E)$. Пусть Λ^n – лагранжево многообразие, инвариантное относительно $g_{H_r}^t$ (при некотором заданном значении E) и такое, что $H_r|_{\Lambda^n} = 0$. Введем следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. $H_j|_{\Sigma_r} \neq 0$ для всех $j \neq r$.

Таким образом, в интересующей нас области мода H_r имеет постоянную кратность.

Рассмотрим определитель главного символа

$$\mathcal{H}(E) = \det \mathbf{H}_0(E) \equiv H_1(E) \dots H_n(E).$$

Запишем характеристический многочлен матрицы $\mathbf{H}_0$:

$$\mathfrak{a}(E, \mu) = \det(\mathbf{H}_0 - \mu \mathbf{I}) = (-1)^n \prod_{j=1}^n (\mu - H_j(E)).$$

Тогда всюду на Σ_r

$$\prod_{j \neq r} H_j = \left. \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = -\mathcal{I}(E),$$

где $\mathcal{I}(E)$ – сумма главных миноров $(n-1)$ -го порядка матрицы $\mathbf{H}_0$ (отлична от нуля в силу предположения 1).

Итак,

$$H_r(E) = F_r(p, x, E) \mathcal{H}, \quad F_r|_{\Sigma_r} = -\frac{1}{\mathcal{I}(E)} \neq 0.$$

Предположим, что $\|\chi_r\| = 1$, тогда имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия предположения 1. Тогда уравнение переноса на Λ^n для оператора из левой части (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_\lambda}{ds} + \left[\frac{i}{F_r} \langle \overline{\chi_r}, \mathbf{H}_1 \chi_r \rangle + \left\langle \overline{\chi_r}, \frac{d\chi_r}{ds} \right\rangle - \frac{1}{2F_r} \left\langle \overline{\chi_r}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial p_j \partial x_j} \chi_r \right\rangle + \right. \\ \left. + i \operatorname{Im} \left\langle \overline{\chi_r}, \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{F} \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \mathbf{I} \right] \frac{\partial \chi_r}{\partial x_j} \right\rangle - \lambda \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} \right] A_\lambda = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

где $d/ds = \operatorname{ad}_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в приложении А.

3.2. Нахождение χ_r и $\partial \chi_r / \partial x_j$. Легко видеть, что, поскольку $\Lambda^n \subset \Sigma_r$, все объекты, входящие в уравнение (5), либо известны, либо вычисляются с помощью лишь арифметических операций. Поясним, как вычислять наименее тривиальные объекты – собственный вектор χ_r и его производную $\partial \chi_r / \partial x_j$. Собственный вектор всюду на Σ_r находится из уравнения $\mathbf{H}_0 \chi_r = 0$. Для нахождения производной

продифференцируем по x_j тождество $\mathbf{H}_0 \chi_r = H_r \chi_r$. Получим на Σ_r неоднородное линейное уравнение для нахождения $\partial \chi_r / \partial x_j$:

$$\mathbf{H}_0 \frac{\partial \chi_r}{\partial x_j} = F \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \chi_r - \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial x_j} \chi_r.$$

Заметим, что на Σ_r решение такого уравнения не однозначно, а определено с точностью до вектора χ_r , умноженного на константу. Однако в силу тождества (32) все такие решения (даже если они и не равны на самом деле $\partial \chi_r / \partial x_j$) дают одинаковый вклад в уравнение (5) и могут быть туда подставлены.

3.3. Инвариантная мера. После нахождения решения A_λ уравнения (5) для отыскания асимптотики $\psi_r(E)$ (задачи (4)) остается одно препятствие. А именно, нам нужно знать инвариантную меру системы v_{H_r} . Пусть $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ – переменные угол на торе Λ^n для системы $v_{\mathcal{H}}$ (с динамикой $\dot{\vartheta} = \omega$, где ω – постоянный вектор частот). Тогда для системы v_{H_r} динамика в переменных ϑ задается уравнениями $\dot{\vartheta} = \omega F$. Таким образом, мера $d\mu = d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n / F$ будет инвариантной для системы v_{H_r} , и ее можно использовать в конструкции канонического оператора.

Итак, асимптотическое решение записывается только в терминах гамильтоновой системы $v_{\mathcal{H}}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть гамильтонова система $v_{\mathcal{H}}$ вполне интегрируема и обладает лиувиллевыми инвариантными торами в некоторой области фазового пространства. Пусть I, ϑ – переменные действие–угол в этой области. Пусть тор $\Lambda = \Lambda(I, E_0)$, отвечающий $I = I^\nu$, удовлетворяет правилу квантования Бора–Зоммерфельда: $I_j^\nu = h(\nu_j + m_j/4)$. Пусть тор Λ лежит на поверхности $\mathcal{H}(E_0) = 0$, причем на нем в нуль обращается функция $H_r(E_0)$ и не обращаются все остальные $H_j(E_0)$. Пусть $\chi_r(p, x)$ – вектор-функция такая, что $\|\chi_r\| = 1$ (здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора), и $\mathbf{H}_0(E_0)\chi_r = 0$ в окрестности тора Λ на поверхности $\mathcal{H}(E_0) = 0$. Тогда существует асимптотическое решение задачи $\widehat{\mathbf{H}}(E_0, h)\Psi(h) = 0$ вида

$$E = E_0 + \lambda h, \quad \Psi = \widehat{\chi_r} K_\Lambda A_\lambda.$$

Здесь $K_\Lambda: C^\infty(\Lambda) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ – канонический оператор, построенный на лагранжевом многообразии Λ , где выбрана инвариантная мера $d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n / F$, функция A_λ и число λ – решение уравнения (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В неособой карте канонический оператор имеет вид

$$K_\Lambda[\chi_\alpha A] = \frac{A(\vartheta(x))\chi_\alpha(\vartheta(x))}{\sqrt{F(\vartheta(x))}\sqrt{|\frac{\partial X}{\partial \vartheta}|}} e^{iS(\vartheta(x))/h - m\pi i/2}$$

(ср. с формулой (2)).

4. СКАЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ, ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВБЛИЗИ ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ

4.1. Комплексный росток над замкнутой кривой. Теория комплексного ростка Маслова позволяет связывать спектральную серию с семейством изотропных инвариантных торов Λ^k ($k < n$). Простейшими примерами таких многообразий являются точка ($k = 0$) и замкнутая кривая ($k = 1$). Случай $k = 0$ отвечает хорошо изученным нижним энергетическим уровням (приближению гармонического осциллятора). В этой работе нас будет интересовать простейший нетривиальный случай $k = 1$.

Конструкцию комплексного ростка мы напомним для случая $k = 1$ (общий случай см. в [7]).

Пусть $\mathbb{R}_{p,x}^{2n}$ – симплектическое пространство со стандартной формой $\omega = dp \wedge dx$. Гладкая функция Гамильтона $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ задает в нем векторное поле с фазовым потоком $g_H^t: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Предположим, что эта гамильтонова система обладает орбитально устойчивым T -периодическим решением γ :

$$x = X_0(t), \quad p = P_0(t).$$

В дальнейшем мы будем предполагать выполненным следующее условие невырожденности и регулярности.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. 1. *Мультипликаторы решения γ имеют вид*

$$\mu_1 = \mu_{n+1} = 1, \quad \mu_k, \mu_{k+n} = e^{\pm i\beta_k} \quad \text{при } k = 2, \dots, n,$$

где $\beta_k > 0$. Это означает, что кривая γ орбитально устойчива в линейном приближении.

2. *Кривая γ в фазовом пространстве диффеоморфно проецируется на конфигурационное пространство $\mathbb{R}_x^n$.*

Для $k \neq 1, n+1$ обозначим через $v_k = \begin{pmatrix} B_k \\ C_k \end{pmatrix}$ решения Флоке системы уравнений в вариациях вблизи решения γ :

$$\dot{B} = -H_{xp}B - H_{xx}C, \quad \dot{C} = H_{pp}B + H_{px}C, \quad (6)$$

т. е. $v_k(t+T) = \mu_k v_k(t)$, при этом предполагается, что $v_{k+n} = \overline{v_k}$.

Выберем n решений системы (6) следующим образом: $\xi_1 = \begin{pmatrix} \dot{B}_0(t) \\ \dot{X}_0(t) \end{pmatrix}$, а при $k = 2, \dots, n$ положим либо $\xi_k = v_k$, либо $\xi_k = v_{k+n}$ так, чтобы матрица

$$(\operatorname{Im}(\omega(\xi_j, \overline{\xi_k}))) \Big|_{j,k=1}^n \equiv (\operatorname{Im}(B_j^T \overline{C_k} - C_k^T \overline{B_j})) \Big|_{j,k=1}^n \quad (7)$$

была положительно определена. Такой выбор всегда возможен по следующей причине. Данная матрица диагональна в силу того, что векторы v_k и v_j косоортгональны, если $\mu_k \mu_j \neq 1$. Кроме того, легко видеть, что величина $\omega(v_k, \overline{v_k})$ является чисто мнимой. Таким образом, выбирая должным образом ξ_k , мы можем добиться выполнения (7). В общей теории комплексного ростка такое условие называется *диссипативностью*.

Обозначим через $\left(\frac{S}{C}\right)$ матрицу из n столбцов $\xi_1, \dots, \xi_n$ и $2n$ строк. Векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$ порождают семейство комплексных n -мерных плоскостей, построенных над точками замкнутой траектории γ . Получаемое в результате векторное расслоение называется (изотропным) одномерным многообразием с комплексным ростком.

Такой объект порождает спектральную серию. Для этого необходимо определить фазу и амплитуду. Из условия 2 предположения 2 следует [7], что $\det C \neq 0$ всюду на γ . Таким образом, в нашем случае фокальных точек нет. (Наши дальнейшие результаты можно обобщить и на более общий случай наличия фокальных точек, что привело бы лишь к техническому усложнению формулировок.)

В малой окрестности проекции γ на $\mathbb{R}_x^n$ определим функцию $t = t(x)$ по следующему правилу: $\langle x - X_0(t), \dot{X}_0(t) \rangle = 0$ (т. е. t соответствует точке на кривой γ такой, что нормаль к γ в этой точке содержит x). На кривой γ можно определить функцию $S_0 = S_0(t)$ такую, что $dS_0 = p dx$. Определим фазу:

$$S(x) = S_0(t) + \langle P_0(t), x - X_0(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle BC^{-1}(x - X_0(t)), x - X_0(t) \rangle \Big|_{t=t(x)}. \quad (8)$$

Амплитуда $A_\lambda: \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ находится из уравнения переноса, которое имеет точно такой же вид (1), как и в полноразмерном случае.

Эти объекты определены, вообще говоря, не на кривой γ , а лишь на ее универсальной накрывающей. Чтобы введенные объекты хорошо сшивались, необходимо наложить условие квантования

$$\frac{1}{2\pi h} \oint_\gamma p dx = \frac{1}{2\pi T} \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\gamma_E) \left(\nu_j + \frac{1}{2} \right) + \nu_n, \quad (9)$$

где $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ — фиксированные (не зависящие от h) целые неотрицательные числа, а число ν_n принимает значения $\sim 1/h$.

Попросту говоря, число ν_n отвечает за квантование типа Бора–Зоммерфельда для периодических траекторий одномерного оператора. Числа $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ отвечают состояниям типа гармонического осциллятора в трансверсальном к γ_E направлении. Формулы сильно упрощаются для случая “основного” состояния, т. е. $\nu_1 = \dots = \nu_{n-1} = 0$. Именно такой случай мы и будем рассматривать ниже.

Асимптотика собственных значений исходного оператора имеет вид

$$E(h) = H(\gamma) + h\lambda + O(h^2),$$

а собственные функции

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{C}(t(x))}} A_\lambda(t(x)) e^{iS(x)/h}$$

для случая $\nu_1 = \dots = \nu_{n-1} = 0$. Если $\nu \neq 0$, формулы усложняются, в них появляются аналоги операторов рождения (см. [7]).

4.2. Скаляризация. Пусть, как и в п. 3.1, выбрана мода $H_r = F_r \mathcal{H}$ (индекс r в дальнейшем опускаем). Мы покажем, как построить стационарное решение исходной системы, если известно периодическое решение с комплексным ростком для системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$.

Пусть $\gamma - T_s$ -периодическое решение системы $v_{\mathcal{H}}$, удовлетворяющее предположению 2 и условию квантования (9).

Пусть $z = (p, x)$, гамильтонианы H и $\mathcal{H}$ определяют системы

$$\frac{dz}{dt} = v_H = Fv_{\mathcal{H}}, \quad \frac{dz}{ds} = v_{\mathcal{H}}, \quad H = F\mathcal{H}, \quad ds = Fdt.$$

Пусть $z = Z_{\mathcal{H}}(s)$ – периодическое решение для $v_{\mathcal{H}}$ с периодом T_s , а $z = Z_H(t) = Z(\mathcal{H}(s(t)))$ – периодическое решение для v_H с периодом T_t . Рассмотрим две системы в вариациях:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Omega_H(t)\xi, \quad \Omega_H(t) = \begin{pmatrix} -H_{xp} & -H_{xx} \\ H_{px} & H_{pp} \end{pmatrix} \Big|_{z=Z_H(t)}, \quad (10)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \Omega_{\mathcal{H}}(s)\eta, \quad \Omega_{\mathcal{H}}(s) = \begin{pmatrix} -\mathcal{H}_{xp} & -\mathcal{H}_{xx} \\ \mathcal{H}_{px} & \mathcal{H}_{pp} \end{pmatrix} \Big|_{z=Z_{\mathcal{H}}(s)}. \quad (11)$$

ЛЕММА 1. Пусть $\eta(s)$ – решение Флоке ($\eta(s + T_s) = \mu\eta(s)$) системы (11) такое, что $dH(\eta) = 0$. Пусть $r = r(t)$ – скалярная функция, являющаяся решением задачи

$$\frac{dr}{ds} = r \frac{\{F, \mathcal{H}\}}{F} + \frac{dF(\eta)}{F}, \quad r(s + T_s) = \mu r(s). \quad (12)$$

Тогда функция

$$\xi(t) = \eta(s(t)) + r(s(t))v_{\mathcal{H}}(Z_{\mathcal{H}}(s(t))) \quad (13)$$

является решением Флоке $\xi(t + T_t) = \mu\xi(t)$ системы (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Разумеется, для $r(t)$ можно написать явную формулу, но она довольно громоздка и интереса для нас не представляет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в приложении Б.

Построим для системы $v_{\mathcal{H}}$ матрицу $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, такую же, как в п. 4.1 (ее первый столбец – это $v_{\mathcal{H}}(Z_{\mathcal{H}}(s))$). Построим матрицу $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, где первый столбец – это $v_H(Z_H(t))$, остальные получаются из соответствующих столбцов матрицы $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ применением леммы 1. Допуская некоторую вольность речи, мы будем называть матрицы $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ замкнутыми кривыми с комплексным ростком систем $v_{\mathcal{H}}$ и v_H . Тогда непосредственно из леммы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. 1. Если условия квантования (9) выполнены для замкнутой кривой с комплексным ростком системы $v_{\mathcal{H}}$, то они выполнены и для замкнутой кривой с комплексным ростком системы v_H .

2. $BC^{-1} = \mathcal{B}\mathcal{C}^{-1}$, и, следовательно, фазы $S(x)$, определяемые замкнутыми кривыми с комплексными ростками v_H и $v_{\mathcal{H}}$, совпадают.

3. Якобианы двух замкнутых кривых с комплексным ростком равны

$$\det \mathcal{C}(s(x)) = \det C(t(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 следует из того, что мультипликаторы для двух систем в вариациях одинаковые. Утверждения 2 и 3 следуют из того, что матрицы $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ получаются из B, C элементарными преобразованиями столбцов.

Выпишем в явном виде стационарное решение. Пусть γ – траектория системы $dz/ds = v_{\mathcal{H}}(z)$, которая отвечает значению $E = E_0$ и лежит на уровне $\mathcal{H} = 0$. Вычислим функции $s(x), S(x), \mathcal{C}(x)$. Вычислим в точках траектории γ функцию

$$G(s) = \frac{i}{F_r} \langle \bar{\chi}_r, \mathbf{H}_1 \chi_r \rangle + \left\langle \bar{\chi}_r, \frac{d\chi_r}{ds} \right\rangle - \frac{1}{2F_r} \left\langle \bar{\chi}_r, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial p_j \partial x_j} \chi_r \right\rangle + \\ + i \operatorname{Im} \left\langle \bar{\chi}_r, \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{F} \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \mathbf{I} \right] \frac{\partial \chi_r}{\partial x_j} \right\rangle$$

и положим

$$\lambda_0 = \frac{\int_0^{T_s} G(s) ds}{\int_0^{T_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E}(s) ds}, \quad A_{\lambda_0}(s) = \exp \left[\int_0^s \left(G(\tau) - \lambda_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E}(\tau) \right) d\tau \right]. \quad (14)$$

Из сказанного выше следует

ТЕОРЕМА 3. *Асимптотика стационарных решений, порождаемых комплексным ростком над замкнутой кривой, отвечающих моде H_r , в случае отсутствия смены кратности имеет вид*

$$E = E_0 + h\lambda_0, \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{C}(s(x))}} A_{\lambda_0(s(x))} e^{iS(x)/h}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В квазиклассической серии для систем уравнений появляются эффекты смены кратностей характеристик (эффекты пересечения мод), тогда на каких-то поверхностях в фазовом пространстве эффективные гамильтонианы, отвечающие разным модам, совпадают. Для представленных выше асимптотик важно, чтобы такой эффект не имел места на соответствующей замкнутой кривой Λ^1 . Нетрудно сообразить, что такой случай исключается, потому что в противном случае на траектории появились бы точки покоя.

4.3. Явные формулы в одном частном случае. Рассмотрим частный случай, интересный для приложений, связанных с физикой плазмы. Предположим, что гамильтониан $\mathcal{H}$ задан в фазовом пространстве с координатами x, y, z, p_x, p_y, p_z , где x, y, z – декартовы координаты в конфигурационном (физическом пространстве).

Введем тороидальные координаты в конфигурационном пространстве:

$$x = Q(r, \theta) \cos \phi, \quad y = Q(r, \theta) \sin \phi, \quad z = r \sin \theta, \quad (15)$$

где $Q(r, \theta) = R_0 + r \cos \theta$. Матрица Якоби имеет вид

$$J_3 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi & -Q \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & Q \cos \phi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

В фазовом пространстве определена каноническая замена координат

$$dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy + dp_z \wedge dz = dp_r \wedge dr + dp_\theta \wedge d\theta + dp_\phi \wedge d\phi,$$

где

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\frac{1}{r} \sin \theta \cos \phi & -\frac{1}{Q} \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & -\frac{1}{r} \sin \theta \sin \phi & \frac{1}{Q} \cos \phi \\ \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix} \equiv (J_3^{-1})^T \begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби имеет вид

$$J_6 = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z, x, y, z)}{\partial(p_r, p_\theta, p_\phi, r, \theta, \phi)} = \begin{pmatrix} (J_3^{-1})^T & M \\ 0 & J_3 \end{pmatrix},$$

где

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ -\frac{p_\theta}{r^2} \cos \theta & \cos \theta p_r - \frac{p_\theta}{r} \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$m_{11} = \frac{p_\theta}{r^2} \sin \theta \cos \phi + \frac{p_\phi}{Q^2} \cos \theta \sin \phi,$$

$$m_{12} = -\sin \theta \cos \phi p_r - \frac{p_\theta}{r} \cos \theta \cos \phi - \frac{p_\phi}{Q^2} r \sin \theta \sin \phi,$$

$$m_{13} = -\cos \theta \sin \phi p_r + \frac{p_\theta}{r} \sin \theta \sin \phi - \frac{p_\phi}{Q} \sin \phi,$$

$$m_{21} = \frac{p_\theta}{r^2} \sin \theta \sin \phi - \frac{p_\phi}{Q^2} \cos \theta \cos \phi,$$

$$m_{22} = -\sin \theta \sin \phi p_r - \frac{p_\theta}{r} \cos \theta \sin \phi + \frac{p_\phi}{Q^2} r \sin \theta \cos \phi,$$

$$m_{23} = \cos \theta \cos \phi p_r - \frac{p_\theta}{r} \sin \theta \cos \phi - \frac{p_\phi}{Q} \sin \phi.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. 1. p_ϕ – первый интеграл (циклический) системы Гамильтона, т. е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\phi, E)$.

2. Для всех $p_\phi \in (p_\phi^1, p_\phi^2)$ и $E = E(p_\phi)$ существует невырожденный минимум $z_0 = (r_0(p_\phi), \theta_0(p_\phi), p_{r0} = 0, p_\theta = 0)$, где $\mathcal{H}(z_0, p_\phi, E(p_\phi)) = 0$.

3. $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} \neq 0$, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \neq 0$, $F_r \neq 0$ в точке $z_0, p_\phi, E(p_\phi)$.

Таким образом, система обладает орбитально устойчивой периодической траекторией. Эта траектория порождает стационарное решение. Вычислим явно все объекты, входящие в асимптотику этого решения.

Прежде всего заметим, что формулы (14) переписываются в виде

$$\lambda_0 = \frac{G(z_0, p_\phi, E(p_\phi))}{\partial \mathcal{H} / \partial E(z_0, p_\phi, E(p_\phi))}, \quad A_{\lambda_0} = 1. \quad (16)$$

Найдем матрицы $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, вычислив сначала их в тороидальных координатах:

$$\mathcal{B}_{\text{tor}} = (\mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{B}^{(2)}, \mathcal{B}^{(3)}), \quad \mathcal{C}_{\text{tor}} = (\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \mathcal{C}^{(3)}),$$

где

$$\mathcal{B}_{\text{tor}}^{(j)} = (\mathcal{B}_r^{(j)}, \mathcal{B}_\theta^{(j)}, \mathcal{B}_\phi^{(j)})^T, \quad \mathcal{C}_{\text{tor}}^{(j)} = (\mathcal{C}_r^{(j)}, \mathcal{C}_\theta^{(j)}, \mathcal{C}_\phi^{(j)})^T.$$

Тогда $\mathcal{B}^{(1)} = 0$, $\mathcal{C}^{(1)} = (0, 0, \partial\mathcal{H}/\partial\phi)^T$. Для нахождения второго и третьего столбцов необходимо записать систему в вариациях, нормальная часть которой имеет постоянные коэффициенты:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_r \\ \mathcal{B}_\theta \\ \mathcal{C}_r \\ \mathcal{C}_\theta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \mathcal{B}_r \\ \mathcal{B}_\theta \\ \mathcal{C}_r \\ \mathcal{C}_\theta \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} -\mathcal{H}_{r p_r} & -\mathcal{H}_{r p_\theta} & -\mathcal{H}_{r r} & -\mathcal{H}_{r \theta} \\ -\mathcal{H}_{\theta p_r} & -\mathcal{H}_{\theta p_\theta} & -\mathcal{H}_{\theta r} & -\mathcal{H}_{\theta \theta} \\ \mathcal{H}_{p_r p_r} & \mathcal{H}_{p_r p_\theta} & \mathcal{H}_{p_r r} & \mathcal{H}_{p_r \theta} \\ \mathcal{H}_{p_\theta p_r} & \mathcal{H}_{p_\theta p_\theta} & \mathcal{H}_{p_\theta r} & \mathcal{H}_{p_\theta \theta} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Здесь матрица Ω вычисляется в точке z_0 . Из решений Флоке этой системы

$$(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_\theta, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_\theta)^T(s + T_s) = \mu(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_\theta, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_\theta)^T(s)$$

строятся решения Флоке всей системы. Для этого надо положить $\mathcal{B}_\phi \equiv 0$, а в качестве $\mathcal{C}_\phi$ взять решение задачи

$$\frac{d\mathcal{C}_\phi}{ds} = \mathcal{H}_{p_\phi p_\phi} \mathcal{C}_\phi + \mathcal{F}(s), \quad \mathcal{C}_\phi(s + T_s) = \mu \mathcal{C}_\phi(s),$$

где

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{H}_{p_\phi p_r}(z_0) \mathcal{B}_r(s) + \mathcal{H}_{p_\phi p_\theta}(z_0) \mathcal{B}_\theta(s) + \mathcal{H}_{p_\phi r}(z_0) \mathcal{C}_r(s) + \mathcal{H}_{p_\phi \theta}(z_0) \mathcal{C}_\theta(s).$$

В явном виде имеем

$$\mathcal{C}_\phi(s) = \frac{1}{\mu - e^{T_s \mathcal{H}_{p_\phi p_\phi}}} \int_0^{T_s} e^{(T_s + s - \tau) \mathcal{H}_{p_\phi p_\phi}} \mathcal{F}(\tau) d\tau + \int_0^s e^{(s - \tau) \mathcal{H}_{p_\phi p_\phi}} \mathcal{F}(\tau) d\tau.$$

Наконец, требуемые столбцы матриц $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ находятся по формуле

$$(\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z, \mathcal{C}_x, \mathcal{C}_y, \mathcal{C}_z)^T = J_6(\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_\theta, 0, \mathcal{C}_r, \mathcal{C}_\theta, \mathcal{C}_\phi)^T. \quad (18)$$

Вернемся к системе (17). Пусть $\pm\beta_j = \pm ib_j$ при $j = 1, 2$, $b_1, b_2 > 0$ – собственные значения матрицы Ω . Выясним, какие два собственных значения и собственных вектора нужно выбрать, чтобы условие диссипативности было выполнено.

ЛЕММА 2. Пусть $(2n \times 2n)$ -матрица A вещественна, симметрична и положительно определена. Пусть матрица системы

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} A \eta$$

диагонализуема и имеет собственные значения $\pm ib_j$, где $b_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Пусть v_j – собственный вектор, отвечающий собственному значению ib_j . Тогда для решения $\eta_j = v_j e^{ib_j s}$ имеет место неравенство

$$\text{Im } \omega(\eta_j, \overline{\eta_j}) > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для матрицы системы существует симплектическая замена координат, приводящая ее к диагональному виду. Поэтому общий случай сводится к рассмотрению случая размерности $n = 1$. Тогда

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} -a_{12} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \eta, \quad a_{11} > 0, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 > 0.$$

Тогда $\lambda = i\sqrt{\Delta}$, $v = (a_{11}, a_{12} - i\sqrt{\Delta})^T$ и $\omega(v, \bar{v}) = 2ia_{11}\sqrt{\Delta}$.

ЛЕММА 3. 1. Пусть

$$v^{(1)} = (v_{pr}^{(1)}, v_{p\theta}^{(1)}, v_r^{(1)}, v_\theta^{(1)})^T, \quad v^{(2)} = (v_{pr}^{(2)}, v_{p\theta}^{(2)}, v_r^{(2)}, v_\theta^{(2)})^T$$

– собственные векторы, отвечающие собственным значениям ib_1, ib_2 , с положительными мнимыми частями. Тогда

$$\mathcal{B}_{\text{tor}}(\mathcal{C}_{\text{tor}})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\text{norm}}(\mathcal{C}_{\text{norm}})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{B}_{\text{norm}} = \begin{pmatrix} v_{pr}^{(1)} & v_{pr}^{(2)} \\ v_{p\theta}^{(1)} & v_{p\theta}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{\text{norm}} = \begin{pmatrix} v_r^{(1)} & v_r^{(2)} \\ v_\theta^{(1)} & v_\theta^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

2. Имеет место

$$\mathcal{B}\mathcal{C}^{-1} = (J_3^{-1})^T \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\text{norm}}(\mathcal{C}_{\text{norm}})^{-1} & -\frac{p_\phi \cos \theta}{Q} \\ -\frac{p_\phi \cos \theta}{Q} & \frac{p_\phi r \sin \theta}{Q} \\ \frac{p_\phi r \sin \theta}{Q} & 0 \end{pmatrix} J_3^{-1}. \quad (20)$$

3. В частном случае, когда матрица Гессе от $\mathcal{H}$ по переменным r, θ, p_r, p_θ диагональна и $\mathcal{H}_{rr} = \nu_1$, $\mathcal{H}_{\theta\theta} = \nu_2$, $\mathcal{H}_{p_r p_r} = \nu_3$, $\mathcal{H}_{p_\theta p_\theta} = \nu_4$, имеем

$$\mathcal{B}\mathcal{C}^{-1} = (J_3^{-1})^T \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_3}} & 0 & -\frac{p_\phi \cos \theta}{Q} \\ 0 & i\sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_4}} & \frac{p_\phi r \sin \theta}{Q} \\ -\frac{p_\phi \cos \theta}{Q} & \frac{p_\phi r \sin \theta}{Q} & 0 \end{pmatrix} J_3^{-1}.$$

4. Имеет место

$$\det \mathcal{C}(s) = C_0 e^{i(b_1 + b_2)s} \quad \text{для некоторой константы } C_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Используя матрицы элементарных преобразований столбцов, легко получить

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\text{tor}}(\mathcal{C}_{\text{tor}})^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & e^{ib_1 s} v_{p_r}^{(1)} & e^{ib_1 s} v_{p_r}^{(2)} \\ 0 & e^{ib_1 s} v_{p_\theta}^{(1)} & e^{ib_1 s} v_{p_\theta}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{ib_1 s} v_r^{(1)} & e^{ib_1 s} v_r^{(2)} \\ 0 & e^{ib_1 s} v_\theta^{(1)} & e^{ib_1 s} v_\theta^{(2)} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} & \mathcal{C}_\phi^{(1)} & \mathcal{C}_\phi^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & \mathcal{B}_{\text{norm}} & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & \mathcal{C}_{\text{norm}} & \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\text{norm}}(\mathcal{C}_{\text{norm}})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Из (18) следует, что $\mathcal{B} = (J_3^{-1})^T \mathcal{B}_{\text{tor}} + M \mathcal{C}_{\text{tor}}$, $\mathcal{C} = J_3 \mathcal{C}_{\text{tor}}$. Следовательно,

$$\mathcal{B} \mathcal{C}^{-1} = (J_3^{-1})^T \mathcal{B}_{\text{tor}} \mathcal{C}_{\text{tor}}^{-1} J_3^{-1} + M J_3^{-1} = (J_3^{-1})^T (\mathcal{B}_{\text{tor}} \mathcal{C}_{\text{tor}}^{-1} + J_3^T M) J_3^{-1}.$$

Принимая во внимание, что $p_r = p_\theta = 0$ в точке z_0 , получаем требуемое.

3. Проверяется прямыми вычислениями.

4. Это равенство очевидно.

Отсюда сразу следует

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено предположение 3 и $p_\phi = p_\phi^0$ удовлетворяет условию квантования

$$p_\phi^0 = h \left(k + \frac{(b_1 + b_2) T_s}{4\pi} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $E = E(p_\phi^0) + h\lambda_0$, где λ_0 находится по формуле (16) и

$$\psi = \exp \left[\frac{i}{h} S_0(s) + \frac{2\pi s}{T_s} (kh - p_\phi^0) + \langle P_0(s), x - X_0(s) \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{B} \mathcal{C}^{-1} (x - X_0(s)), x - X_0(s) \rangle \right],$$

где $\mathcal{B} \mathcal{C}^{-1}$ находится по формулам (19), (20), и всюду следует положить $s = s(x)$ из условия $\langle x - X_0(s), \dot{X}_0(s) \rangle = 0$. Тогда пара E, ψ определяет асимптотическое собственное значение и собственную функцию стационарной задачи.

5. ПРИМЕР ИЗ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

5.1. Уравнение плазмы и его линеаризация. Рассмотрим ионизированный газ с двумя типами зарядов. Известными предполагаются следующие константы: заряды q_i , массы m_i , плотности n_i , $i = 1, 2$. Выражение для тока имеет вид

$$\mathbf{J} = n_1 q_1 \mathbf{v}_1 + n_2 q_2 \mathbf{v}_2.$$

Мы будем предполагать, что приложенное магнитное поле $\mathbf{B}$ значительно больше, чем магнитное поле, порожденное движением зарядов. Уравнение для электрического поля получается после удаления магнитного поля $\mathbf{B}$:

$$\epsilon^2 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь $\wedge$ обозначает векторное произведение. Добавляя уравнение Ньютона для двух типов зарядов, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= \frac{q_1}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B} \right), \\ \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \frac{q_2}{m_2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{B} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Эта система нелинейна, поскольку

$$\frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_j, \nabla \rangle \mathbf{v}_j.$$

Линеаризуем ее, пренебрегая членами $\langle \mathbf{v}_j, \nabla \rangle \mathbf{v}_j$. После линеаризации мы можем переписать систему (21) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{c}^2 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{n_1 q_1^2}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B} \right) + \frac{n_2 q_2^2}{m_2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{B} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \frac{q_1}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{q_2}{m_2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{B} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mathbf{B}$ – известная функция, а $\mathbf{E}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ – неизвестные. Система (22) рассматривается внутри полнотория в $\mathbb{R}^3$. Введем искусственный параметр h и сделаем замену переменных, положив $x = \mathbf{c}x'/h$, $t = t'/h$. В дальнейшем пишем t вместо t' .

Введем новую вектор-функцию $\mathbf{W} = -ih(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ и перепишем уравнения (22) в виде

$$\begin{aligned} ih \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\mathbf{W}, \\ ih \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} &= (-ih \nabla) \wedge (-ih \nabla) \wedge \mathbf{E} - \frac{n_1 q_1^2}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B} \right) - \frac{n_2 q_2^2}{m_2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{B} \right), \\ ih \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= i \frac{q_1}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B} \right), \\ ih \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} &= i \frac{q_2}{m_2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{B} \right). \end{aligned}$$

Введем столбец неизвестных $\Phi = (\mathbf{E}, \mathbf{W}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^T$ с 12 компонентами. Тогда предыдущая система запишется в виде

$$ih \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \hat{\mathbf{A}} \Phi, \quad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(x, -ih \nabla, h) = \mathbf{A}_0(x, -ih \nabla) + O(h^2),$$

где $\mathbf{A}(x, p)$ – матрично-значный символ оператора $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{A}(x, \hat{p})\Phi = \begin{pmatrix} -\mathbf{W} \\ (-ih\nabla) \wedge (-ih\nabla) \wedge \mathbf{E} - \frac{n_1 q_1^2}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B} \right) - \frac{n_2 q_2^2}{m_2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{B} \right) \\ i \frac{q_1}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B} \right) \\ i \frac{q_2}{m_2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{B} \right) \end{pmatrix}$$

(мы включили все члены в $\mathbf{A}_0$, считая, что $\mathbf{A}_1 = 0$).

Будем изучать стационарные решения, для этого положим

$$\Phi = e^{-i\omega t/\hbar} \Psi(x) \equiv e^{-i\omega t/\hbar} (\mathbf{W}(x), \mathbf{E}(x), \mathbf{v}_1(x), \mathbf{v}_2(x))^T.$$

Опуская штрихи, положив $\hat{p} = -ih\nabla$ и $\omega_j^2 = n_j q_j^2 / m_j$, получаем

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{W} \\ \hat{p} \wedge \hat{p} \wedge \mathbf{E} - \omega_1^2 \left(\mathbf{E} - \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}_1 \right) - \omega_2^2 \left(\mathbf{E} - \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}_2 \right) \\ i \frac{q_1}{m_1} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}_1 \right) \\ i \frac{q_2}{m_2} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{\mathbf{c}} \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}_2 \right) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

5.2. Сведение к пучку с (3×3) -символом. Теперь исключим $\mathbf{W}$ и $\mathbf{v}_j$. Имеем

$$\mathbf{W} = -\omega \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{v}_j}{\mathbf{c}} - \frac{i}{\sigma_j} \frac{\mathbf{v}_j}{\mathbf{c}} = \mathbf{E}, \quad (24)$$

где

$$\sigma_j = \frac{q_j}{m_j \omega \mathbf{c}}. \quad (25)$$

Введем

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. $\sigma_j^2 \mathbf{B}^2 \neq 1$ для всех x .

Тогда из уравнения (24) мы находим

$$\frac{\mathbf{v}_j}{\mathbf{c}} = \frac{1}{1 - \sigma_j^2 \mathbf{B}^2} (i(1 - \sigma_j^2 \mathbf{B}^2) \sigma_j \mathbf{E} + \sigma_1^2 \mathbf{B} \wedge \mathbf{E} - i \sigma_j^3 \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{E}). \quad (26)$$

Исключая $\mathbf{v}_j$ и W из (23), получаем (уже трехмерную) систему

$$\hat{p} \wedge \hat{p} \wedge \mathbf{E} + \omega^2 \mathbf{E} + i \frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{c}} \frac{\omega_1^2}{\sigma_1} + i \frac{\mathbf{v}_2}{\mathbf{c}} \frac{\omega_2^2}{\sigma_2} = 0,$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ определяются из (26).

В итоге получаем пучок операторов

$$\mathbf{H}(x, \hat{p}, \omega) \mathbf{E} \equiv \hat{p} \wedge \hat{p} \wedge \mathbf{E} + a \mathbf{E} + i b \mathbf{B} \wedge \mathbf{E} + c \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{E} = 0, \quad (27)$$

где

$$a = \omega^2 - \omega_{\text{pl}}^2, \quad b = \frac{\omega_1^2 \sigma_1}{1 - \sigma_1^2 \mathbf{B}^2} + \frac{\omega_2^2 \sigma_2}{1 - \sigma_2^2 \mathbf{B}^2}, \quad c = \frac{\omega_1^2 \sigma_1^2}{1 - \sigma_1^2 \mathbf{B}^2} + \frac{\omega_2^2 \sigma_2^2}{1 - \sigma_2^2 \mathbf{B}^2}, \quad (28)$$

а $\omega_{\text{pl}} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ — частота плазмы. Легко видеть, что оператор $\mathbf{H}$ является по крайней мере симметричным.

5.3. Некоторые свойства символа $\mathbf{H}(x, p, \omega)$. Изучим свойства матрицы

$$\mathbf{H}(x, p) = p \wedge p \wedge + a\mathbf{I} + ib\mathbf{B} \wedge + c\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge = 0.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5. В интересующей нас области фазового пространства векторы p и $\mathbf{B}$ не параллельны.

Тогда тройка $p, \mathbf{B}, p \wedge \mathbf{B}$ образует базис, и, следовательно, $\mathbf{E}$ можно разложить следующим образом:

$$\mathbf{E} = z_1 p + z_2 \mathbf{B} + z_3 p \wedge \mathbf{B}. \quad (29)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполнены предположения 4 и 5. Тогда определитель $\mathcal{H}(x, p, \omega) = \det \mathbf{H}$ и сумма главных миноров второго порядка $\mathcal{I}(x, p, \omega)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, p, \omega) = & a^3 - 2a^2 c \mathbf{B}^2 - 2a^2 p^2 - ab^2 \mathbf{B}^2 + ac^2 \mathbf{B}^4 + 3acp^2 \mathbf{B}^2 - ac\langle p, \mathbf{B} \rangle^2 + \\ & + ap^4 + b^2 p^2 \mathbf{B}^2 - b^2 \langle p, \mathbf{B} \rangle^2 - c^2 p^2 \mathbf{B}^4 + \\ & + c^2 \langle p, \mathbf{B} \rangle^2 \mathbf{B}^2 - cp^4 \mathbf{B}^2 + cp^2 \langle p, \mathbf{B} \rangle^2, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathcal{I}(x, p, \omega) = -a^2 + 2a(p^2 + c\mathbf{B}^2) + b^2 \mathbf{B}^2 - c^2 \mathbf{B}^4 - cp^2 \mathbf{B}^2 - c\langle p, \mathbf{B} \rangle^2 - p^4,$$

где $a = a(\omega)$, $b = b(\omega)$, $c = c(\omega)$ находятся из формул (28) и (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что выполнены следующие тождества:

$$\begin{aligned} p \wedge p \wedge p &= 0, & p \wedge p \wedge \mathbf{B} &= \langle p, \mathbf{B} \rangle p - p^2 \mathbf{B}, & p \wedge p \wedge p \wedge \mathbf{B} &= -p^2 p \wedge \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} \wedge p &= -p \wedge \mathbf{B}, & \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} \wedge p \wedge \mathbf{B} &= \mathbf{B}^2 p - \langle p, \mathbf{B} \rangle \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge p &= \langle p, \mathbf{B} \rangle \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 p, & \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge p \wedge \mathbf{B} &= -\mathbf{B}^2 p \wedge \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Подставим (29) в (27). Используя выписанные тождества, получим

$$\begin{aligned} & z_2 (\langle p, \mathbf{B} \rangle p - p^2 \mathbf{B}) - z_3 p^2 p \wedge \mathbf{B} + az_1 p + az_2 \mathbf{B} + az_3 p \wedge \mathbf{B} - \\ & - ibz_1 p \wedge \mathbf{B} + ibz_3 (\mathbf{B}^2 p - \langle p, \mathbf{B} \rangle \mathbf{B}) + cz_1 (\langle p, \mathbf{B} \rangle \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 p) - cz_3 \mathbf{B}^2 p \wedge \mathbf{B} = \\ & = (z_2 \langle p, \mathbf{B} \rangle + az_1 + ibz_3 \mathbf{B}^2 - cz_1 \mathbf{B}^2) p + (-z_2 p^2 + az_2 + cz_1 \langle p, \mathbf{B} \rangle - ibz_3 \langle p, \mathbf{B} \rangle) \mathbf{B} + \\ & + (-z_3 p^2 + az_3 - ibz_1 - cz_3 \mathbf{B}^2) p \wedge \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z_1 (a - c\mathbf{B}^2) + z_2 \langle p, \mathbf{B} \rangle + ibz_3 \mathbf{B}^2 &= 0, \\ z_1 c \langle p, \mathbf{B} \rangle + z_2 (a - p^2) - z_3 ib \langle p, \mathbf{B} \rangle &= 0, \\ ibz_1 + z_3 (p^2 - a + c\mathbf{B}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Определитель этой системы имеет вид (30). Утверждение доказано.

Теперь если предположить, что $\mathcal{H} = 0$, а $\mathcal{I} \neq 0$ (что равносильно предположению 1), то без труда находится собственный вектор χ_r , отвечающий моде H_r . Этот вектор есть нетривиальное (единственное с точностью до умножения на скаляр) решение уравнения $\mathbf{H}\chi_r = 0$. Чтобы его найти, решим систему (31). Не ограничивая общности, будем считать, что $a - p^2 - c\mathbf{B}^2 \neq 0$; тогда мы можем выразить z_2 и z_3 через z_1 :

$$z_2 = -\left(\frac{b^2}{a - p^2 - c\mathbf{B}^2} + c\right) \frac{\langle p, \mathbf{B} \rangle}{a - p^2} z_1, \quad z_3 = \frac{ib}{a - p^2 - c\mathbf{B}^2} z_1,$$

$$\chi_r \equiv \mathbf{E} = z_1 \left(p - \left(\frac{b^2}{a - p^2 - c\mathbf{B}^2} + c \right) \frac{\langle p, \mathbf{B} \rangle}{a - p^2} \mathbf{B} + \frac{ib}{a - p^2 - c\mathbf{B}^2} p \wedge \mathbf{B} \right).$$

Условие нормировки дает

$$z_1 = \left(p^2 + \left(c + \frac{b^2}{a - p^2 - c\mathbf{B}^2} \right)^2 \frac{\mathbf{B}^2 \langle p, \mathbf{B} \rangle^2}{(a - p^2)^2} + \frac{b^2}{(a - p^2 - c\mathbf{B}^2)^2} (p \wedge \mathbf{B})^2 \right)^{-1/2}.$$

Итак, мы получили явные формулы для определителя $\mathcal{H}$ и собственных векторов χ_r .

5.4. Явный вид дисперсионного соотношения с учетом физических значений параметров. Покажем на конкретном примере, что асимптотику стационарных решений можно эффективно вычислять. Рассмотрим следующий вид магнитного поля (в тороидальных координатах (15)):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta) \\ B_\theta(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{B_0}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta} \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ r - a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}^2 = p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{Q^2},$$

$$\mathbf{B}^2 = B_r^2(r, \theta) + B_\theta^2(r, \theta) = \frac{B_0^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta},$$

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{B} \rangle = \frac{B_0}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta} \left(-ap_r \sin \theta + \frac{(r - a \cos \theta)p_\theta}{r} \right).$$

Заметим, что p_ϕ – первый интеграл.

Зададим значения характерные для реального ТОКАМАКА параметров и констант (см. [5]): $B_0 = 3.4 \cdot 10^4$ Гс, 30 см $= a \leq R_0 = 90$ см, заряд электрона $q_e = -4.8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ, заряд протона $q_p = 4.8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ, масса электрона $m_e = 9.1 \cdot 10^{-28}$ г, масса протона $m_p = 1.672 \cdot 10^{-24}$ г, скорость света $c = 2.99790 \cdot 10^{10}$ см/с, плотность электронов и протонов $n(r) = 10^{14} N(r)$, $N(r) = N_0(1 - r^2/a^2) + N_1$, где $N_0 = 1$ и $N_1 = 0.5$. Таким образом, $n(r) = (1.5 - r^2/a^2) = (1.5 - r^2/30^2)$. Введем обозначения

$$\Omega_1 = \Omega_e = \frac{q_e}{m_e c} = -\frac{q}{m_e c}, \quad \Omega_2 = \Omega_p = \frac{q_p}{m_p c} = \frac{q}{m_p c}, \quad q = 4.8 \cdot 10^{-10}$$

и

$$\alpha_1 = \omega_1^2 \Omega_1^2 + \omega_2^2 \Omega_2^2, \quad \alpha_2 = \omega_2^2 \Omega_1^2 + \omega_1^2 \Omega_2^2,$$

$$\beta = (\omega_2^2 \Omega_1 + \omega_1^2 \Omega_2)^2, \quad \gamma = \omega_1^2 \omega_2^2 (\Omega_1 - \Omega_2)^2.$$

Тогда гамильтониан (30) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(p, x, \omega) = & \omega^2 \mathbf{P}^2 \mathbf{B}^2 \langle \mathbf{P}, \mathbf{B} \rangle^2 (\omega_{\text{pl}}^2) \Omega_1^2 \Omega_2^2 - \\
 & - \omega^4 \left[\langle \mathbf{P}, \mathbf{B} \rangle^2 \mathbf{P}^2 \alpha_1 + \mathbf{B}^2 (\omega_{\text{pl}}^2) \beta + \mathbf{B}^2 \langle \mathbf{P}, \mathbf{B} \rangle^2 (\omega_{\text{pl}}^2) \Omega_1^2 \Omega_2^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{P}^2 (2\beta + \gamma) + \right. \\
 & \quad \left. + \mathbf{B}^2 \mathbf{P}^4 \alpha_2 + \mathbf{B}^4 \mathbf{P}^2 (\omega_{\text{pl}}^2) \Omega_1^2 \Omega_2^2 + \mathbf{B}^4 \mathbf{P}^4 \Omega_1^2 \Omega_2^2 + \langle \mathbf{P}, \mathbf{B} \rangle^2 \gamma \right] + \\
 & + \omega^6 \left[(\mathbf{P}^4 (\omega_{\text{pl}}^2) + (\omega_{\text{pl}}^2)^3 + 2\mathbf{P}^2 (\omega_{\text{pl}}^2)^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{P}^4 \Omega_1^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{P}^2 (\alpha_1 + 4\alpha_2) + \right. \\
 & \quad \left. + \langle \mathbf{P}, \mathbf{B} \rangle^2 \alpha_1 + \mathbf{B}^2 (3\beta + 2\gamma) + 2\mathbf{B}^4 \mathbf{P}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 + \mathbf{B}^4 (\omega_{\text{pl}}^2) \Omega_1^2 \Omega_2^2 \right] - \\
 & - \omega^8 \left[\mathbf{P}^4 + 4\mathbf{P}^2 (\omega_{\text{pl}}^2) + 3(\omega_{\text{pl}}^2)^2 + 2\mathbf{B}^2 \mathbf{P}^2 \Omega_1^2 + \mathbf{B}^2 (\alpha_1 + 3\alpha_2) + \mathbf{B}^4 \Omega_1^2 \Omega_2^2 \right] + \\
 & + \omega^{10} [2\mathbf{P}^2 + 3(\omega_{\text{pl}}^2) + \mathbf{B}^2 \Omega_1^2] - \omega^{12} = 0.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Чтобы воспользоваться результатами п. 4.3, найдем минимумы гамильтониана (32). Положим $p_r = p_\theta = 0$ и $\theta = 0$ (аналогично можно рассмотреть случай $\theta = \pi$). Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0.$$

Для нахождения минимума нужно найти критические точки функции от r (зависимость от ω и p_ϕ мы игнорируем):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0(r) = \mathcal{H} \Big|_{p_r=p_\theta=\theta=0} = & -\omega^4 \left[\frac{\beta \omega_{\text{pl}}^2 B_0^2}{(a-r)^2} + \frac{(2\beta + \gamma) p_\phi^2 B_0^2}{(a-r)^2 (R_0 + r)^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\alpha_2 p_\phi^4 B_0^2}{(R_0 + r)^4 (a-r)^2} + \frac{\omega_{\text{pl}}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4 p_\phi^2}{(a-r)^4 (R_0 + r)^2} + \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2 p_\phi^4 B_0^4}{(R_0 + r)^4 (a-r)^4} \right] + \\
 & + \omega^6 \left[\frac{\omega_{\text{pl}}^2 p_\phi^4}{(R_0 + r)^4} + \omega_{\text{pl}}^6 + \frac{2\omega_{\text{pl}}^4 p_\phi^2}{(R_0 + r)^2} + \frac{\Omega_1^2 p_\phi^4 B_0^2}{(R_0 + r)^4 (a-r)^2} + \frac{(\alpha_1 + 4\alpha_2) p_\phi^2 B_0^2}{(a-r)^2 (R_0 + r)^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(3\beta + 2\gamma) B_0^2}{(a-r)^2} + \frac{2\Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4 p_\phi^2}{(a-r)^4 (R_0 + r)^2} + \frac{\omega_{\text{pl}}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4}{(a-r)^4} \right] - \\
 & - \omega^8 \left[\frac{p_\phi^4}{(R_0 + r)^4} + \frac{4\omega_{\text{pl}}^2 p_\phi^2}{(R_0 + r)^2} + 3\omega_{\text{pl}}^4 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2\Omega_1^2 p_\phi^2 B_0^2}{(a-r)^2 (R_0 + r)^2} + \frac{(\alpha_1 + 3\alpha_2) B_0^2}{(a-r)^2} + \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4}{(a-r)^4} \right] + \\
 & + \omega^{10} \left[\frac{2p_\phi^2}{(R_0 + r)^2} + 3\omega_{\text{pl}}^2 + \frac{\Omega_1^2 B_0^2}{(a-r)^2} \right] - \omega^{12}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(r) + \mathcal{A}_{p_r}(r) p_r^2 + \mathcal{A}_{p_\theta}(r) p_\theta^2 + \mathcal{A}_\theta(r) \theta^2 + O((p_r^2 + p_\theta^2 + \theta^2)^2),$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{p_r} = & -\omega^4 \left[\frac{(2\beta + \gamma)B_0^2}{(a-r)^2} + \frac{2\alpha_2 B_0^2 p_\phi^2}{(R_0+r)^2(a-r)^2} + \frac{\omega_{\text{pl}}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4}{(a-r)^4} + \frac{2\Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4 p_\phi^2}{(R_0+r)^2(a-r)^4} \right] + \\
 & + \omega^6 \left[\frac{2\omega_{\text{pl}}^2 p_\phi^2}{(R_0+r)^2} + 2\omega_{\text{pl}}^4 + \frac{2\Omega_1^2 B_0^2 p_\phi^2}{(R_0+r)^2(a-r)^2} + \frac{(\alpha_1 + 4\alpha_2)B_0^2}{(a-r)^2} + \frac{2\Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4}{(a-r)^4} \right] - \\
 & - \omega^8 \left[\frac{2\phi^2}{(R_0+r)^2} + 4\omega_{\text{pl}}^2 + \frac{2\Omega_1^2 B_0^2}{(a-r)^2} \right] + 2\omega^{10}, \\
 \mathcal{A}_{p_\theta} = & \omega^2 \frac{\omega_{\text{pl}}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4 p_\phi^2}{r^2(a-r)^4(R_0+r)^2} - \omega^4 \left[\frac{\alpha_1 B_0^2 p_\phi^2}{r^2(R_0+r)^2(a-r)^2} + \frac{\omega_{\text{pl}}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4}{r^2(a-r)^4} + \right. \\
 & + \frac{(2\beta + \gamma)B_0^2}{r^2(a-r)^2} + \frac{2\alpha_2 B_0^2 p_\phi^2}{r^2(R_0+r)^2(a-r)^2} + \frac{\omega_{\text{pl}}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4}{r^2(a-r)^2} + \frac{2\Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4 p_\phi^2}{r^2(R_0+r)^2(a-r)^4} + \\
 & + \frac{\gamma B_0^2}{r^2(a-r)^2} \left. \right] + \omega^6 \left[\frac{2\omega_{\text{pl}}^2 p_\phi^2}{r^2(R_0+r)^2} + \frac{2\omega_{\text{pl}}^4}{r^2} + \frac{2\Omega_1^2 B_0^2 p_\phi^2}{r^2(R_0+r)^2(a-r)^2} + \right. \\
 & + \frac{(\alpha_1 + 4\alpha_2)B_0^2}{r^2(a-r)^4} + \frac{\alpha_1 B_0^2}{r^2(a-r)^2} + \frac{2\Omega_1^2 \Omega_2^2 B_0^4}{r^2(a-r)^4} \left. \right] - \\
 & - \omega^8 \left[\frac{2p_\phi^2}{r^2(R_0+r)^2} + \frac{4\omega_{\text{pl}}^2}{r^2} + \frac{2\Omega_1^2 B_0^2}{r^2(a-r)^2} \right] + \omega^{10} \frac{2}{r^2}, \\
 \mathcal{A}_\theta = & -\omega^4 \left[-\frac{a\beta\omega_{\text{pl}}^2 r B_0^2}{(a-r)^4} - \frac{(2\beta + \gamma)r(a^2 - 3ar + r^2 - aR_0)B_0^2 p_\phi^2}{(a-r)^4(R_0+r)^3} + \right. \\
 & + \frac{\alpha_2 r(2a^2 - 5ar + 2r^2 - aR_0)B_0^2 p_\phi^4}{(R_0+r)^5(a-r)^4} + \frac{\omega_{\text{pl}}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 r(a^2 - 4ar + r^2 - 2aR_0)B_0^4 p_\phi^2}{(a-r)^6(R_0+r)^3} + \\
 & + \frac{2\Omega_1^2 \Omega_2^2 r(a^2 - 3ar + r^2 - aR_0)B_0^4 p_\phi^4}{(R_0+r)^5(a-r)^6} \left. \right] + \\
 & + \omega^6 \left[\frac{2\omega_{\text{pl}}^2 r p_\phi^4}{(R_0+r)^5} + \frac{2\omega_{\text{pl}}^4 r p_\phi^2}{(R_0+r)^3} + \frac{\Omega_1^2 r(a^2 - 4ar + r^2 - 2aR_0)B_0^2 p_\phi^4}{(R_0+r)^5(a-r)^4} + \right. \\
 & + \frac{(\alpha_1 + 4\alpha_2)r(a^2 - 3ar + r^2 - aR_0)B_0^2 p_\phi^2}{(a-r)^4(R_0+r)^3} - \frac{(3\beta + 2\gamma)arB_0^2}{(a-r)^4} + \\
 & + \frac{2\Omega_1^2 \Omega_2^2 r(a^2 - 4ar + r^2 - 2aR_0)B_0^4 p_\phi^2}{(a-r)^6(R_0+r)^3} - \frac{2\omega_{\text{pl}}^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 arB_0^4}{(a-r)^6} \left. \right] - \\
 & - \omega^8 \left[\frac{2rp_\phi^4}{(R_0+r)^5} + \frac{4\omega_{\text{pl}}^2 r p_\phi^2}{(R_0+r)^3} + \frac{2\Omega_1^2 r(a^2 - 3ar + r^2 - aR_0)B_0^2 p_\phi^2}{(a-r)^4(R_0+r)^3} - \right. \\
 & - \frac{(\alpha_1 + 3\alpha_2)arB_0^2}{(a-r)^4} - \frac{2\Omega_1^2 \Omega_2^2 arB_0^4}{(a-r)^6} \left. \right] + \omega^{10} \left[\frac{2rp_\phi^2}{(R_0+r)^3} - \frac{\Omega_1^2 arB_0^2}{(a-r)^4} \right] - \omega^{12}.
 \end{aligned}$$

Теперь для нахождения значений параметров, отвечающих минимумам функции $\mathcal{H}$, достаточно изучать функции одной переменной. Наши численные расчеты показывают, что такие значения параметров p_ϕ и ω найти можно. Из рис. 1–3 видно, что при $\phi = 10^{11}$ существует такое значение $\omega \in [5.67 \cdot 10^{11}, 5.7 \cdot 10^{11}]$, что локальный минимум $\mathcal{H}_0(r)$ достигается при $\mathcal{H}_0 = 0$. Также легко проверить, что функции $\mathcal{A}_{p_r}$, $\mathcal{A}_{p_\theta}$, $\mathcal{A}_\theta$ положительны, и, следовательно, минимум невырожденный.

Рис. 1. График $\mathcal{H}_0(r)$ при $p_\phi = 10^{11}$, $\omega = 5.7 \cdot 10^{11}$, масштаб по оси ординат $[-10^{140}, 10^{140}]$.

Рис. 2. График $\mathcal{H}_0(r)$ при $p_\phi = 10^{11}$, $\omega = 5.67 \cdot 10^{11}$, масштаб по оси ординат $[-10^{139}, 10^{139}]$.

Рис. 3. График $\mathcal{H}_0(r)$ при $p_\phi = 10^{11}$, $\omega = 5.7 \cdot 10^{11}$, масштаб по оси ординат $[-10^{139}, 10^{139}]$.

Таким образом, можно применить теорему 4 (с использованием формулы (20)) для вычисления асимптотики стационарных решений. Подбор значений параметров для выполнения условия квантования, а также явное вычисление спектральной серии и асимптотических решений представляют собой интересную и нетривиальную задачу, которая будет решена в дальнейших работах.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство теоремы 1

Запишем уравнение переноса на лагранжевом многообразии $\Lambda \subset \{H_r = 0\}$:

$$\frac{dA_\lambda}{dt} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 H_r}{\partial p \partial x} A_\lambda + i L_r A_\lambda - \lambda \frac{\partial H_r}{\partial E} A_\lambda = 0,$$

где $d/dt = \operatorname{ad} H_r$ и

$$L_r = \langle \overline{\chi_r}, \mathbf{H}_1 \chi_r \rangle - i \left\langle \overline{\chi_r}, \frac{d\chi_r}{dt} \right\rangle - i \widetilde{L}_r, \quad \widetilde{L}_r = \left\langle \overline{\chi_r}, \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial p_j} - \frac{\partial H_r}{\partial p_j} \right) \frac{\partial \chi_r}{\partial x_j} \right\rangle.$$

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство*

$$2 \operatorname{Re} \widetilde{L}_r + \left\langle \overline{\chi_r}, \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial p_j \partial x_j} - \frac{\partial^2 H_r}{\partial p_j \partial x_j} \right) \chi_r \right\rangle = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем по p_j тождество $\langle \overline{\chi_r}, (\mathbf{H}_0 - H_r) \chi_r \rangle = 0$, используя симметричность матрицы $\mathbf{H}_0$:

$$\left\langle \overline{\chi_r}, \left(\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial p_j} - \frac{\partial H_r}{\partial p_j} \right) \chi_r \right\rangle = 0. \quad (33)$$

Продифференцируем полученное равенство по x_j , затем просуммируем по j и получим требуемое. Лемма доказана.

Применяя эту лемму, получаем

$$L_r = -i \left\langle \overline{\chi_r}, \frac{d\chi_r}{dt} \right\rangle + \langle \overline{\chi_r}, \mathbf{H}_1 \chi_r \rangle + \frac{i}{2} \left\langle \overline{\chi_r}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial p_j \partial x_j} \chi_r \right\rangle - \frac{i}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 H_r}{\partial p \partial x} + \operatorname{Im} \widetilde{L}_r.$$

Наконец, выражая H_r через $\mathcal{H} = \det \mathbf{H}_0$, т. е. $H_r = F_r \mathcal{H}$, и взяв в качестве s гамильтоново время вдоль $\mathcal{H}$, мы можем переписать уравнение переноса в виде

$$\begin{aligned} F \frac{dA_\lambda}{ds} + F \left\langle \overline{\chi_r}, \frac{d\chi_r}{ds} \right\rangle A_\lambda + i \langle \overline{\chi_r}, \mathbf{H}_1 \chi_r \rangle A_\lambda - \frac{1}{2} \left\langle \overline{\chi_r}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial p_j \partial x_j} \chi_r \right\rangle A_\lambda + \\ + i \operatorname{Im} \left\langle \overline{\chi_r}, \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial p_j} - F_r \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial p_j} \right) \frac{\partial \chi_r}{\partial x_j} \right\rangle A_\lambda - F \lambda \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} A_\lambda = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доказательство леммы 1

Достаточно проверить, что функция ξ , построенная по формуле (13), является решением системы (10). То, что она является решением Флоке, ясно из построения.

Отметим, что

$$\frac{dv_H(Z_H(t))}{dt} = \Omega_H v_H(Z_H(t)), \quad \frac{dv_{\mathcal{H}}(Z_{\mathcal{H}}(s))}{ds} = \Omega_{\mathcal{H}} v_{\mathcal{H}}(Z_{\mathcal{H}}(s)).$$

Далее для любой функции ξ такой, что $dH(\xi) = 0$,

$$\Omega_H(t)\xi = F\Omega_{\mathcal{H}}|_{z=Z_H(t)}\xi + \Omega_1\xi, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} -\mathcal{H}_x \otimes F_p & -\mathcal{H}_x \otimes F_x \\ \mathcal{H}_p \otimes F_p & \mathcal{H}_p \otimes F_x \end{pmatrix} \Big|_{z=Z_H(t)}.$$

В инвариантной форме: $\Omega_1\xi = dF(\xi)v_{\mathcal{H}}$.

Таким образом, после подстановки (13) в (10) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} - \Omega_H\xi &= F \frac{d\eta}{ds} + F \frac{dr}{ds} v_{\mathcal{H}} + Fr \frac{dv_{\mathcal{H}}}{ds} - (F\Omega_{\mathcal{H}} + \Omega_1)(\eta + rv_{\mathcal{H}}) = \\ &= F \left(\frac{d\eta}{ds} - \Omega_{\mathcal{H}}\eta \right) + Fr \left(\frac{dv_{\mathcal{H}}}{ds} - \Omega_{\mathcal{H}}v_{\mathcal{H}} \right) + \left(F \frac{dr}{ds} - dF(\eta + rv_{\mathcal{H}}) \right) v_{\mathcal{H}} = \\ &= F \left(\frac{dr}{ds} - r \frac{\{F, \mathcal{H}\}}{F} - \frac{dF(\eta)}{F} \right) v_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

В силу условия (12) это выражение обращается в нуль. Лемма доказана.

Благодарности. Авторы благодарны В. Е. Назайкинскому и И. А. Богаевскому за обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [2] С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, М. Руло, “Принцип Мопертюи–Якоби для гамильтонианов вида $f(x, |p|)$ в некоторых двумерных стационарных квазиклассических задачах”, *Матем. заметки*, **97**:1 (2015), 48–57; А. Ю. Аникин, Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, “Усреднение и траектории гамильтоновой системы, возникающей в графене, помещенном в сильное магнитное поле и периодическое электрическое поле”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **20**:2 (2015), 5–20.
- [3] B. Yu. Sternin, V. E. Shatalov, “Characteristic Cauchy problem on a complex-analytic manifold”, *Global Analysis Studies and Applications I*, Lecture Notes in Mathematics, **1108**, eds. Yu. G. Borisovich, Yu. E. Gliklikh, A. M. Vershik, Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 54–76.
- [4] И. А. Богаевский, “Каустики внутреннего рассеяния”, *Тр. МИАН*, **267** (2009), 7–13.
- [5] R. A. Gerwin, “Initial value solution of Maxwell’s equations in cold plasma”, *Amer. J. Phys.*, **30** (1962), 711–715; E. Mazzucato, “Propagation of a Gaussian beam in a non-homogeneous plasma”, *Phys. Fluid B: Plasma Phys.*, **1**:9 (1989), 1855–1859; Erratum, **2**:1 (1990), 228; J. P. Freidberg, *Ideal MHD*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014; G. V. Pereverzev, “Paraxial WKB description of short wavelength eigenmodes in a tokamak”, *Phys. Plasmas*, **8**:8 (2001), 3664–3672; Yu. A. Kravtsov, P. B. Berczynski, “Gaussian beams in inhomogeneous media: a review”, *Stud. Geophys. Geod.*, **51**:1 (2007),

- 1–36; R. A. Cairns, V. Fuchs, “Calculation of a wave field from ray tracing”, *Nucl. Fusion*, **50**:9 (2010), 095001; С.Ю. Доброхотов, А. Кардинали, А.И. Клевин, Б. Тироцци, “Комплексный росток Маслова и высокочастотные гауссовы пучки в холодной плазме в торической области”, *Докл. РАН. Матем. физ.*, **469**:6 (2016), 666–671.
- [6] A. A. Shkalikov, “Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula”, *Recent Developments in Operator Theory and Its Applications* (Winnipeg, Canada, October 2–6, 1994), *Operator Theory: Advance and Applications*, **87**, eds. I. Gohberg, P. Lancaster, P. N. Shivakumar, Birkhäuser, Basel, 1996, 358–385.
- [7] В.П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977; В.В. Белов, С.Ю. Доброхотов, “Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход”, *ТМФ*, **92**:2 (1992), 215–254; В.В. Белов, О.С. Доброхотов, С.Ю. Доброхотов, “Изотропные торы, комплексный росток и индекс Маслова, нормальные формы и квазимоды многомерных спектральных задач”, *Матем. заметки*, **69**:4 (2001), 483–515; С.Ю. Доброхотов, А.И. Шафаревич, “Квазиклассическое квантование изотропных многообразий гамильтоновых систем”, *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, Факториал, М., 1998, 41–114.
- [8] В.М. Бабич, В.С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972; J. V. Ralston, “On the construction of quasimodes associated with stable periodic orbits”, *Commun. Math. Phys.*, **51**:3 (1976), 219–242.
- [9] В.П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [10] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskiy, “Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics”, *J. Eng. Math.*, **55**:1–4 (2016), 183–237; S. B. Leble, *Nonlinear Waves in Waveguides with Stratification*, Springer, Berlin, 1991.
- [11] В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974; R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings Publ., Reading, MA, 1978; A. V. Tsiganov, “The Maupertuis principle and canonical transformations of the extended phase space”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 157–182; S. Yu. Dobrokhotov, M. Rouleux, “The semi-classical Maupertuis–Jacobi correspondence for quasi-periodic Hamiltonian flows with applications to linear water waves theory”, *Asymptotic. Anal.*, **74**:1–2 (2011), 33–73; С.Ю. Доброхотов, М. Руло, “Квазиклассический аналог принципа Мопертюи–Якоби и его приложение к линейной теории волн на воде”, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 458–463.

Поступила в редакцию 16.12.2016,
после доработки 22.06.2017