Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Воронина, А. С. Давыдов, К. А. Свешников, Ваку-
умные эффекты для одномерного “атома водорода” при
 $Z > Z_{\text{cr}}$, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 276–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:20:35

© 2017 г.

Ю. С. Воронина*, А. С. Давыдов*,
К. А. Свешников*

ВАКУУМНЫЕ ЭФФЕКТЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО “АТОМА ВОДОРОДА” ПРИ $Z > Z_{\text{cr}}$

Для сверхкритического кулоновского источника с зарядом $Z > Z_{\text{cr}}$ в $1+1$ измерениях исследованы непертурбативные свойства вакуумной плотности $\rho_{\text{VP}}(x)$ и энергии $\mathcal{E}_{\text{VP}}$. Показано, что при соответствующих параметрах задачи нелинейные эффекты в закритической области могут приводить к существенно отличному от пертурбативного квадратичного роста поведению вакуумной энергии вплоть до (почти) квадратичного убывания вида $-|\eta|Z^2$ в отрицательную область. Показано также, что, хотя подходы к вычислению вакуумных средних и поведение $\rho_{\text{VP}}(x)$ в закритической области для различного числа пространственных измерений действительно имеют много общего, но $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ для $1+1$ измерений в закритической области обладает целым рядом специфических особенностей, обусловленных одномерностью задачи.

Ключевые слова: квазиодномерная система Дирака–Кулона, одномерный “атом водорода”, поляризация вакуума, непертурбативные эффекты при $Z > Z_{\text{cr}}$.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9325>

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с пионерских работ Лоудона и Эллиота [1], [2] исследование квазиодномерных атомных систем с кулоновским взаимодействием вызывает большой интерес в связи с постоянно растущим числом физических приложений [3]–[15]. Такие системы являются начальным приближением для целого ряда двух- и трехмерных задач, в частности при описании электрона, “парящего” над сверхтекучими жидкостями [3]–[5], при изучении порога ионизации атомов интенсивным лазерным излучением [6]–[9], при наличии сильных постоянных магнитных полей [2], [10]–[15]. Особый интерес вызывают релятивистские эффекты в водородоподобном атоме, находящемся в сверхсильном однородном магнитном поле. В частности, в работах [16]–[23] были определены условия на величину магнитного поля, при которой

*Институт теоретических проблем микромира им. Н. Н. Боголюбова, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: costa@bog.msu.ru

эффективная динамика такого атома становится квазиодномерной, а основное состояние достигает нижнего континуума. При этом в статьях [21]–[23] показано, что первый критический заряд $Z_{\text{cr},1}$ может быть меньше, чем $\simeq 170$, при отсутствии поля.

Отдельный интерес вызывают непертурбативные эффекты поляризации вакуума, обусловленные опусканием уровней дискретного спектра в нижний континуум, в сверхкритических статических или адиабатически медленно меняющихся кулоновских полях. Тогда как в $3+1$ измерениях таким КЭД-эффектам посвящено большое число работ (см. публикации [24]–[28] и цитируемую в них литературу), их аналог в $1+1$ измерениях практически не исследовался. В настоящей работе рассматриваются существенно непертурбативные эффекты поляризации вакуума в $1+1$ измерениях для сверхкритических кулоновских источников с зарядом $Z > Z_{\text{cr},1}$. При этом главное внимание уделяется энергетической характеристике поляризации вакуума (вакуумной энергии) $\mathcal{E}_{\text{VP}}$. Хотя большинство работ использует в качестве основной характеристики поляризации вакуумную плотность заряда ρ_{VP} , через которую, в частности, вычисляется вклад поляризации в лэмбовский сдвиг, $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ является не менее информативной и во многих отношениях дополнительной к ρ_{VP} . Вакуумная энергия никак не влияет на положение электронных уровней и тем самым на величину критических зарядов, но в то же время как компонента общей электростатической энергии всей конфигурации зарядов, создающей сверхкритическое кулоновское поле, имеет существенное значение для достижения закритической области и ее свойств. Более того, основное влияние непертурбативного эффекта, возникающего в вакуумной поляризации при $Z > Z_{\text{cr},1}$ за счет опускания уровней в нижний континуум, на поведение вакуумной энергии как функции Z проявляется по сравнению с ρ_{VP} не менее явно, указывая на принципиальную возможность изменения самого статуса закритической области.

В то же время вычисление $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ представляет собой отдельную и нетривиальную задачу, поскольку ее восстановление непосредственно через ρ_{VP} возможно только в теории возмущений. Общее соотношение между $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ и ρ_{VP} задается в рамках швингеровского подхода: если рассмотреть инфинитезимальную вариацию внешнего кулоновского поля $\delta A_0(x)$, то возникающее при этом изменение вакуумной энергии следующим образом связано с вакуумной плотностью:

$$\delta \mathcal{E}_{\text{VP}} = \int dx \rho_{\text{VP}}(x) \delta A_0(x) + \delta \mathcal{E}_{\text{N}}, \quad (1)$$

где $\mathcal{E}_{\text{N}}$ – функционал, отвечающий за скачки в вакуумной энергии при переходе дискретных уровней в нижний континуум (подробнее см. раздел 4). Поэтому для восстановления $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ по ρ_{VP} в общем виде необходимо иметь ρ_{VP} как явный функционал от внешнего поля A_0 и уметь решать нелинейные функциональные уравнения. Обе опции в настоящее время отсутствуют. Более того, даже в теории возмущений, когда вакуумная плотность представляется в виде ряда

$$\rho_{\text{VP}}(x) = \rho_{\text{VP}}^{(1)} + \rho_{\text{VP}}^{(3)} + \rho_{\text{VP}}^{(5)} + \dots \quad (2)$$

по (нечетным) степеням внешнего поля, где

$$\rho_{\text{VP}}^{(i)}(x) = \int dx_1 \dots dx_i c_i(x, x_1, \dots, x_i) A_0(x_1) \dots A_0(x_i), \quad (3)$$

а коэффициентные функции $c_i(x, x_1, \dots, x_i)$ симметричны по всем аргументам, вакуумная энергия представляется в виде следующего (четного) функционала от внешнего поля:

$$\mathcal{E}_{\text{VP}} = \int dx \left(\frac{1}{2} \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) + \frac{1}{4} \rho_{\text{VP}}^{(3)}(x) + \frac{1}{6} \rho_{\text{VP}}^{(5)}(x) + \dots \right) A_0(x), \quad (4)$$

который содержит свертки $A_0(x)$ с $\rho_{\text{VP}}^{(i)}(x)$, а не с полной плотностью $\rho_{\text{VP}}(x)$. Поэтому наличие $\rho_{\text{VP}}(x)$ в явном виде еще не означает автоматического восстановления вакуумной энергии, наоборот, единственную опцию предоставляет пертурбативное решение (4), для которого требуется знание не полной плотности $\rho_{\text{VP}}(x)$, а его разложения по степеням внешнего поля.

В настоящей работе для модельной одномерной задачи Дирака–Кулона (ДК) с зарядом $Z > Z_{\text{cr},1}$ рассматривается вычисление и основные непертурбативные свойства как вакуумной плотности $\rho_{\text{VP}}(x)$, так и вакуумной энергии $\mathcal{E}_{\text{VP}}$. Такая задача имеет самостоятельное значение как для атома в сильном однородном магнитном поле [16]–[23], так и для моделирования существенно непертурбативных эффектов поляризации вакуума в сверхкритических кулоновских полях при $Z > Z_{\text{cr},1}$ для большего числа пространственных измерений. Следует, однако, отметить, что, хотя подходы к вычислению вакуумных эффектов и поведение $\rho_{\text{VP}}(x)$ в закритической области для различного числа пространственных измерений действительно имеют много общего, в закритической области $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в $1 + 1$ измерениях обладает целым рядом специфических особенностей, обусловленных одномерностью задачи. В частности, в $1 + 1$ измерениях доминантный эффект в поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в закритической области оказывает вклад от УФ-перенормировки с поправкой за счет непертурбативных эффектов, а не наоборот, как в $2 + 1$ и $3 + 1$ измерениях.

По аналогии с большим числом пространственных измерений в настоящей работе рассматриваются две системы ДК с внешним потенциалом следующих типов:

I) кулоновский потенциал с гладким обрезанием на масштабе $a > 0$

$$V_{\text{I}}(x) = -\frac{Z\alpha}{|x| + a}; \quad (5)$$

II) проекция трехмерного кулоновского потенциала сферической оболочки радиуса R_0 на ось x

$$V_{\text{II}}(x) = -Z\alpha \left[\frac{1}{R_0} \theta(R_0 - |x|) + \frac{1}{|x|} \theta(|x| - R_0) \right]. \quad (6)$$

Специально отметим, что в настоящей работе мы не рассматриваем вопрос о природе и собственной энергии самих кулоновских источников, порождающих потенциалы $V_{\text{I,II}}$. Легко видеть, что в рамках чисто одномерной задачи такие источники не имели бы даже статуса локализованных, поскольку соответствующая плотность заряда убывала бы при $|x| \rightarrow \infty$ всего лишь как $|x|^{-3}$. Фактическим источником в квазиодномерных задачах рассматриваемого типа является атомное ядро или кластер из тяжелых ионов, т. е. заведомо сложный трехмерный объект, а эффективная одномерная задача ДК возникает за счет дополнительных условий типа сильного магнитного поля. Таким образом, первичными в настоящей работе являются именно внешние потенциалы $V_{\text{I,II}}$ и исследуются только обусловленные ими эффекты

Рис. 1. Логарифмически расходящаяся диаграмма поляризации вакуума в $1 + 1$ измерениях.

поляризации вакуума, а не полевая энергия тех одномерных источников, которым формально соответствовали бы потенциалы $V_{1,\Pi}$ в рамках чисто одномерного подхода. Иначе и потенциалы следовало бы выбирать не кулоновскими, а вида $Z\alpha|x|/2$, на что уже указывалось в статье [20].

Как и в других работах по поляризации вакуума кулоновским полем [29]–[32] вклад процессов с обменом виртуальными фотонами опускается (и все вакуумные диаграммы – однопетлевые). Далее везде, если не оговорено особо, используется релятивистская система единиц $\hbar = m = c = 1$. При этом электромагнитная константа связи $\alpha = e^2$ также становится безразмерной, что существенно упрощает все дальнейшие выкладки, а конкретные расчеты, иллюстрирующие общие выводы, проводятся для $\alpha = 1/137.036$.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В $1 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Поскольку для вычисления вакуумных средних от фермионного тока и гамильтониана потребуется УФ-перенормировка фермионной петли, напомним кратко основные свойства единственной логарифмически расходящейся диаграммы поляризации вакуума в $1 + 1$ измерениях.

Выражение для поляризационного оператора $\Pi_{\mu\nu}(q)$, соответствующего диаграмме Фейнмана на рис. 1, имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i 4\pi\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\hat{k} + m)\gamma_\nu(\hat{k} - \hat{q} + m)]}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k - q)^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \quad (7)$$

Используя регуляризацию Паули–Вилларса [33], в рамках которой для устранения логарифмической расходимости в (7) требуется всего одна вспомогательная константа C_1 , удовлетворяющая условию $C_0 + C_1 = 0$, и масса $M_1 \rightarrow \infty$, получаем равенства

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^R(q) &= (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi_R(q^2), \\ \Pi_R(q^2) &= \frac{4\alpha}{m^2} \int_0^1 d\beta \beta(1 - \beta) \left[1 - \beta(1 - \beta) \frac{q^2}{m^2 - i\varepsilon} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

В частности, при $q^2 = -q_x^2$

$$\Pi_R(-q_x^2) = \frac{4\alpha}{q_x^2} \left(1 - \frac{4m^2}{q_x \sqrt{4m^2 + q_x^2}} \text{arsh} \left(\frac{q_x}{2m} \right) \right). \quad (9)$$

В первом порядке теории возмущений поляризации вакуума соответствует энергия

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) A_0^{\text{ext}}(x), \quad (10)$$

где A_0^{ext} – потенциал внешнего источника, который предполагается статическим, $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ – вакуумная плотность заряда, которая связана с поляризационным потенциалом (Юлинга) уравнением Пуассона

$$\rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{dx^2} A_{\text{VP},0}^{(1)}(x). \quad (11)$$

Потенциал Юлинга $A_{\text{VP},0}^{(1)}$ находится через поляризационную функцию Π_{R} и фурье-образ внешнего потенциала $\tilde{A}_0$ [33]:

$$A_{\text{VP},0}^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_x e^{iq_x x} \Pi_{\text{R}}(-q_x^2) \tilde{A}_0(q_x), \quad \tilde{A}_0(q_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iq_x y} A_0^{\text{ext}}(y). \quad (12)$$

Из формул (11) и (12) с учетом (9) для внешних потенциалов (5) и (6) находим следующие выражения для вакуумной плотности заряда (здесь и далее $m \rightarrow 1$):

$$\begin{aligned} \rho_{\text{VP},\text{I}}^{(1)}(x) &= Z\alpha|e| \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dq \cos(qx) \left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arsh}\left(\frac{q}{2}\right) \right] \times \\ &\times \left[\sin(qa) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(qa) \right) - \cos(qa) \operatorname{Ci}(qa) \right], \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{VP},\text{II}}^{(1)}(x) &= Z\alpha|e| \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dq \cos(qx) \left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arsh}\left(\frac{q}{2}\right) \right] \times \\ &\times \left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \operatorname{Ci}(qR_0) \right], \end{aligned} \quad (13б)$$

где $\operatorname{Si}(x)$ и $\operatorname{Ci}(x)$ – интегральные синус и косинус. Далее из (10) получаем пертурбативный ответ для вакуумной энергии:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{VP},\text{I}}^{(1)} &= (Z\alpha)^2 \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dq \left[\sin(qa) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(qa) \right) - \cos(qa) \operatorname{Ci}(qa) \right]^2 \times \\ &\times \left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arsh}\left(\frac{q}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\mathcal{E}_{\text{VP},\text{II}}^{(1)} = (Z\alpha)^2 \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dq \left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \operatorname{Ci}(qR_0) \right]^2 \left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \operatorname{arsh}\left(\frac{q}{2}\right) \right]. \quad (14б)$$

Из формул (13) легко видеть, что интегральный индуцированный заряд в обоих случаях тождественно равен нулю:

$$Q_{\text{VP}}^{(1)} = \int dx \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) = 0. \quad (15)$$

И хотя в данном случае соотношение (15) является прямым следствием перенормировочного условия для размерной поляризационной функции $\Pi^R(q) \sim \gamma q^2$ (8) при $q \rightarrow 0$, на самом деле его следует рассматривать как дополнительный критерий правильности пертурбативных вычислений, поскольку при равномерно убывающем на пространственной бесконечности внешнем поле без специальных граничных условий или нетривиальной топологии полевого многообразия следует ожидать, что в докритической области при $Z < Z_{\text{cr},1}$ интегральный вакуумный заряд будет нулевым, поляризация вакуума может только искажать его пространственное распределение [33], [34]. Индуцированный заряд может оказаться ненулевым, если внешнее поле будет иметь на бесконечности ненулевую асимптотику как в статье [35], а в нашей задаче индуцированный заряд вакуума становится ненулевым при $Z > Z_{\text{cr},1}$ за счет непертурбативных эффектов, обусловленных опусканием дискретных уровней в нижний континуум (см. работы [24]–[26], [28]), и далее мы покажем, как последнее обстоятельство влияет на поведение вакуумной энергии в закритической области.

3. ФОРМАЛИЗМ ВИХМАННА–КРОЛЛА ДЛЯ 1 + 1 ИЗМЕРЕНИЙ

Теперь рассмотрим наиболее общий непертурбативный подход к вычислению вакуумной плотности $\rho_{\text{VP}}(x)$, основанный на методе Вихманна–Кролла (ВК) [29]–[32] (см. также статью [34] и цитируемую в ней литературу). Отправной точкой является вакуумное среднее плотности заряда, соответствующее C -нечетному оператору фермионного тока $j_\mu(x) = e[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)]/2$:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{VP}}(x) &= \langle j_0(x) \rangle_{\text{vac}} = i|e| \text{Tr}[S_F(x, x')\gamma_0] \Big|_{x \rightarrow x'} = \\ &= -\frac{|e|}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где ϵ_F – энергия Ферми ($\epsilon_F = -1$), а ϵ_n и $\psi_n(x)$ – собственные значения (СЗ) и собственные функции (СФ) соответствующей спектральной задачи ДК.

Суть метода ВК основывается на наблюдении, что вакуумную плотность (16) можно выразить через след функции Грина спектральной задачи ДК. В одномерном случае функция Грина удовлетворяет уравнению

$$(-i\alpha \partial_x + V(x) + \beta - \epsilon)G(x, x'; \epsilon) = \delta(x - x'), \quad (17)$$

где для максимально простого вида операции пространственной инверсии матрицы Дирака выбираются в виде $\alpha = \sigma_y$, $\beta = \sigma_z$.

Формальное решение (17) записывается в виде

$$G(x, x'; \epsilon) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')^\dagger}{\epsilon_n - \epsilon}. \quad (18)$$

Согласно статьям [29], [30] вакуумная плотность выражается через интегралы по контурам на первом листе римановой поверхности по комплексной энергии (см. рис. 2):

$$\rho_{\text{VP}}(x) = -\frac{|e|}{4\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{P(R)} + \int_{E(R)} \right) d\epsilon \text{Tr} G(x, x; \epsilon). \quad (19)$$

Рис. 2. Специальные контуры на первом листе римановой энергетической поверхности, используемые для представления вакуумной плотности заряда в виде контурных интегралов. Направление обхода контуров находится в соответствии с (18).

Альтернативный способ представления $\rho_{\text{VF}}(x)$ через контурный интеграл состоит в использовании фейнмановского контура C_F , который обходит левый разрез снизу, а правый и все дискретные уровни – сверху.

Далее след функции Грина представляется в виде

$$\text{Tr } G(x, x; \epsilon) = \frac{1}{J(\epsilon)} \psi_L(x)^T \psi_R(x), \quad (20)$$

где $\psi_L(x)$ и $\psi_R(x)$ – регулярные соответственно на $-\infty$ и $+\infty$ решения уравнения ДК, $J(\epsilon)$ – их вронскиан:

$$J(\epsilon) = \psi_{L,2}(x) \psi_{R,1}(x) - \psi_{L,1}(x) \psi_{R,2}(x). \quad (21)$$

Определенный таким образом $\text{Tr } G$ имеет нужную нормировку. Следует отметить, что $J(\epsilon)$ фактически является функцией Йоста задачи ДК: вещественные нули $J(\epsilon)$ располагаются на интервале $-1 \leq \epsilon_n < 1$ и являются дискретными уровнями энергии, а комплексные лежат на втором листе римановой энергетической поверхности, имеют отрицательную мнимую часть волнового числа $k = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$ и при $\text{Re } k > 0$ соответствуют упругим резонансам.

Построим теперь $\text{Tr } G$ для внешних потенциалов I и II. В общем виде спектральная задача ДК записывается как система

$$\varphi' = [\epsilon + 1 - V(x)]\chi, \quad \chi' = -[\epsilon - 1 - V(x)]\varphi, \quad (22)$$

где φ, χ – верхняя и нижняя компоненты дираковского спинора. Для модели I при $x > 0$ линейно независимые решения (22) выбираем в виде [30]

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x; \epsilon) \\ \Phi_2(x; \epsilon) \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x; \epsilon) \\ \Psi_2(x; \epsilon) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(x; \epsilon) &= \sqrt{1 + \epsilon} e^{-\gamma z} (2\gamma z)^{iQ} (\Phi(b, c, 2\gamma z) + (i\gamma - \epsilon)\Phi(b + 1, c, 2\gamma z)), \\ \Phi_2(x; \epsilon) &= \sqrt{1 - \epsilon} e^{-\gamma z} (2\gamma z)^{iQ} (-\Phi(b, c, 2\gamma z) + (i\gamma - \epsilon)\Phi(b + 1, c, 2\gamma z)), \\ \Psi_1(x; \epsilon) &= \sqrt{1 + \epsilon} e^{-\gamma z} (2\gamma z)^{iQ} \left(\Psi(b, c, 2\gamma z) + \frac{Q}{\gamma} \Psi(b + 1, c, 2\gamma z) \right), \\ \Psi_2(x; \epsilon) &= \sqrt{1 - \epsilon} e^{-\gamma z} (2\gamma z)^{iQ} \left(-\Psi(b, c, 2\gamma z) + \frac{Q}{\gamma} \Psi(b + 1, c, 2\gamma z) \right),\end{aligned}\quad (24)$$

а $\Phi(b, c, x)$, $\Psi(b, c, x)$ – функции Куммера и Трикоми [37],

$$\gamma = \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad Q = Z\alpha, \quad b = iQ - \frac{\epsilon Q}{\gamma}, \quad c = 1 + 2iQ, \quad z = x + a. \quad (25)$$

Выбор фундаментальной пары решений Φ и Ψ в данном случае диктуется их взаимодополнительными асимптотиками при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$.

Решения $\psi_L(x)$ и $\psi_R(x)$ строятся как линейные комбинации решений (23), удовлетворяющие условиям регулярности на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно и связанные между собой операцией пространственной инверсии $\psi_L(x) = \beta\psi_R(-x)$ (последнее есть прямое следствие четности задачи с потенциалом (5)):

$$\begin{aligned}\psi_R(x) &= \theta(-x)\beta[A\Phi(-x) + B\Psi(-x)] + \theta(x)\Psi(x), \\ \psi_L(x) &= \theta(-x)(\beta\Psi)(-x) + \theta(x)[A\Phi(x) + B\Psi(x)].\end{aligned}\quad (26)$$

В результате след функции Грина и тем самым вакуумная плотность автоматически является четной функцией от x , что соответствует очевидным физическим требованиям к $\rho_{\text{v.p.}}(x)$ в данном случае. Отметим также, что из формул (23)–(26) легко видеть, что как ψ_L , ψ_R , так и вронскиан (и тем самым $\text{Tr } G$), рассматриваемые как функции волнового числа $k = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$, обладают симметрией отражения $f^*(k) = f(-k^*)$ относительно мнимой оси.

Коэффициенты A и B определяются из условия непрерывности при $x = 0$:

$$A = -2 \frac{\Psi_1(0; \epsilon)\Psi_2(0; \epsilon)}{[\Phi(x), \Psi(x)]_0}, \quad B = \frac{\Phi_1(0; \epsilon)\Psi_2(0; \epsilon) + \Phi_2(0; \epsilon)\Psi_1(0; \epsilon)}{[\Phi(x), \Psi(x)]_0}, \quad (27)$$

где $[f(x), g(x)]_a = f_2(a)g_1(a) - f_1(a)g_2(a)$,

а вронскиан $J(\epsilon)$, входящий в $\text{Tr } G$, определяется равенством

$$J(\epsilon) = [\psi_L(x), \psi_R(x)] = -2\Psi_1(0; \epsilon)\Psi_2(0; \epsilon). \quad (28)$$

Из формул (23)–(28) следует, что окончательное выражение для следа функции Грина в модели I для $x \geq 0$ принимает следующий вид:

$$\text{Tr } G_I(x, x; \epsilon) = \frac{1}{[\Phi(x), \Psi(x)]} \left(\Phi(x)^T \Psi(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_1(0; \epsilon)}{\Psi_1(0; \epsilon)} + \frac{\Phi_2(0; \epsilon)}{\Psi_2(0; \epsilon)} \right) \Psi(x)^T \Psi(x) \right). \quad (29)$$

При этом по построению $\text{Tr } G_I(x, x; \epsilon) = \text{Tr } G_I(-x, -x; \epsilon)$ и $\text{Tr } G_I$ как функция волнового числа обладает симметрией отражения $f^*(k) = f(-k^*)$.

Для потенциала (6) фундаментальную пару решений (22) в области $|x| < R_0$ выбираем в виде

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + V_0 + 1} \cos(\xi x) \\ -\sqrt{\epsilon + V_0 - 1} \sin(\xi x) \end{pmatrix}, \quad W(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + V_0 + 1} \sin(\xi x) \\ \sqrt{\epsilon + V_0 - 1} \cos(\xi x) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где $\xi = \sqrt{(\epsilon + V_0)^2 - 1}$, $V_0 = Q/R_0$, а решения при $x > R_0$ имеют вид (23)–(25) с заменой $z \rightarrow x$.

Действуя далее по аналогии с моделью I, получаем, что

$$\begin{aligned}\psi_R(x) &= \theta(-x - R_0)\beta[C\Phi(-x) + D\Psi(-x)] + \theta(R_0 - |x|)[AY(x) - BW(x)] + \\ &\quad + \theta(x - R_0)\Psi(x), \\ \psi_L(x) &= \theta(-x - R_0)\beta\Psi(-x) + \theta(R_0 - |x|)[AY(x) + BW(x)] + \\ &\quad + \theta(x - R_0)[C\Phi(x) + D\Psi(x)],\end{aligned}\quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}A &= \frac{[\Psi(x), W(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]_{R_0}}, \quad B = \frac{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]_{R_0}}, \quad C = -2 \frac{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}[W(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]_{R_0}[\Phi(x), \Psi(x)]_{R_0}}, \\ D &= \frac{[Y(x), \Phi(x)]_{R_0}[W(x), \Psi(x)]_{R_0} + [Y(x), \Psi(x)]_{R_0}[W(x), \Phi(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]_{R_0}[\Phi(x), \Psi(x)]_{R_0}},\end{aligned}\quad (32)$$

при этом $[Y(x), W(x)] = -\xi$, а вронскиан $J(\epsilon)$ определяется равенством

$$J(\epsilon) = -2 \frac{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}[W(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x), W(x)]}. \quad (33)$$

Из формул (30)–(33) для следа функции Грина в модели II получаем выражение

$$\begin{aligned}\text{Tr } G_{\text{II}}(x, x; \epsilon) &= \\ &= \begin{cases} \frac{1}{[\Phi(x), \Psi(x)]} \left[\Phi(x)^T \Psi(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{[Y(x), \Phi(x)]_{R_0}}{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}} + \frac{[W(x), \Phi(x)]_{R_0}}{[W(x), \Psi(x)]_{R_0}} \right) \Psi(x)^T \Psi(x) \right], & x > R_0, \\ -\frac{1}{2[Y(x), W(x)]} \left[\frac{[W(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}} Y(x)^T Y(x) - \frac{[Y(x), \Psi(x)]_{R_0}}{[W(x), \Psi(x)]_{R_0}} W(x)^T W(x) \right], & |x| \leq R_0. \end{cases}\end{aligned}\quad (34)$$

При этом, как и в модели I, по построению $\text{Tr } G_{\text{II}}(x, x; \epsilon) = \text{Tr } G_{\text{II}}(-x, -x; \epsilon)$ и $\text{Tr } G_{\text{II}}$ как функция волнового числа обладает симметрией отражения $f^*(k) = f(-k^*)$.

Вронскиан $[\Phi(x), \Psi(x)]$, который входит в оба следа, дается равенством

$$[\Phi(x), \Psi(x)] = \frac{(2\gamma)^2}{2Q} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}. \quad (35)$$

На следующем шаге находим асимптотику $\text{Tr } G$ на дугах большого круга радиуса $R \rightarrow \infty$ на первом листе энергетической поверхности (см. рис. 2). В частности, для модели I в верхней полуплоскости на дугах $C_{1,2}(R)$

$$\text{Tr } G_{\text{I}}(x, x; \epsilon) \rightarrow i + \frac{i}{2\epsilon^2} - \frac{Q}{|x| + a} \frac{i}{\epsilon^3} + O(|\epsilon|^{-4}), \quad 0 < \text{Arg } \epsilon < \pi, \quad |\epsilon| \rightarrow \infty, \quad (36)$$

на дугах большого круга нижней полуплоскости $C_{3,4}(R)$

$$\text{Tr } G_{\text{I}}(x, x; \epsilon) \rightarrow -i - \frac{i}{2\epsilon^2} + \frac{Q}{|x| + a} \frac{i}{\epsilon^3} + O(|\epsilon|^{-4}), \quad -\pi < \text{Arg } \epsilon < 0, \quad |\epsilon| \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Из формул (36) и (37) следует, что интегрирование по контурам $P(R)$ и $E(R)$ или C_F (см. рис. 2) можно свести к мнимой оси, откуда находим окончательное выражение для вакуумной плотности в виде [29], [30]

$$\rho_{\text{VP}}(x) = \frac{|e|}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\epsilon \text{Tr } G(x, x; \epsilon) = \frac{|e|}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \text{Tr } G(x, x; iy). \quad (38)$$

При наличии отрицательных дискретных уровней с $0 > \epsilon_n \geq -1$

$$\rho_{\text{vF}}(x) = |e| \left[\sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \operatorname{Tr} G(x, x; iy) \right]. \quad (39)$$

В модели II аналогичные действия приводят к такому же ответу.

Далее отметим общие свойства $\operatorname{Tr} G$ при смене знака внешнего поля ($Q \rightarrow -Q$) и комплексном сопряжении:

$$\operatorname{Tr} G_Q(x, x; \epsilon) = -\operatorname{Tr} G_{-Q}(x, x; -\epsilon), \quad \operatorname{Tr} G(x, x; \epsilon)^* = \operatorname{Tr} G(x, x; \epsilon^*), \quad (40)$$

а также следующее из (40) соотношение

$$\operatorname{Tr} G_Q(x, x; iy)^* = -\operatorname{Tr} G_{-Q}(x, x; iy). \quad (41)$$

Из (41) вытекает, что $\operatorname{Re}[\operatorname{Tr} G_Q(x, x; iy)]$ – нечетная по Q и четная по y функция, а $\operatorname{Im}[\operatorname{Tr} G_Q(x, x; iy)]$ – наоборот, четна по Q и нечетна по y . Поэтому фактически ρ_{vF} определяется только через $\operatorname{Re}[\operatorname{Tr} G_Q(x, x; iy)]$ и является заведомо действительной величиной, нечетной по Q . Заметим также, что в чисто пертурбативной области представление ρ_{vF} в виде нечетного ряда по степеням внешнего поля (2) есть прямое следствие борновского ряда $G = G^{(0)} + G^{(0)}(-V)G^{(0)} + G^{(0)}(-V)G^{(0)}(-V)G^{(0)} + \dots$, откуда

$$\operatorname{Re} \operatorname{Tr} G(x, x; iy) = \sum_{k=0} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} [G^{(0)}(-VG^{(0)})^{2k+1}(x, x; iy)], \quad (42)$$

где G^0 – свободная функция Грина уравнения Дирака. В то же время при наличии отрицательных дискретных уровней и тем более в закритической области при $Z > Z_{\text{cr},1}$ нечетность ρ_{vF} по Q по-прежнему имеет место [30], но теперь зависимость от внешнего поля более не описывается степенным рядом (42), поскольку в ρ_{vF} появляются существенно непертурбативные и тем самым неаналитические по Q составляющие.

Приведенное в (38), (39) выражение для вакуумной плотности заряда не обеспечивает автоматического исчезновения полного индуцированного заряда при $Z < Z_{\text{cr},1}$, чего следовало бы ожидать в рассматриваемом случае на основе аргументов, приведенных в конце раздела 2. В частности, в модели I из явного вида асимптотики $\operatorname{Tr} G_I$ (36), (37) легко видеть, что $\operatorname{Re}[\operatorname{Tr} G_I(x, x; iy)]$ при $|y| \rightarrow \infty$ убывает, как $Q/(|x| + a) \times |y|^{-3}$, и интеграл $\int dy \operatorname{Re}[\operatorname{Tr} G_I(x, x; iy)]$ равномерно сходится. Далее, поскольку $\operatorname{Re}[\operatorname{Tr} G_I(x, x; iy)]$ при $|x| \rightarrow \infty$ убывает, как $Q/(1 + y^2)^{3/2} \cdot |x|^{-1}$, ненормированная плотность $\rho_{\text{vF}}(x)$ убывает при $|x| \rightarrow \infty$ как $1/|x|$, и в итоге интегральный индуцированный заряд логарифмически расходится. Общий результат, установленный в статье [30] через разложение ρ_{vF} по степеням Q и полученный для одного и двух пространственных измерений при произвольном внешнем потенциале, а в трехмерном случае – при сферически-симметричном потенциале, состоит в том, что все расходимости ρ_{vF} содержатся только в фермионной петле с двумя внешними концами (см. рис. 1), приводящей к потенциалу Юлинга $A_{\text{vF},0}^{(1)}$, а все следующие порядки разложения уже свободны от расходимостей (см. также статью [34] и приведенные там ссылки). В $3 + 1$ измерениях расходится (логарифмически) еще и фермионная петля с четырьмя концами, но в сферически-симметричном случае

для вычисления вакуумной плотности и вакуумной энергии эта расходимость не актуальна, поскольку в рамках парциального разложения каждое слагаемое с определенным моментом и четностью в порядке $O(Q^3)$ для плотности и $O(Q^4)$ для энергии оказывается автоматически калибровочно-инвариантным и конечным без дополнительной регуляризации, поэтому в этом случае процедуры перенормировки в $3+1$ и в $1+1$ измерениях фактически одинаковы и сводятся только к диаграмме с двумя концами.

Таким образом, для вычисления перенормированной плотности ρ_{VP} необходимо выделить в выражениях для $\text{Tr } G$ в (38), (39) линейные по Q члены и заменить их на перенормированные плотности $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$, соответствующие потенциалам Юлинга и приведенные в (13). Для этого сначала находим компоненту вакуумной плотности $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}$, которая определяется следующим образом:

$$\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x) = |e| \left[\sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy (\text{Tr } G(x, x; iy) - \text{Tr } G^{(1)}(x, x; iy)) \right], \quad (43)$$

где $G^{(1)} = Q \frac{\partial G}{\partial Q} \Big|_{Q=0} = G^{(0)}(-V)G^{(0)}$.

Для модели I

$$\begin{aligned} \text{Tr } G_I^{(1)}(x, x; iy) = & \frac{Q}{\tilde{\gamma}^2} \left[e^{-2\tilde{\gamma}(|x|+a)} (\text{Ei}(2\tilde{\gamma}(|x|+a)) - \text{Ei}(2\tilde{\gamma}a) - e^{4\tilde{\gamma}a} \text{Ei}(-2\tilde{\gamma}a)) - \right. \\ & \left. - e^{2\tilde{\gamma}(|x|+a)} \text{Ei}(-2\tilde{\gamma}(|x|+a)) \right], \end{aligned} \quad (44)$$

для модели II получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Tr } G_{II}^{(1)}(x, x; iy) = & \\ = & \begin{cases} \frac{2Q}{\tilde{\gamma}^2} \left(-\text{ch}(2\tilde{\gamma}x) \left[\text{Ei}(-2\tilde{\gamma}R_0) + \frac{e^{-2\tilde{\gamma}R_0}}{2\tilde{\gamma}R_0} \right] + \frac{1}{2\tilde{\gamma}R_0} \right), & |x| \leq R_0, \\ \frac{Q}{\tilde{\gamma}^2} \left(e^{-2\tilde{\gamma}|x|} \left[\frac{\text{sh}(2\tilde{\gamma}R_0)}{\tilde{\gamma}R_0} - \text{Ei}(-2\tilde{\gamma}R_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - \text{Ei}(2\tilde{\gamma}R_0) + \text{Ei}(2\tilde{\gamma}|x|) \right] - e^{2\tilde{\gamma}|x|} \text{Ei}(-2\tilde{\gamma}|x|) \right), & |x| > R_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (45)$$

где $\text{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция, а $\tilde{\gamma} = \sqrt{1+y^2}$.

При $Z < Z_{\text{cr},1}$ индуцированный заряд от $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$ обращается в нуль. В рассматриваемом случае при отсутствии отрицательных дискретных уровней, которые не позволяют осуществить аналитическое продолжение, этот факт устанавливается переходом в комплексную плоскость по x , где $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$, представленная в виде сходящегося интеграла по dy от $\text{Tr } G(x, x; iy) - \text{Tr } G^{(1)}(x, x; iy)$, оказывается аналитической функцией от x с разрезом, возникающим за счет наличия в $\text{Tr } G$ функции Трикоми, и который всегда можно направить по отрицательной мнимой полуоси. Тогда интегральный заряд $Q_{\text{VP}}^{(3+)}$ (интеграл по действительной оси от $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$) выражается через контурный интеграл по дуге большого круга в верхней полуплоскости, который обращается в нуль, что проверяется непосредственным вычислением асимптотики $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$. Более конкретно, для внешнего потенциала (5) асимптотика

функции $\text{Tr } G_I(x, x; iy)$ в верхней полуплоскости при $\text{Re } x > 0$ имеет вид

$$\text{Tr } G_I(x, x; iy) \rightarrow \frac{iy}{(1+y^2)^{1/2}} + \frac{Q}{(1+y^2)^{3/2}} \frac{1}{x+a} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \text{Re } x > 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Главный член асимптотики (46) является чисто мнимым, четным по Q и нечетным по y и поэтому исчезает при интегрировании по dy , следующий первый нечетный по Q член уничтожается вычитанием $\text{Tr } G_I^{(1)}$, а остальные члены убывают, как $O(1/x^2)$. При $\text{Re } x < 0$ асимптотика $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$ находится из симметрии отражения относительно мнимой оси $f^*(x) = f(-x^*)$, поэтому на всей дуге большого круга в верхней полуплоскости $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x)$ равномерно убывает, как $O(1/x^2)$. Аналогичный результат имеет место и для модели II. Этот результат еще раз подтверждает вывод о том, что все расходимости в $\rho_{\text{VP}}(x)$ возникают за счет линейных по Q членов.

Таким образом, окончательный ответ для вакуумной плотности заряда принимает вид

$$\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x) = \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) + \rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x), \quad (47)$$

где $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ – линейная по Q пертурбативная плотность (13), найденная через перенормированную диаграмму (см. рис. 1). Такое выражение для $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ гарантирует обращение в нуль полного индуцированного заряда в докритической области при $Z < Z_{\text{cr},1}$. При наличии отрицательных дискретных уровней исчезновение полного заряда при $Z < Z_{\text{cr},1}$ вытекает из модельно-независимых аргументов, в основе которых лежит исходное выражение для вакуумной плотности (16). Из последнего следует, что изменение интегрального заряда возможно только при $Z > Z_{\text{cr},1}$, когда дискретные уровни достигают нижнего континуума. При этом каждый дискретный уровень при пересечении ϵ_F приводит к изменению интегрального заряда на $-|e|$. Этот эффект является существенно непертурбативным и полностью содержится в $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}$, а $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ никак в этом не участвует и по-прежнему вносит чисто нулевой вклад в полный индуцированный заряд. Таким образом, поведение перенормированной с помощью (47) вакуумной плотности и в непертурбативной области оказывается именно таким, какое следует ожидать из общих соображений о структуре электрон-позитронного вакуума при $Z > Z_{\text{cr},1}$.

Более детальная картина происходящих при этом изменений в $\rho_{\text{VP}}(x)$ рассмотрена в работах [24]–[26], [28] на основе формализма Фано для механизма автоионизации в атомной физике [33], [38]. Основной результат состоит в том, что когда дискретный уровень $\psi_n(x)$ достигает нижнего континуума, изменение вакуумной плотности имеет вид

$$\Delta\rho_{\text{VP}}(x) = -|e|\psi_n(x)^\dagger\psi_n(x). \quad (48)$$

На рис. 3 для модели I при $a = 0.1$ показана перенормированная вакуумная плотность для чисто пертурбативного режима при $Z = 10$, далее для $Z = 115$, когда первое $Z_{\text{cr},1} \simeq 115.999$ еще не достигается, для $Z = 116$, когда первый (четный) дискретный уровень только что опустился в нижний континуум, далее для $Z = 216$, когда еще не достигается второе критическое $Z_{\text{cr},2} \simeq 216.258$, и наконец для $Z = 217$, т. е. почти сразу после опускания в нижний континуум второго (нечетного) дискретного уровня. При этом непосредственным численным интегрированием подтверждается, что полный вакуумный заряд при $Z = 10, 115$ равен нулю, при $Z = 116, 216$ заряд

Рис. 3. Плотность $\rho_{VP}^{ren}(x)$ для модели I при $a = 0.1$ для $Z = 10, 115, 116, 216, 217$.

равен $-|e|$, а при $Z = 217$ он равен $-2|e|$. Отвечающие этим значениям критические заряды для модели I находятся на основе равенства [36]

$$K_{1+2iQ}(\sqrt{8Qa}) + K_{1-2iQ}(\sqrt{8Qa}) = 0 \quad (49)$$

для четных уровней и

$$K_{2iQ}(\sqrt{8Qa}) = 0 \quad (50)$$

– для нечетных.

Более детально процесс формирования вакуумных оболочек из опускающихся в нижний континуум дискретных уровней показан на рис. 4–6 для модели I при $a = 0.1$. На рис. 4 показано изменение перенормированной вакуумной плотности при переходе через первое критическое $Z_{cr,1} = 115.999$, когда в соответствии с (48) в $\rho_{VP}^{ren}(x)$ добавляется практически точно плотность $\rho_{discr}(Z_{cr,1})$, равная $-|e|$, умноженному на плотность, соответствующую первому (четному) дискретному уровню на пороге нижнего континуума.

Аналогичная ситуация возникает на рис. 5, когда Z переходит через следующее критическое $Z_{cr,2} = 216.258$. К $\rho_{VP}^{ren}(x)$ снова добавляется практически точно плотность $\rho_{discr}(Z_{cr,2})$, равная $-|e|$, умноженному на плотность, соответствующую второму (нечетному) дискретному уровню на пороге нижнего континуума.

Следует также специально отметить, что в закритической области при увеличении Z изменение $\rho_{VP}^{ren}(x)$ происходит не только дискретным образом за счет формирования вакуумных оболочек из опускающихся в нижний континуум дискретных уровней, но и непрерывно за счет изменения плотности состояний непрерывного спектра и эволюции дискретных уровней с ростом Z . На рис. 6 показано суммарное изменение $\rho_{VP}^{ren}(x)$ при переходе через два первых Z_{cr} . Сумма вакуумной плотности при $Z = 115$ и вкладов от первых двух дискретных уровней, взятых на пороге нижнего континуума, уже не воспроизводит $\rho_{VP}^{ren}(x)$ при $Z = 217$.

Более того, оболочечную структуру, возникающую в вакуумной плотности в закритической области, нельзя получить через такую деформацию исходного контура ВК из рис. 2, при которой учитывались бы комплексные полюсы функции Грина

Рис. 4. Изменение $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ в модели I при $a = 0.1$ при переходе через первое критическое $Z_{\text{cr},1} = 115.999$. Сумма вакуумной плотности при $Z = 115$ и вклада от дискретного уровня на пороге нижнего континуума $\rho_{\text{discr}}(Z_{\text{cr},1})$ практически неотличима от вакуумной плотности при $Z = 116$.

Рис. 5. Изменение $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ в модели I при $a = 0.1$ при переходе через второе критическое $Z_{\text{cr},2} = 216.258$. Сумма вакуумной плотности при $Z = 216$ и вклада от второго (нечетного) дискретного уровня на пороге нижнего континуума $\rho_{\text{discr}}(Z_{\text{cr},2})$ практически сливается с вакуумной плотностью при $Z = 217$.

на втором листе римановой энергетической поверхности, возникающие из дискретных уровней после достижения ими нижнего континуума (или начала левого разреза при $\epsilon = -1$), как это предлагалось в работах [24]–[26]. Траектории комплексных полюсов на втором листе в закритической области по Z , возникающих из первых двух дискретных уровней после достижения ими левого разреза, показаны на рис. 7. Как и в нерелятивистской квантовой теории упругого рассеяния каждый дискретный уровень расщепляется на две комплексно-сопряженные по энергии траектории, которым соответствуют комплексные волновые векторы с отрицательной мнимой частью $k = \pm k_1 - ik_2$, связанные между собой симметрией отражения $k \rightarrow -k^*$. В рамках метода ВК такие сопряженные полюсы функции Грина совершенно рав-

Рис. 6. Изменение $\rho_{VP}^{ren}(x)$ в модели I при $a = 0.1$ при переходе через первое и второе Z_{cr} . Сумма вакуумной плотности при $Z = 115$ и первых двух дискретных уровней, взятых на пороге нижнего континуума, уже не воспроизводит $\rho_{VP}^{ren}(x)$ при $Z = 217$.

Рис. 7. Траектории комплексных полюсов функции Грина на втором энергетическом листе при изменении Z в закритической области, возникающие из первых двух дискретных уровней после достижения ими левого разреза при $Z_{cr,1} = 115.999$, $Z_{cr,2} = 216.258$ в модели I при $a = 0.1$.

ноправны, поэтому при деформации контура должны учитываться на паритетных основаниях. Вычеты в этих полюсах, возникающие при интегрировании вдоль деформированного таким образом контура ВК по энергетической переменной, в силу симметрии $\text{Tr } G(x, x; \epsilon)^* = \text{Tr } G(x, x; \epsilon^*)$ являются комплексно-сопряженными друг другу, поэтому их сумма всегда есть действительное число, но, как и волновая функция упругого резонанса, обязательно содержит экспоненциально растущий множитель $e^{2k_2|x|}$. Для потенциалов I и II этот вывод является прямым следствием явного вида $\text{Tr } G$ в формулах (29), (34).

Таким образом, воспроизвести вклад в $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ от дискретных уровней, опустившихся в нижний континуум, через вычеты функции Грина в комплексных полюсах, в которые превратится соответствующий дискретный уровень после достижения нижнего континуума, нельзя. Адекватная картина происходящего в закритической области достигается при использовании формализма Фано [33], [38], но следует учитывать, что этот метод также использует ряд приближений, и поэтому формула (48) является точной только в непосредственной окрестности Z_{cr} , что и демонстрируют рис. 4–6. Корректный способ вычисления $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ для всех областей по Z состоит в использовании (43) и (47) с прямой проверкой ожидаемого целочисленного значения интегрального заряда.

4. ВАКУУМНАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ $Z > Z_{\text{cr},1}$

Непертурбативные эффекты, проявляющиеся в $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ при $Z > Z_{\text{cr},1}$ через формирование локализованных вакуумных оболочек, приводят к соответствующим непертурбативным изменениям в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$. Как и формирование самих оболочек, такой эффект является существенно нелинейным и до сих пор детально не рассматривался, поскольку предполагалось, что и в закритической области основной вклад в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ будет возникать за счет пертурбативных эффектов (см., в частности, работу [26] и приведенные в ней ссылки). Подчеркнем, что такой нелинейный вклад в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ непосредственно через ρ_{VP} найти нельзя, поскольку в непертурбативной области не работают ни выражение (42), ни тем самым формулы (2)–(4). При этом скорость роста числа оболочек и, следовательно, проявление оболочечного эффекта в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ с увеличением Z существенно зависит от числа пространственных измерений. В $1+1$ измерениях она минимальна, и поэтому оболочек хватает только на то, чтобы понизить в закритической области скорость роста неперенормированной энергии $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ до $\sim Z^\nu$, $1 < \nu < 2$.

Рассмотрим теперь такой способ вычисления $\mathcal{E}_{\text{VP}}$, который максимально полно учитывает непертурбативные эффекты в закритической области. Исходным для вакуумной энергии является выражение

$$\mathcal{E}_{\text{VP}} = \langle H_{\text{D}} \rangle_{\text{vac}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_{\text{F}}} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_{\text{F}}} \epsilon_n \right), \quad (51)$$

которое выводится из дираковского гамильтониана, записанного в инвариантном относительно зарядового сопряжения виде, и определено с точностью до константы, зависящей от выбора начала отсчета энергии [24]–[26]. Из структуры выражения (51) следует, что $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ даже при отсутствии внешних полей $A_{\text{ext}} = 0$ отрицательна и расходится. В то же время исходное определение вакуумной плотности заряда (16) таково, что при $A_{\text{ext}} = 0$ она тождественно равна нулю, и таким же образом естественно нормировать и $\mathcal{E}_{\text{VP}}$. Далее заметим, что при наличии внешних кулоновских потенциалов типа (5) или (6) в (51) имеется еще и вклад от (бесконечного) набора связанных состояний. Поэтому для выделения в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ исключительно эффектов взаимодействия в формуле (51) необходимо еще вычесть из каждого дискретного уровня массу свободного электрона. Таким образом, в физически мотивированном виде, согласованном с (16), исходное выражение для вакуумной энергии приобретает

вид

$$\mathcal{E}_{VP} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \epsilon_n + \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 1} 1 \right)_A - \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < 0} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n > 0} \epsilon_n \right)_0. \quad (52)$$

Определенная таким образом вакуумная энергия при выключении внешнего поля исчезает, а при включении содержит только эффекты взаимодействия, так что разложение $\mathcal{E}_{VP}$ по (четным) степеням внешнего поля начинается с $O(Q^2)$.

Теперь выделим в (52) по отдельности вклады от дискретного и непрерывного спектров и используем для разности интегралов по непрерывному спектру

$$\left(\int dk \sqrt{k^2 + 1} \right)_A - \left(\int dk \sqrt{k^2 + 1} \right)_0$$

известный прием, представляющий эту разность в виде интеграла от фазы упругого рассеяния $\delta(k)$. Такая техника вполне эффективно применялась при вычислении однопетлевых квантовых поправок к массе солитонов в существенно нелинейных моделях теории поля в $1 + 1$ измерениях (см. работы [39], [40] и цитируемую в них литературу). В данном случае такой переход осуществляется следующим образом. Пусть, как и ранее,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (53)$$

тогда, опуская общий нормировочный множитель, в используемом представлении $\alpha = \sigma_y$, $\beta = \sigma_z$ для свободного уравнения Дирака в верхнем континууме имеем два типа решений различной четности с волновым числом $k \geq 0$ и энергией $\epsilon = \sqrt{k^2 + 1}$:

$$\varphi(x) = \sqrt{\epsilon + 1} \sin(kx), \quad \chi(x) = \sqrt{\epsilon - 1} \cos(kx), \quad (54)$$

и

$$\varphi(x) = \sqrt{\epsilon + 1} \cos(kx), \quad \chi(x) = -\sqrt{\epsilon - 1} \sin(kx), \quad (55)$$

и далее для определенности рассмотрим первый тип решений (54) (который во многом аналогичен трехмерному случаю).

Асимптотика решений той же четности для уравнений (22) с потенциалами $V_{I,II}$ отличается от (54) на фазовый сдвиг:

$$\varphi(x) \rightarrow \sqrt{\epsilon + 1} \sin[kx + \delta(k)], \quad \chi(x) \rightarrow \sqrt{\epsilon - 1} \cos[kx + \delta(k)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (56)$$

Далее используем регуляризацию на конечный объем, для чего помещаем систему в ящик больших размеров $-L \leq x \leq L$ с граничным условием “невыветания” фермионов из ящика [41]

$$(\pm i\alpha + \beta)\psi(\pm L) = 0, \quad (57)$$

которое в терминах спинорных компонент записывается в виде

$$\varphi(\pm L) \pm \chi(\pm L) = 0. \quad (58)$$

В результате для верхнего континуума получаем систему дискретных мод, нумеруемых целочисленным индексом $n \geq 0$, с соответствующими волновыми числами $k_n^{(0)}$ для свободного случая и k_n при наличии потенциалов $V_{I,II}$. На следующем шаге

снова пользуемся четностью/нечетностью решений и рассматриваем только правую границу ящика с $x = L$, на которой волновые числа k_n и $k_n^{(0)}$ связаны условием

$$k_n L + \delta(k_n) + \gamma(k_n) = k_n^{(0)} L + \gamma(k_n^{(0)}) = \pi n, \quad (59)$$

а дополнительная фаза $\gamma(k)$, которая является характерной чертой фермионных условий “невыветания”, в данном случае находится из условия

$$\gamma(k) = \sqrt{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}}, \quad -\pi/2 < \text{Arg } \gamma < +\pi/2. \quad (60)$$

Из (59) получаем, что

$$k_n = k_n^{(0)} - \frac{\delta(k_n)}{L} + \frac{\gamma(k_n^{(0)}) - \gamma(k_n)}{L}, \quad (61)$$

причем в (61) последним членом справа можно сразу пренебречь, поскольку при $L \rightarrow \infty$ разность $k_n - k_n^{(0)}$ имеет порядок $O(1/L)$ и тем самым последний член имеет порядок $O(1/L^2)$. Далее, из (61) с той же точностью по $1/L$ вытекает, что

$$\epsilon(k_n) - \epsilon(k_n^{(0)}) = \sqrt{k_n^2 + 1} - \sqrt{(k_n^{(0)})^2 + 1} = -\frac{k_n^{(0)}}{\sqrt{(k_n^{(0)})^2 + 1}} \frac{\delta(k_n^{(0)})}{L} + O\left(\frac{1}{L^2}\right). \quad (62)$$

Теперь переходим от суммы $\sum_n$ к интегралу $\int dk$ по следующему из (59) правилу $\Delta n = L dk/\pi$. Наличие дополнительной фазы $\gamma(k)$ никакой роли здесь не играет, поскольку вклад от нее в связь между Δn и dk при $L \rightarrow \infty$ имеет следующий порядок малости по $1/L$. В результате для вклада от состояний данной четности из верхнего континуума в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ с учетом знака в (52) получаем равенство

$$\left(-\sum_{\epsilon_n \geq 1} \epsilon_n\right)_A - \left(-\sum_{\epsilon_n \geq 1} \epsilon_n\right)_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + 1}} \delta(k) + O\left(\frac{1}{L}\right). \quad (63)$$

Таким же способом выполняется аналогичный переход от разности энергий к фазовому интегралу для состояний другой четности и для нижнего континуума. Для нижнего континуума только следует учесть другой (отрицательный) знак энергии отдельных мод и другой (положительный) знак, с которым эти состояния входят в выражение (52) для $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ по сравнению с верхним континуумом. В результате эти знаки компенсируют друг друга и окончательное выражение для $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ после перехода к бесконечному объему принимает вид

$$\mathcal{E}_{\text{VP}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + 1}} \delta_{\text{tot}}(k) + \frac{1}{2} \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 1} (1 - \epsilon_n), \quad (64)$$

где $\delta_{\text{tot}}(k)$ – суммарный фазовый сдвиг при данном волновом числе k , включающий вклады от состояний рассеяния из нижнего и верхнего континуумов обеих четностей, а $1 - \epsilon_n$ – энергия связи соответствующего уровня. Такой подход к вычислению $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ оказывается весьма эффективен, поскольку $\delta_{\text{tot}}(k)$ ведет себя как в инфракрасном, так и в ультрафиолетовом пределах по k гораздо лучше, чем каждая из упругих

фаз по отдельности (см. ниже). Кроме того, $\delta_{\text{tot}}(k)$ автоматически будет четной функцией внешнего поля.

Теперь специально остановимся на взаимосвязи $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ и ρ_{VP} при таком выборе начала отсчета для вакуумной энергии. Исходное выражение для вакуумной энергии (51) приводило к швингеровскому соотношению (1) между $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ и ρ_{VP} в виде связи инфинитезимальных вариаций (см., в частности, статью [26] и приведенные там ссылки), но теперь при переходе к новой точке нормировки к $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ добавляется (бесконечная) сумма масс свободного электрона, соответствующих дискретным уровням в данном внешнем поле, т. е. в определенном смысле динамическая величина, зависящая от конкретного вида взаимодействия (или свойств вершины, если использовать язык диаграммной теории возмущений). Чтобы ответить на вопрос, будет ли за счет такого вычитания изменяться связь между $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ и ρ_{VP} , заметим, что теперь при вариации $A_0(x) \rightarrow A_0(x) + \delta A_0(x)$ мы снова получаем для $\delta \mathcal{E}_{\text{VP}}$ такой же вклад от вакуумной плотности в виде $\int \rho_{\text{VP}}(x) \delta A_0(x)$ и дополнительный член $\delta \mathcal{E}_{\text{N}}$, обусловленный переходами уровней через пороги верхнего и нижнего континуумов как из дискретного спектра в непрерывный, так и наоборот. Но из (64) немедленно следует, что в $\delta \mathcal{E}_{\text{N}}$ вклад от уровней, возникающих на порогах в непрерывном спектре, исчезает, так как суммарная фаза $\delta_{\text{tot}}(k)$, равно как и ее вариация за счет $\delta A_0(x)$, всегда конечна при $k \rightarrow 0$. Также второе слагаемое в (64) показывает, что исчезает и вклад в $\delta \mathcal{E}_{\text{N}}$ от уровней, возникающих на верхнем пороге в дискретном спектре. В результате в $\delta \mathcal{E}_{\text{N}}$ остается только вклад от дискретных уровней на нижнем пороге, который можно представить в виде

$$\delta \mathcal{E}_{\text{N}} = - \sum_n \delta(\epsilon_n - \epsilon_{\text{F}}) \epsilon_n \delta \epsilon_n, \quad (65)$$

что в точности совпадает с результатом, полученным в работе [26] при вариации исходного выражения для энергии вакуума (51). Более формально это следует из записи вариации $\delta \mathcal{E}_{\text{VP}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{\text{VP}} = & \int \rho_{\text{VP}} \delta A_0 + \frac{1}{2} \sum_{\epsilon_n < \epsilon_{\text{F}}} \epsilon_n \delta \langle \psi_n | \psi_n \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\epsilon_n > -\epsilon_{\text{F}}} \epsilon_n \delta \langle \psi_n | \psi_n \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{-1 < \epsilon_n < 1} (1 - \epsilon_n) \delta \langle \psi_n | \psi_n \rangle + \frac{1}{2} \sum_n (1 - \epsilon_n) \delta(\epsilon_n + \epsilon_{\text{F}}) \delta \epsilon_n + \\ & + \frac{1}{2} \sum_n (1 - \epsilon_n) \delta(\epsilon_n - \epsilon_{\text{F}}) \delta \epsilon_n. \end{aligned} \quad (66)$$

Легко видеть, что в (66) остаются только первое и последнее слагаемые, поскольку $\delta \langle \psi_n | \psi_n \rangle = 0$ в каждом из континуумов и в дискретном спектре, $1 - \epsilon_n = 0$ при $\epsilon_n = -\epsilon_{\text{F}}$, а последнее слагаемое совпадает с (65). Роль этого слагаемого в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ подробно разобрана в работе [26]. А именно, $\mathcal{E}_{\text{N}} = -N$, где N – число опустившихся в нижний континуум уровней. Таким образом, $\mathcal{E}_{\text{N}}$ представляет собой ступенчатую функцию, каждый скачок которой равен $-1 \times mc^2$ и происходит всякий раз, когда дискретный уровень уходит в нижний континуум. Обусловленный этим скачок в вакуумной энергии есть результат спонтанного рождения электрон-позитронных пар в сверхкритических внешних кулоновских полях [24]–[26], [28], [33]. Таким образом, $\delta \mathcal{E}_{\text{N}}$ имеет непосредственное отношение к эффекту перехода нейтрального вакуума

в заряженный, который оказывается основным состоянием электрон-позитронного поля в таких полях.

Следует также отметить, что нормировка вакуумной энергии на нуль при $A_{\text{ext}} = 0$ и с переходом к суммарной энергии связи уровней дискретного спектра (52) приводит к тому, что в таком виде $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в $1 + 1$ измерениях для потенциалов типа I или II сразу оказывается конечной величиной без какой-либо УФ-перенормировки и обрезания кулоновской асимптотики внешнего поля. Это непосредственно следует из (64), поскольку, как это показано ниже явным вычислением, $\delta_{\text{tot}}(k)$ регулярна при $k \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$ ведет себя, как $O(1/k^3)$, поэтому фазовый интеграл в (64) всегда сходится, а полная энергия связи дискретных уровней также конечна, поскольку $1 - \epsilon_n$ ведут себя при $n \rightarrow \infty$, как $O(1/n^2)$. Это следует также из представления $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в виде суммы сверток $\rho_{\text{VP}}^{(i)}$ с внешним потенциалом (4), поскольку при $|x| \rightarrow \infty$ как $A_0(x)$, так и неперенормированная вакуумная плотность $\rho_{\text{VP}}^{(1)}(x)$ ведут себя, как $1/|x|$, а $\rho_{\text{VP}}^{(i)}(x)$ при $i \geq 3$ как компоненты $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}$ убывают при $|x| \rightarrow \infty$ заведомо еще быстрее, поэтому все интегралы в выражении (4) для $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ сходятся. Заметим однако, что конечность $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ после вычитания (52) (хотя и проводимого под знаком промежуточной УФ-регуляризации) не является результатом настоящей УФ-перенормировки, а обусловлена исключительно спецификой $1 + 1$ измерений. Необходимость перенормировки через фермионную петлю (см. рис. 1) следует из анализа свойств ρ_{VP} , который показывает, что без такой УФ-перенормировки интегральный вакуумный заряд не имеет ожидаемого целочисленного значения. Кроме того, при $Z \rightarrow 0$ вакуумная энергия должна совпадать с $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}$, полученной по теории возмущений согласно (10)–(12). Поскольку при $Z \rightarrow 0$ связь между вакуумной энергией и вакуумной плотностью описывается теорией возмущений (2)–(4), легко показать, что неперенормированная $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в общем случае этому условию не удовлетворяет. Фактически это осуществлено ниже в терминах перенормировочного коэффициента η (см. формулы (69), (70) и последующие комментарии). Таким образом, несмотря на конечность, $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в виде (64) все равно подлежит (конечной) перенормировке в порядке $O(Z^2)$ на соответствующую вакуумную энергию $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}$, вычисленную в первом порядке теории возмущений через перенормированную плотность $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ согласно (10)–(12). Метод ВК для ρ_{VP} фактически здесь играет роль контролера, обеспечивающего выполнение необходимых физических условий для корректного описания эффекта поляризации вакуума вне рамок теории возмущений, которые не отслеживаются при вычислении $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ через выражение (64). Таким образом, в полной аналогии с (47) мы должны перейти к перенормированной вакуумной энергии с помощью соотношения

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}} = \mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)} + \mathcal{E}_{\text{VP}}^{(3+)}, \quad (67)$$

где $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(3+)}$ собирается из $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}$ аналогично формуле (4). Соотношение (67) можно также переписать в форме, не связанной с разложением по степеням внешнего поля и более удобной для практических вычислений:

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z) = \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z) + \eta Z^2, \quad (68)$$

где

$$\eta = \lim_{Z_0 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0) - \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z_0)}{Z_0^2}. \quad (69)$$

При этом перенормировочный коэффициент η определяется исключительно профилем внешнего кулоновского поля и представляется в виде двойного интеграла от $A_0(x)$, для чего $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}$ выражается через (10)–(12), а $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ – через первое борновское приближение для $\text{Tr } G$, откуда следует, что

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0) - \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z_0) = \frac{1}{2} \int dx A_0(x) [(\rho_{\text{VP}}^{(1)})_{\text{ren}}(x) - (\rho_{\text{VP}}^{(1)})_{\text{nonren}}(x)], \quad (70)$$

где $(\rho_{\text{VP}}^{(1)})_{\text{ren}}(x)$ – перенормированная пертурбативная вакуумная плотность (11)–(13), а $(\rho_{\text{VP}}^{(1)})_{\text{nonren}}(x) = (|e|/2\pi) \int \text{Tr}(G^{(0)}(-V)G^{(0)})$ – перенормированная пертурбативная вакуумная плотность, и обе плотности в свою очередь выражаются через интегралы от $A_0(x)$. Отметим также, что η в зависимости от параметров кулоновского источника может быть как любого знака, так и равно нулю (см. ниже рис. 10).

Рассмотрим теперь явное вычисление $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ для потенциалов I и II.

I. Решение уравнения Дирака для верхнего и нижнего ($\pm$) континуумов при $x > 0$ выбираем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1^\pm(x; \epsilon) &= \left\{ \frac{\sqrt{\epsilon+1}}{\sqrt{|\epsilon|-1}} \right\} \text{Re} \left[e^{i\lambda^\pm} e^{ikz} (-i2kz)^{iQ} \left(i \frac{Q}{k} \Phi_z + b\Phi_z(b+) \right) \right], \\ \Phi_2^\pm(x; \epsilon) &= \left\{ \frac{-\sqrt{\epsilon-1}}{\sqrt{|\epsilon|+1}} \right\} \text{Re} \left[i e^{i\lambda^\pm} e^{ikz} (-i2kz)^{iQ} \left(-i \frac{Q}{k} \Phi_z + b\Phi_z(b+) \right) \right], \end{aligned} \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\epsilon^2 - 1}, \quad b = iQ \left(1 - \frac{\epsilon}{k} \right), \quad c = 1 + 2iQ, \\ \Phi_z &= \Phi(b, c, -i2kz), \quad \Phi_z(b+) = \Phi(b+1, c, -i2kz). \end{aligned} \quad (72)$$

Коэффициенты $\lambda^\pm$ находятся из условий дираковски четного ($\Phi_2(0; \epsilon) = 0$) или нечетного ($\Phi_1(0; \epsilon) = 0$) продолжения решений (71) на отрицательную полуось $x < 0$. В результате для четных решений

$$e^{i2\lambda_{\text{even}}^\pm} = e^{-i2ka} (2ka)^{-i2Q} \frac{(b\Phi_a(b+))^* + i(Q/k)\Phi_a^*}{b\Phi_a(b+) - i(Q/k)\Phi_a}, \quad (73)$$

для нечетных –

$$e^{i2\lambda_{\text{odd}}^\pm} = -e^{-i2ka} (2ka)^{-i2Q} \frac{(b\Phi_a(b+))^* - i(Q/k)\Phi_a^*}{b\Phi_a(b+) + i(Q/k)\Phi_a}. \quad (74)$$

Для дискретного спектра ($|\epsilon| < 1$) дираковская волновая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(x; \epsilon) &= \sqrt{1+\epsilon} e^{-\gamma z} \text{Re} \left[e^{i\lambda} (2\gamma z)^{iQ} \left(\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma z) + b\Phi(b+1, c, 2\gamma z) \right) \right], \\ \Phi_2(x; \epsilon) &= \sqrt{1-\epsilon} e^{-\gamma z} \text{Re} \left[e^{i\lambda} (2\gamma z)^{iQ} \left(-\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma z) + b\Phi(b+1, c, 2\gamma z) \right) \right], \end{aligned} \quad (75)$$

где γ и b определены так же, как в формулах (25).

Четные уровни дискретного спектра находятся из условий убывания на бесконечности и равенства $\Phi_2(0; \epsilon) = 0$, что приводит к уравнению

$$\text{Im} \left[(2\gamma a)^{iQ} \left(-\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma a) + b\Phi(b+1, c, 2\gamma a) \right) \Gamma(b) \Gamma(c^*) \right] = 0, \quad (76)$$

а нечетные – соответственно из условия на бесконечности и равенства $\Phi_1(0; \epsilon) = 0$, что дает уравнение

$$\text{Im} \left[(2\gamma a)^{iQ} \left(\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma a) + b\Phi(b+1, c, 2\gamma a) \right) \Gamma(b)\Gamma(c^*) \right] = 0. \quad (77)$$

II. В этом случае $\lambda^\pm$ находятся из сшивки решений внутри ядра (30) и решений в кулоновском потенциале (71) (с заменой $z \rightarrow x$) в точке $x = R_0$. В результате для четных решений

$$e^{i2\lambda_{\text{even}}^\pm} = e^{-i2kR_0} (2kR_0)^{-i2Q} \frac{(b\Phi_{R_0}(b+))^* [1 - iW_{\text{even}}^\pm] + i(Q/k)\Phi_{R_0}^* [1 + iW_{\text{even}}^\pm]}{b\Phi_{R_0}(b+)[1 + iW_{\text{even}}^\pm] - i(Q/k)\Phi_{R_0} [1 - iW_{\text{even}}^\pm]}, \quad (78)$$

где

$$W_{\text{even}}^+ = \sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}} \sqrt{\frac{\epsilon+V_0-1}{\epsilon+V_0+1}} \text{tg}(\xi R_0),$$

$$W_{\text{even}}^- = \begin{cases} -\sqrt{\frac{|\epsilon|-1}{|\epsilon|+1}} \sqrt{\frac{-|\epsilon|+V_0-1}{-|\epsilon|+V_0+1}} \text{tg}(\xi R_0), & -|\epsilon| + V_0 > 1, \\ \sqrt{\frac{|\epsilon|-1}{|\epsilon|+1}} \sqrt{\frac{|\epsilon|-V_0+1}{|\epsilon|-V_0-1}} \text{tg}(\xi R_0), & -|\epsilon| + V_0 < -1, \\ \sqrt{\frac{|\epsilon|-1}{|\epsilon|+1}} \sqrt{\frac{1-V_0+|\epsilon|}{1+V_0-|\epsilon|}} \text{th}(|\xi|R_0), & |\epsilon + V_0| < 1, \end{cases} \quad (79)$$

для нечетных решений

$$e^{i2\lambda_{\text{odd}}^\pm} = -e^{-i2kR_0} (2kR_0)^{-i2Q} \frac{(b\Phi_{R_0}(b+))^* [1 - iW_{\text{odd}}^\pm] - i(Q/k)\Phi_{R_0}^* [1 + iW_{\text{odd}}^\pm]}{b\Phi_{R_0}(b+)[1 + iW_{\text{odd}}^\pm] + i(Q/k)\Phi_{R_0} [1 - iW_{\text{odd}}^\pm]}, \quad (80)$$

где

$$W_{\text{odd}}^+ = \sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}} \sqrt{\frac{\epsilon+V_0+1}{\epsilon+V_0-1}} \text{tg}(\xi R_0),$$

$$W_{\text{odd}}^- = \begin{cases} -\sqrt{\frac{|\epsilon|+1}{|\epsilon|-1}} \sqrt{\frac{-|\epsilon|+V_0+1}{-|\epsilon|+V_0-1}} \text{tg}(\xi R_0), & -|\epsilon| + V_0 > 1, \\ \sqrt{\frac{|\epsilon|+1}{|\epsilon|-1}} \sqrt{\frac{|\epsilon|-V_0-1}{|\epsilon|-V_0+1}} \text{tg}(\xi R_0), & -|\epsilon| + V_0 < -1, \\ -\sqrt{\frac{|\epsilon|+1}{|\epsilon|-1}} \sqrt{\frac{1+V_0-|\epsilon|}{1-V_0+|\epsilon|}} \text{th}(|\xi|R_0), & |\epsilon + V_0| < 1. \end{cases} \quad (81)$$

Уравнение для четных уровней дискретного спектра имеет вид

$$\text{Im} \left[(2\gamma R_0)^{iQ} \left(-\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma R_0)[1+W_{\text{even}}] + b\Phi(b+1, c, 2\gamma R_0)[1-W_{\text{even}}] \right) \Gamma(b)\Gamma(c^*) \right] = 0, \quad (82)$$

где

$$W_{\text{even}} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \sqrt{\frac{\epsilon+V_0-1}{\epsilon+V_0+1}} \text{tg}(\xi R_0), & \epsilon + V_0 > 1, \\ \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \sqrt{\frac{1-\epsilon-V_0}{1+\epsilon+V_0}} \text{th}(|\xi|R_0), & |\epsilon + V_0| < 1, \end{cases} \quad (83)$$

а для нечетных уровней уравнение записывается как

$$\text{Im} \left[(2\gamma R_0)^{iQ} \left(\frac{Q}{\gamma} \Phi(b, c, 2\gamma R_0)[1+W_{\text{odd}}] + b\Phi(b+1, c, 2\gamma R_0)[1-W_{\text{odd}}] \right) \Gamma(b)\Gamma(c^*) \right] = 0, \quad (84)$$

где

$$W_{\text{odd}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \sqrt{\frac{\epsilon+V_0+1}{\epsilon+V_0-1}} \operatorname{tg}(\xi R_0), & \epsilon + V_0 > 1, \\ \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \sqrt{\frac{1+\epsilon+V_0}{1-\epsilon-V_0}} \operatorname{th}(|\xi| R_0), & |\epsilon + V_0| < 1. \end{cases} \quad (85)$$

Отдельные фазовые сдвиги находятся из асимптотики решений (71) при $x \rightarrow \infty$ и содержат кулоновские логарифмы $Q(\epsilon/k) \ln(2k(|x|+a))$ для модели I и $Q(\epsilon/k) \ln(2k|x|)$ для модели II, которые в суммарной фазе

$$\delta_{\text{tot}}(k) = (\delta_{\text{even}}^+ + \delta_{\text{odd}}^+ + \delta_{\text{even}}^- + \delta_{\text{odd}}^-)(k) \quad (86)$$

взаимно сокращаются, поэтому в формуле (86) для отдельных фаз мы оставляем только регулярную при $x \rightarrow \infty$ часть

$$\delta_{\sigma}^{\pm}(k) = \operatorname{Arg} \left[e^{i\phi_{\sigma}^{\pm}} \left(e^{\pi Q} \frac{\Gamma(c) e^{i\lambda_{\sigma}^{\pm}}}{(\epsilon+k)\Gamma[iQ(1+\epsilon/k)]} + \frac{\Gamma(c^*) e^{-i\lambda_{\sigma}^{\pm}}}{\Gamma[-iQ(1-\epsilon/k)]} \right) \right], \quad \sigma = \text{even, odd}, \quad (87)$$

где для модели I $\phi_{\text{even}}^+ = ka$, $\phi_{\text{even}}^- = ka + \pi$, $\phi_{\text{odd}}^{\pm} = ka \pm \pi/2$, а для модели II слагаемое ka в фазах $\phi_{\sigma}^{\pm}$ отсутствует. При этом асимптотика фаз (87) при $k \rightarrow \infty$ содержит логарифмические члены $\mp Q(|\epsilon|/k) \ln(2ka)$ или $\mp Q(|\epsilon|/k) \ln(2kR_0)$, которые также взаимно сокращаются, и в результате в $\delta_{\text{tot}}(k)$ остается только регулярная часть, убывающая, как $1/k^3$. Более конкретно, УФ-асимптотика $\delta_{\text{tot}}(k)$ в модели I имеет вид

$$\delta_{\text{tot}}(k \rightarrow \infty) = -\frac{2Q^2}{k^3 a} \left[1 + \frac{1+4Q^2}{12(ka)^2} \right] + O\left(\frac{1}{k^7}\right), \quad (88)$$

а в модели II

$$\delta_{\text{tot}}(k \rightarrow \infty) = -\frac{4Q^2}{k^3 R_0} \left[1 + \frac{1+16Q^2}{24(kR_0)^2} \right] + O\left(\frac{1}{k^6}\right). \quad (89)$$

Следует отметить, что вывод асимптотик (88), (89) за разумное время возможен только с использованием систем аналитических вычислений. Суммарный фазовый сдвиг $\delta_{\text{tot}}(k)$ регулярен и при $k \rightarrow 0$, поскольку все сингулярные члены в инфракрасных асимптотиках $\pm[(1 - \ln[Q/k])Q/k - \pi/4 - kQ \ln[Q/k]/2]$ для $\sigma = \text{even}$ и $\pm[(1 - \ln[Q/k])Q/k + \pi/4 - kQ \ln[Q/k]/2]$ для $\sigma = \text{odd}$ в фазах верхнего и нижнего континуумов также сокращаются. Точные инфракрасные асимптотики для $\delta_{\text{tot}}(k)$ в моделях I и II находятся с использованием представления Тейлора для конфлюэнтных гипергеометрических функций [37], [42] и имеют следующий вид.

Для потенциала I

$$\delta_{\text{tot}}(k \rightarrow 0) = \operatorname{Arg}[(e^{i\varphi_{\text{even}}^+} - e^{-2\pi Q} e^{-i\varphi_{\text{even}}^+})(e^{i\varphi_{\text{odd}}^+} - e^{-2\pi Q} e^{-i\varphi_{\text{odd}}^+}) \sin \varphi_{\text{even}}^- \sin \varphi_{\text{odd}}^-] + O(k), \quad (90)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{even}}^+ &= -\operatorname{Arg}[-J_{2iQ}(\sqrt{8Qa})], \\ \varphi_{\text{odd}}^+ &= -\operatorname{Arg}[\sqrt{2Qa} J_{1+2iQ}(\sqrt{8Qa}) - iQ J_{2iQ}(\sqrt{8Qa})], \\ \varphi_{\text{odd}}^- &= -\operatorname{Arg}[J_{2iQ}(\sqrt{-8Qa})], \\ \varphi_{\text{even}}^- &= -\operatorname{Arg}[\sqrt{-2Qa} J_{1+2iQ}(\sqrt{-8Qa}) - iQ J_{2iQ}(\sqrt{-8Qa})]. \end{aligned} \quad (91)$$

Для потенциала II

$$\delta_{\text{tot}}(k \rightarrow 0) = \text{Arg}[-(e^{i\varphi_{\text{even}}^+} - e^{-2\pi Q} e^{-i\varphi_{\text{even}}^+})(e^{i\varphi_{\text{odd}}^+} - e^{-2\pi Q} e^{-i\varphi_{\text{odd}}^+}) \cos \varphi_{\text{even}}^- \cos \varphi_{\text{odd}}^-] + O(k^2), \quad (92)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{even}}^+ &= -\text{Arg}[2Q J_{2iQ}(\sqrt{8QR_0}) + w_{\text{even}}^+(\sqrt{2QR_0} J_{1+2iQ}(\sqrt{8QR_0}) - iQ J_{2iQ}(\sqrt{8QR_0}))], \\ \varphi_{\text{odd}}^+ &= -\text{Arg}[-\sqrt{2QR_0} J_{1+2iQ}(\sqrt{8QR_0}) + iQ J_{2iQ}(\sqrt{8QR_0}) + w_{\text{odd}}^+ 2Q J_{2iQ}(\sqrt{8QR_0})], \\ \varphi_{\text{even}}^- &= -\text{Arg}[-i\sqrt{-2QR_0} J_{1+2iQ}(\sqrt{-8QR_0}) - Q J_{2iQ}(\sqrt{-8QR_0}) - \\ &\quad - w_{\text{even}}^- 2iQ J_{2iQ}(\sqrt{-8QR_0})], \\ \varphi_{\text{odd}}^- &= -\text{Arg}[2iQ J_{2iQ}(\sqrt{-8QR_0}) - w_{\text{odd}}^-(i\sqrt{-2QR_0} J_{1+2iQ}(\sqrt{-8QR_0}) + \\ &\quad + Q J_{2iQ}(\sqrt{-8QR_0}))], \end{aligned} \quad (93)$$

а коэффициенты $w_{\sigma}^{\pm}$ определяются следующим образом:

$$w_{\text{even}}^+ = \sqrt{\frac{4V_0}{V_0+2}} \text{tg}[\sqrt{(V_0+1)^2-1}R_0], \quad w_{\text{odd}}^+ = \sqrt{\frac{V_0+2}{4V_0}} \text{tg}[\sqrt{(V_0+1)^2-1}R_0]; \quad (94)$$

если $V_0 \geq 2$, то

$$w_{\text{even}}^- = -\sqrt{\frac{V_0-2}{4V_0}} \text{tg}[\sqrt{(V_0-1)^2-1}R_0], \quad w_{\text{odd}}^- = -\sqrt{\frac{4V_0}{V_0-2}} \text{tg}[\sqrt{(V_0-1)^2-1}R_0], \quad (95)$$

а если $V_0 < 2$, то

$$w_{\text{even}}^- = \sqrt{\frac{2-V_0}{4V_0}} \text{th}[\sqrt{1-(V_0-1)^2}R_0], \quad w_{\text{odd}}^- = -\sqrt{\frac{4V_0}{2-V_0}} \text{th}[\sqrt{1-(V_0-1)^2}R_0]. \quad (96)$$

Отметим, что по крайней мере в рассмотренном диапазоне параметров внешних источников значение $\delta_{\text{tot}}(0)$ однозначно фиксируется формулами (90)–(96) и всегда находится в интервале $-\pi < \delta_{\text{tot}}(0) < \pi$, что проверяется через явное восстановление $\delta_{\text{tot}}(k)$ на всем интервале, начиная с УФ-асимптотики (88), (89). Поведение $\delta_{\text{tot}}(0)$ как функции Z показано на рис. 8.

Типичное поведение $\delta_{\text{tot}}(k)$ как функции волнового числа показано на рис. 9а–в для модели I при $a = 0.1$. При $Z = 115$ первое критическое $Z_{\text{cr},1} \simeq 115.999$ еще не достигается, поэтому $\delta_{\text{tot}}(k)$ демонстрирует гладкое поведение на всем интервале изменения волнового числа. При $Z = 117$ первый четный дискретный уровень уже достиг нижнего континуума, поэтому за счет полюса функции Грина на втором энергетическом листе с $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$, $\epsilon_1 < -1$, $\epsilon_2 > 0$, и соответственно в нижней полуплоскости по волновому числу с $k = k_1 - ik_2$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, возникает первый и еще достаточно узкий (позитронный) упругий резонанс. При $Z = 298$ в нижний континуум опустились уже три уровня, которым соответствуют три резонанса, причем последний резонанс оказывается предельно узким, поскольку второй четный уровень (и третий по общему счету) оказывается на пороге нижнего континуума при $Z_{\text{cr},3} \simeq 297.24$, а два первых резонанса уже стали существенно менее

Рис. 8. Фазовый сдвиг $\delta_{\text{tot}}(0)$ в модели I при $a = 0.1$ (а) и в модели II при $R_0 = 0.1$ (б).

Рис. 9. Фазовый сдвиг $\delta_{\text{tot}}(k)$ для $Z = 115$ (а), $Z = 117$ (б) и $Z = 298$ (в) в модели I при $a = 0.1$.

выраженными. Быстрое уширение резонансов (и тем самым расплывание соответствующих вакуумных оболочек) с ростом Z вообще является характерной чертой таких непertурбативных эффектов поляризации вакуума в $1 + 1$ измерениях. Аналогичное поведение $\delta_{\text{tot}}(k)$ имеет место и в модели II. Различие проявляется только в значениях критических Z для дискретных уровней.

Рис. 10. Перенормировочный коэффициент η в модели I (а) и в модели II (б).

В результате в (64) как фазовый интеграл, так и суммарная энергия связи дискретных уровней всегда сходятся без дополнительной регуляризации кулоновской асимптотики внешнего потенциала и вычисляются с использованием стандартных численных методов. Следует также отметить, что УФ-асимптотика фаз (88), (89) фактически начинает работать при $ka \gg 1$ и $kR_0 \gg 1$ соответственно, и это обстоятельство играет существенную роль при вычислении фазового интеграла в (64), поскольку позволяет существенно упростить интегрирование на верхнем пределе при асимптотически больших k .

Отметим теперь основные непертурбативные эффекты в поведении фазового интеграла и полной энергии связи дискретных уровней $\sum_n (1 - \epsilon_n)$ в (64) для закритической области. Как следует из рис. 8, $\delta_{\text{tot}}(0)$ осциллирует в пределах $-\pi < \delta_{\text{tot}}(0) < \pi$, при этом каждый очередной резонанс вызывает отрицательный скачок фазы на π , после чего $\delta_{\text{tot}}(0)$ снова плавно увеличивается на то же значение π . В результате фазовый интеграл при появлении очередного резонанса получает отрицательный скачок производной и становится осциллирующей медленно убывающей функцией от Z . Энергия связи дискретных уровней наоборот с ростом Z растет, поскольку с увеличением Z растет энергия связи каждого уровня за исключением критических Z , когда очередной уровень достигает нижнего континуума и возникает скачок энергии связи на $-2mc^2$. При этом в $1+1$ измерениях в закритической области до перенормировки оказывается именно поведение суммы дискретных уровней, фазовый интеграл дает в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ существенно меньший вклад. Подчеркнем, что такое поведение фазового интеграла и $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ специфично для $1+1$ измерений.

Следующим фактором, влияющим на поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ как функции Z , является значение перенормировочного коэффициента η , поскольку этот коэффициент через формулу (68) регулирует поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ в $O(Z^2)$. Более того, в $1+1$ измерениях этот вклад в $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ в закритической области оказывается доминирующим, поскольку сумма дискретных уровней и тем самым неперенормированная $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ растут в этой области, как Z^p , $1 < p < 2$. Для внешних источников типа I или II непосредственно из определения η (69), (70) и очевидных размерных аргументов следует, что в обоих случаях асимптотика η при a (или R_0) $\rightarrow 0$ и a (или R_0) $\rightarrow \infty$ имеет вид const/a (или const/R_0). Поведение η в переходной области между асимптотиками в зависимости от параметров внешнего потенциала показано на рис. 10.

Разберем теперь роль η на примере модели I. Пусть a_{cr} – такое значение параметра потенциала (5), при котором $\eta_i(a_{\text{cr}}) = 0$. Тогда при $a < a_{\text{cr}}$ перенормировочный коэффициент является положительным и имеет большие значения, в результате в $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ доминирует возрастающая $O(Z^2)$ -компонента. В то же время при $a > a_{\text{cr}}$ перенормировочный коэффициент быстро уходит в отрицательную область, в результате слагаемое ηZ^2 в $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ убывает, а поскольку в закритической области перенормированная $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ растет медленнее, чем Z^2 , то при $Z \gg Z_{\text{cr},1}$ возникает эффект понижения вакуумной энергии вплоть до больших отрицательных значений. При $a \simeq a_{\text{cr}}$ все определяется конкуренцией непертурбативных эффектов в фазовом интеграле, которые стремятся уменьшить вакуумную энергию, и энергии связи дискретного спектра, которая действует в обратную сторону, поэтому поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ существенно зависит от конкретного вида потенциала. В моделях I и II вклад дискретного спектра оказывается доминирующим, поэтому $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ растет, но уже не квадратично, а более медленно, как Z^ν , $1 < \nu < 2$.

Расчеты, проведенные для моделей I и II для достаточно широкого диапазона параметров, полностью соответствуют этим общим выводам. На рис. 11а–г показано поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ в модели I для $a = 0.01$, $a_{\text{cr}} \simeq 0.027, 0.1, 1.0$. Сразу отметим, что число оболочек для этих значений a оценивается как $0.006Z^{1.2}$, $0.004Z^{1.24}$, $0.002Z^{1.3}$, $0.00002Z^{1.75}$ соответственно. При $a = 0.01$ перенормировочный параметр $\eta \simeq 0.0006$ и вакуумная энергия как функция Z демонстрирует квадратичный рост сначала за счет пертурбативного вклада, а при $Z > Z_{\text{cr},1}$ за счет члена ηZ^2 . При $a = a_{\text{cr}}$ перенормировочный член исчезает и доминирующий вклад в $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ при $Z > Z_{\text{cr},1}$ возникает из энергии связи дискретных уровней, которая (при убранных скачках) ведет себя как $0.009Z^{1.17}$. Наоборот, при $a = 0.1, 1.0$ $\eta \simeq -0.00008$ и $\simeq -0.000016$ соответственно, перенормированные $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ (без скачков) аппроксимируются как $0.005Z^{1.2}$ и $0.0009Z^{1.37}$, поэтому за счет отрицательного квадратичного перенормировочного члена $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ демонстрирует убывание вплоть до значительных отрицательных значений. При этом на рис. 11в,г хорошо видно, что сначала до первого критического $Z_{\text{cr},1}$ имеет место квадратичный рост, обусловленный пертурбативными эффектами, которые при $Z > Z_{\text{cr},1}$ деградируют в соответствии с описанным выше сценарием, после чего основной вклад начинает давать перенормировочный член ηZ^2 и $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ убывает почти по квадратичному закону.

Аналогичные результаты имеют место и в модели II. Энергия $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ показана для этого случая на рис. 12а–в. Вся разница заключается в том, что при тех же значениях параметра R_0 , как и для параметра a на рис. 11, опускание дискретных уровней в нижний континуум происходит при меньших Z_{cr} .

Отдельно остановимся на поведении вакуумной энергии для внешнего источника типа II с зависящим от Z параметром R_0 :

$$R_0(Z) = 1.2(2.5Z)^{1/3} \Phi_{\text{M}}. \quad (97)$$

Такая зависимость $R_0(Z)$ имитирует аналогичную задачу в $3 + 1$ измерениях, в которой первый $1s_{1/2}$ -уровень достигает нижнего континуума при $Z_{\text{cr},1} \simeq 170$. При этом перенормировочный коэффициент η через зависимость от R_0 также становится функцией Z , которая возникает из функции $\eta(R_0)$, приведенной на рис. 10б, при подстановке в нее зависимости (97). Энергия $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ для этого случая показана на рис. 13 и демонстрирует нелинейный переход от квадратичного роста при малых Z

Рис. 11. Энергия $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ в модели I при $a = 0.01$ (а), $a = a_{\text{cr}} \simeq 0.027$ (б), $a = 0.1$ (в), $a = 1.0$ (г).

и R_0 через плато при $Z \sim 400$ – 500 к области $Z \sim 600$ – 1000 , когда за счет перенормировочного члена $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ начинает почти квадратично опускаться в область отрицательных значений. Причем с ростом Z скорость убывания $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ за счет зависимости $\eta(R_0)$ при больших R_0 стремится не к $O(Z^2)$, а к $O(Z^{5/3})$ и вклад от дискретных уровней становится более заметным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение необходимо прежде всего отметить, что собственно вычисление вакуумной энергии при УФ-перенормировке через фермионную петлю (см. рис. 1) можно провести исключительно на основе соотношений (64), (68) и (69) без обращения к вакуумной плотности и оболочечным эффектам. Эффект убывания $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ в закритической области при этом имел бы вполне корректное объяснение через отрицательный вклад от перенормировочного члена ηZ^2 . Однако по существу убывание $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ в закритической области обусловлено непертурбативными изменениями в вакуумной плотности при $Z > Z_{\text{cr},1}$ за счет дискретных уровней, достигающих нижнего континуума. В $1+1$ измерениях в силу специфики одномерной задачи ДК рост числа вакуумных оболочек описывается зависимостью Z^s , $1 < s < 2$, по крайней мере в рассмотренном диапазоне внешних параметров. Поэтому их хватает только на то, чтобы уменьшить в закритической области скорость роста неперенормированной $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ до Z^ν , $1 < \nu < 2$, и в результате доминирующий вклад возникает от перенормировочного члена ηZ^2 . В $2+1$ и $3+1$ измерениях оболочечный эффект

Рис. 12. Энергия $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ в модели II при $R_0 = 0.01$ (а), $R_0 = R_{0,\text{cr}} \simeq 0.038$ (б), $R_0 = 0.1$ (в), $R_0 = 1.0$ (г).

Рис. 13. Энергия $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ в модели II при $R_0(Z) = 1.2(2.5Z)^{1/3}$ Фм. Штриховой линией показано поведение члена ηZ^2 .

выражен гораздо более явно. Такое поведение $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ в закритической области показывает правильность вывода о превращении нейтрального вакуума в заряженный, который оказывается основным состоянием электрон-позитронного поля в таких полях [24]–[26], [28], [33], и тем самым о спонтанном излучении вакуумных позитронов, которые должны возникать при рождении очередной вакуумной оболочки вследствие закона сохранения полного заряда.

Рис. 14. Вакуумные диаграммы с однофотонным обменом. Двойная линия обозначает точный фермионный пропагатор во внешнем кулоновском поле.

Следует также отметить, что в данной работе, как и в других работах по поляризации вакуума сверхсильным кулоновским полем [29]–[32], вклад процессов с обменом виртуальными фотонами не рассматривался. При их учете в вакуумных эффектах возникают диаграммы, аналогичные приведенным на рис. 14.

Однако их вычисление вне рамок теории возмущений по внешнему полю представляет большие трудности и к настоящему времени еще не выполнено [43]. Отметим также, что левая (одночастично приводимая) диаграмма при вычислении вакуумной энергии учитываться не должна, поскольку эффективное действие и тем самым $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ содержат вклады только от сильно связанных (одночастично неприводимых) диаграмм [44].

Простейшую оценку роли вакуумных эффектов с учетом вклада виртуальных фотонов можно получить на основе кулоновской электростатической энергии перенормированной вакуумной плотности с таким же обрезанием, что и в исходном потенциале внешнего источника (5):

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}} = \frac{1}{2} \int dx dx' \frac{\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x) \rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x')}{|x - x'| + a}. \quad (98)$$

Явный расчет $\Delta\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ для модели I показывает, что по крайней мере на уровне такой оценки вклад в вакуумную энергию от однофотонного обмена оказывается достаточно малым, примерно на два порядка меньше (см. рис. 15), чем от фермионной петли. Для модели II оценка для фотонного вклада также может основываться на (98), но при этом надо ввести соответствующее обрезание и в исходный потенциал модели (6), поэтому здесь она не рассматривается.

На рис. 15б показано поведение $\Delta\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ как функции Z при $a = 0.01$ в сравнении с $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$, рассчитанной в одной петле согласно (64), (68) и (69) (см. рис. 15а). На рис. 15в, 15г показано поведение $\Delta\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ как функции Z при $a = 0.1, 1.0$ соответственно. Энергии $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ для этих значений параметра кулоновского обрезания и в том же диапазоне по Z были приведены на рис. 11в, 11г. Следует также отметить, что из рис. 15б–15г снова хорошо видно, что и в эффектах, обусловленных виртуальными фотонами, основной вклад порождается вакуумными оболочками.

Таким образом, в 1+1 измерениях поляризация вакуума в закритической области при соответствующих параметрах кулоновских источников может приводить к существенно отличному от пертурбативного поведению вакуумной энергии. Специфика 1 + 1 измерений состоит в том, что скорость убывания $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ в рассмотренном диапазоне кулоновских источников не превышает $-\lvert\eta\rvert Z^2$. Но это обусловлено исключительно медленным ростом числа вакуумных оболочек в одномерном случае.

Рис. 15. Энергия $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ (а) и графики $\Delta\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ при $a = 0.01$ (б), $a = 0.1$ (в) и $a = 1$ (г).

При этом по понятным причинам мы опускаем обсуждение вполне законного вопроса о том, насколько такая сверхкритическая область физически реализуема (как и вообще вся одномерная картина для релятивистского водородоподобного атома).

Благодарности. В заключение авторы хотели бы выразить благодарность профессорам Д. А. Славнову и П. К. Силаеву за полезные обсуждения, а также отдельно поблагодарить профессора А. Е. Шабада за внимание к работе и ряд ценных критических замечаний, которые позволили придать результатам работы более точный вид.

Список литературы

- [1] R. Loudon, "One-dimensional hydrogen atom", *Am. J. Phys.*, **27**:9 (1959), 649–655.
- [2] R. J. Elliott, R. Loudon, "Theory of the absorption edge in semiconductors in a high magnetic field", *J. Phys. Chem. Solids*, **15**:3–4 (1960), 196–207.
- [3] C. M. Care, "One dimensional hydrogen atom with a repulsive core", *J. Phys. C: Solid State Phys.*, **5**:14 (1972), 1799–1805.
- [4] M. W. Cole, "Properties of image-potential-induced surface states of insulators", *Phys. Rev. B*, **2**:10 (1970), 4239–4252.
- [5] M. M. Nieto, "Electrons above a helium surface and the one-dimensional Rydberg atom", *Phys. Rev. A*, **61**:3 (2000), 034901, 4 pp.

- [6] Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, Д. Л. Шепелянский, “Высоковозбужденный атом в электромагнитном поле”, *УФН*, **140**:3 (1983), 355–392.
- [7] R. V. Jensen, S. M. Susskind, M. M. Sanders, “Chaotic ionization of highly excited hydrogen atoms: Comparison of classical and quantum theory with experiment”, *Phys. Rep.*, **201**:1 (1991), 1–56.
- [8] U.-L. Pen, T. F. Jiang, “Strong-field effects of the one-dimensional hydrogen atom in momentum space”, *Phys. Rev. A*, **46**:7 (1992), 4297–4305.
- [9] A. López-Castillo, C. R. de Oliveira, “Classical ionization for the aperiodic driven hydrogen atom”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **15**:5 (2003), 859–869.
- [10] F. H. L. Essler, F. Gebhard, E. Jeckelmann, “Excitons in one-dimensional Mott insulators”, *Phys. Rev. B*, **64**:12 (2001), 125119, 15 pp.
- [11] F. Wang, Y. Wu, M. S. Hybertsen, T. F. Heinz, “Auger recombination of excitons in one-dimensional systems”, *Phys. Rev. B*, **73**:24 (2006), 245424, 5 pp.
- [12] V. Canuto, D. C. Kelly, “Hydrogen atom in intense magnetic field”, *Astrophys. Space Sci.*, **17**:2 (1972), 277–291.
- [13] H. Friedrich, H. Wintgen, “The hydrogen atom in a uniform magnetic field – an example of chaos”, *Phys. Rep.*, **183**:2 (1989), 37–79.
- [14] X. Guan, B. Li, K. T. Taylor, “Strong parallel magnetic field effects on the hydrogen molecular ion”, *J. Phys. B*, **36**:17 (2003), 3569–3590.
- [15] H. Ruder, G. Wunner, H. Herold, F. Geyer, *Atoms in Strong Magnetic Fields: Quantum Mechanical Treatment and Applications in Astrophysics and Quantum Chaos*, Springer, Berlin, 2012.
- [16] R. Barbieri, “Hydrogen atom in superstrong magnetic fields: Relativistic treatment”, *Nucl. Phys. A*, **161**:1 (1971), 1–11.
- [17] В. П. Крайнов, “Водородоподобный атом в сверхсильном магнитном поле”, *ЖЭТФ*, **64**:3 (1973), 800–803.
- [18] A. E. Shabad, V. V. Usov, “Positronium collapse and the maximum magnetic field in pure QED”, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:18 (2006), 180401, 4 pp.
- [19] A. E. Shabad, V. V. Usov, “Bethe–Salpeter approach for relativistic positronium in a strong magnetic field”, *Phys. Rev. D*, **73**:12 (2006), 125021, 16 pp.
- [20] A. E. Shabad, V. V. Usov, “Electric field of a pointlike charge in a strong magnetic field and ground state of a hydrogenlike atom”, *Phys. Rev. D*, **77**:2 (2008), 025001, 20 pp.
- [21] В. Н. Ораевский, А. И. Рез, В. Б. Семикоз, “Спонтанное рождение позитронов кулоновским центром в однородном магнитном поле”, *ЖЭТФ*, **72**:3 (1977), 820–833.
- [22] Б. М. Карнаков, В. С. Попов, “Атом водорода в сверхсильном магнитном поле и эффект Зельдовича”, *ЖЭТФ*, **124**:5 (2003), 996–1022.
- [23] М. И. Высоцкий, С. И. Годунов, “Критический заряд в сверхсильном магнитном поле”, *УФН*, **184**:2 (2014), 206–210.
- [24] J. Reinhardt, W. Greiner, “Quantum electrodynamics of strong fields”, *Rep. Progr. Phys.*, **40**:3 (1977), 219–295.
- [25] W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, *Quantum electrodynamics of strong fields*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [26] G. Plunien, B. Müller, W. Greiner, “The Casimir effect”, *Phys. Rep.*, **134**:2–3 (1986), 87–193.
- [27] В. М. Кулешов, В. Д. Мур, Н. Б. Нарожный, А. М. Федотов, Ю. Е. Лозовик, В. С. Попов, “Кулоновская задача с зарядом ядра $Z > Z_{cr}$ ”, *УФН*, **185**:8 (2015), 845.
- [28] J. Rafelski, J. Kirsch, B. Müller, J. Reinhardt, W. Greiner, “Probing QED vacuum with heavy ions”, [arXiv:1604.08690](https://arxiv.org/abs/1604.08690).
- [29] E. H. Wichmann, N. M. Kroll, “Vacuum polarization in a strong Coulomb field”, *Phys. Rev.*, **101**:2 (1956), 843–859.

- [30] M. Gyulassy, “Higher order vacuum polarization for finite radius nuclei”, *Nucl. Phys. A*, **244**:3 (1975), 497–525.
- [31] L. S. Brown, R. N. Cahn, L. D. McLerran, “Vacuum polarization in a strong Coulomb field. Induced point charge”, *Phys. Rev. D*, **12**:2 (1975), 581–595.
- [32] A. R. Neghabian, “Vacuum polarization for an electron in a strong Coulomb field”, *Phys. Rev. A*, **27**:5 (1983), 2311–2320.
- [33] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Springer, Berlin, 2012.
- [34] P. J. Mohr, G. Plunien, G. Soff, “QED corrections in heavy atoms”, *Phys. Rep. C*, **293**:5–6 (1998), 227–369.
- [35] T. C. Adorno, D. M. Gitman, A. E. Shabad, “Coulomb field in a constant electromagnetic background”, *Phys. Rev. D*, **93**:12 (2016), 125031, 19 pp.
- [36] К. А. Свешников, Д. И. Хомовский, “Частицы Шредингера и Дирака в квазиодномерных системах с “кулоновским” взаимодействием”, *ТМФ*, **173**:2 (2012), 293–313.
- [37] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973.
- [38] U. Fano, “Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts”, *Phys. Rev.*, **124**:6 (1961), 1866–1878.
- [39] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [40] K. Sveshnikov, “Dirac sea correction to the topological soliton mass”, *Phys. Lett. B*, **255**:2 (1991), 255–260.
- [41] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Weisskopf, “New extended model of hadrons”, *Phys. Rev. D*, **9**:12 (1974), 3471–3495.
- [42] F. Olver (ed.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [43] V. A. Yerokhin, P. Indelicato, V. M. Shabaev, “Two-loop QED corrections with closed fermion loops”, *Phys. Rev. A*, **77**:6 (2008), 062510, 12 pp.
- [44] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, т. 2, Мир, М., 1984.

Поступила в редакцию 15.12.2016,
после доработки 10.05.2017