Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Кононов, А. Ю. Морозов, Суперполиномы
в прямоугольных представлениях узла 4_1 , *ТМФ*, 2017,
том 193, номер 2, 256–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:01:46

© 2017 г. Я. А. Кононов^{*†}, А. Ю. Морозов^{‡§¶}

СУПЕРПОЛИНОМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УЗЛА 4_1

Недавно полученная формула дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ узла 4_1 в произвольном прямоугольном представлении $R = [r^s]$ переписана как сумма по всем поддиаграммам Юнга λ в R с удивительно простыми коэффициентами перед Z -факторами. Загадочным образом эти коэффициенты построены из квантовых размерностей симметрических представлений групп $SL(r)$ и $SL(s)$ и ограничивают суммирование диаграммами с не более чем s строками и r столбцами. При этом β -деформация к размерностям Макдональда дает полиномы с целыми положительными коэффициентами, являющиеся правдоподобными кандидатами на роль суперполиномов для прямоугольных представлений. И полиномиальность, и положительность коэффициентов неочевидны, однако верны. Это обобщает известные ранее формулы для симметрических представлений на произвольные прямоугольные. Дифференциальное разложение допускает введение дополнительных градуировок. Для узла-трилистника 3_1 , на который немедленно распространяются наши результаты для узла 4_1 , получается так называемая “четвертая градуировка” гиперполиномов. Свойства факторизации в корнях из единицы сохраняются даже в пятиградуированном случае.

Ключевые слова: полиномы узлов, суперполиномы, дифференциальное разложение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9327>

^{*}Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия. E-mail: yakononov@hse.ru

[†]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук, Черноголовка, Московская обл., Россия

[‡]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: morozov@itep.ru

[§]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ” (Московский инженерно-физический институт), Москва, Россия

[¶]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

1. ВВЕДЕНИЕ

Суперполиномы – это одна из основных загадок современной теоретической физики. Существует огромное число наблюдений, что они существуют, но, несмотря на значительные усилия двух последних десятилетий, нет ни ясного концептуального их определения, ни простого алгоритма для практических вычислений. В настоящей работе мы рассматриваем проблему с самых наивных точек зрения и сообщаем о небольшом продвижении, основанном на достижениях смежных областей.

История начинается с удивительного открытия, что средние от вильсоновских петель

$$H_R^K(A, q) = \left\langle \text{Tr}_R \text{Pexp} \oint_K \mathcal{A} \right\rangle \quad (1)$$

в трехмерной теории Черна–Саймонса [1], которые зависят только от топологии вложения $K \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, другими словами, от топологии узла K , являются полиномами Лорана с целыми коэффициентами, если их выразить через специальные переменные $q = e^{2\pi i/(k+N)}$ и $A = q^N$ вместо константы связи k и ранга калибровочной группы $SU(N)$. Этот факт объясняет название *полиномы узлов* [2] для H_R , а также для его различных частных случаев при специальных значениях A и q и обобщений на другие калибровочные группы. Полином H_R как таковой известен как полином ХОМФЛИ, *раскрашенный* диаграммой Юнга R , которая параметризует неприводимое представление группы $SU(N)$. Свойство целочисленности означает, что коэффициенты узла дают решение задачи подсчета некоторых объектов: эти коэффициенты могут равняться числу определенных физических состояний в некоторых струнных моделях [3], связанных с теорией Черна–Саймонса. В то же время в абстрактной программе категорификации они являются просто размерностями некоторых векторных пространств. Хотя K -теория позволяет “размерностям” быть отрицательными, было бы проще, если бы они были положительными – и это стало причиной поиска обобщений (уточнений) полинома H_R , которые бы имели положительные коэффициенты. Соглашение состоит в том, что суперполином $\mathcal{P}_R^K(A, q, t)$ имеет целые положительные коэффициенты и удовлетворяет условию редукции

$$\mathcal{P}_R^K(A, q, t)|_{t=-1} = H_R^K(A, q). \quad (2)$$

Зависящие от узла комплексы, для которых $\mathcal{P}$ и H являются соответственно полиномами Пуанкаре и Эйлера, построены явно в случае векторного представления $R = [1] = \square$ при фиксированном N [4], [5], но вычисления очень сложны технически при $N > 2$, и имеется очень мало продвижений для других представлений R . Существует интригующая возможность рассмотреть суперполиномы как p -адическое обобщение полиномов ХОМФЛИ [6]. На самом деле число дополнительных аргументов может быть больше двух, $q \rightarrow \{q, -qT\} \rightarrow \{q_i\}$ часто могут восприниматься как родственники параметров полиномов Керова, и по крайней мере трехпараметрическая деформация уже рассматривалась как в контексте суперполиномов [7], [8], так

Работа поддержана РФФИ (гранты № 15-51-52031-ННС_а, 15-52-50041-YaF, 16-51-53034-GFEN, 16-51-45029-Ind). Работа Я. А. Кононова также частично поддержана РФФИ (гранты № 16-01-00291 и 16-31-00484-мол_а) и фондом Саймонса. Работа А. Ю. Морозова также частично поддержана РФФИ (гранты № 16-02-01021, 15-31-20832-мол_а_вед).

и в контексте близко связанных с этой проблемой алгебр Динга–Иохары–Мики [9], [10]. Литература по суперполиномам и их физической интерпретации обширна (см., например, труды [11]–[29]).

Если сегодня и существует общепринятое определение суперполинома, то это полином $\mathcal{P}_R^K(\mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{t})$:

- 1) являющийся полиномом Лорана с целыми положительными коэффициентами,
- 2) превращающийся в полином ХОМФЛИ при $\mathbf{t} = -1$,
- 3) воспроизводящий полином Хованова–Джонса при $\mathbf{a} = \mathbf{q}^2$,
- 4) воспроизводящий полином Хованова–Рожанского при $\mathbf{a} = \mathbf{q}^N$.

Проблема с этим “определением” состоит в том, что определение Хованова – это явная, но специальная конструкция, чрезвычайно технически сложная и не связанная напрямую с “наилучшим” доступным концептуальным определением полиномов ХОМФЛИ – ни с помощью функционального интеграла и теории квантовых групп, ни с помощью различных рекурсий. В то время как полиномы ХОМФЛИ определены (по крайней мере мнемонически) в (1) как трехмерные топологические инварианты, конструкция Хованова строится в терминах диаграмм узла – проекций узла на двумерную плоскость, и топологическая инвариантность заменяется на инвариантность относительно движений Рейдемейстера, которая естественна для представлений кос, но всего лишь учитывается не полностью явным образом в подходе Хованова. Комплекс Хованова был построен с помощью гиперкуба цветов [4], [30], [31], и его прямая связь с квантовым $\mathcal{R}$ -матричным формализмом Решетихина–Тураева [32]–[34] ясна только при $N = 2$, когда можно использовать специальную $\mathcal{R}$ -матрицу Кауффмана [35]. Обобщение Хованова–Рожанского на случай $N > 2$ использует замысловатую технику матричных факторизаций, которую очень сложно использовать в практических вычислениях. В том числе и по этой причине, конструкция цветных суперполиномов до сих пор не ясна, особенно для непрямоугольных представлений.

Неудивительно, что постоянно ведутся поиски более простых и непосредственных определений суперполиномов и/или переформулировок исчисления полиномов ХОМФЛИ, которые позволили бы описать суперполиномы как естественную и недвусмысленную деформацию.

На продвинутом уровне это история о усовершенствованной теории Черна–Саймонса и, более общо, усовершенствованных топологических струнах, которая на сегодняшний день связана с переходом от алгебры петель Каца–Мури к квантовой тороидальной алгебре Динга–Иохары–Мики [10]. Однако приложения к теории узлов до сих пор исследуются. Реальная проблема здесь состоит в том, что теория узлов в подходящей формулировке почти тождественна теории представлений, но на самом деле немного более устойчива: в теории узлов возможны деформации, которые разрушают теоретико-представленческие структуры. Имеются два недавно полученных примера:

- 1) приложение универсальности Вожеля [36] к узлам (инварианты узлов в секторе E_8 содержат комбинации типа Виета корней некоторых универсальных полиномов вместо корней как таковых, которые представляют определенные квантовые размерности и поэтому обладают простыми универсальными выражениями, даже когда размерности не работают [37]);

2) выражения для полиномов узлов-кренделей через билинейные комбинации матриц Рака ($6j$ -символов) [38], которые обладают красивой β -деформацией [26], что неверно для самих $6j$ -символов.

Создается ощущение, что полиномы узлов отражают некоторую “правильную” часть теории представлений, но ее точное определение остается интересной задачей, а отсутствие ее решения оказывается возможным источником проблем с разумным и конструктивным определением супер- и гиперполиномов.

На наивном уровне мы пытаемся построить деформацию полиномов ХОМФЛИ в суперполиномы для определенных семейств узлов. Если существует какая-либо каноническая конструкция такого типа, работающая для всех узлов, она должна выявить и учесть зависимость полиномов ХОМФЛИ от представления, поскольку считается, что в любом представлении суперполиномы содержат больше информации об узле, чем полиномы ХОМФЛИ; баланс восстанавливается (если это вообще имеет место), только при рассмотрении полного набора полиномов для всех представлений.

В настоящей работе мы сообщаем о новых результатах в наиболее обещающем подходе такого типа – подходе, основанном на дифференциальном разложении [8], [11], [17], [39]–[41]. Идея состоит в том, что цветные полиномы ХОМФЛИ могут быть разложены по степеням дифференциалов

$$D_n = \{Aq^n\} = Aq^n - \frac{1}{Aq^n},$$

и эти разложения лучше отражают зависимость от представления, чем исходные полиномы. Более того, дифференциалы D_n напрямую связаны с дифференциалами в комплексах Хованова–Рожанского [11], и этот формализм существенно упрощает переход к суперполиномам. Метод лучше всего работает для семейства твистованных узлов (см. ниже), где он позволяет описать полностью полиномы ХОМФЛИ и суперполиномы в произвольном симметрическом представлении и вывести различные рекуррентные соотношения по R , что служит моделью для более сложных узлов и зацеплений. Сложность структуры дифференциального разложения регулируется так называемым дефектом [41], который равен уменьшенной на единицу степени по q^2 фундаментального полинома Александра в топологическом оснащении. Твистованные узлы выделены тем, что они имеют нулевой дефект, и структура дифференциального разложения усиливается: оно записывается через Z -факторы, которые представляют собой билинейные комбинации $Z_{n|m} = D_n D_{-m} = \{Aq^n\}\{A/q^m\}$ и обладают простой β -деформацией $\mathcal{Z}_{n|m} = \{Aq^n\}\{A/t^m\}$. Здесь и далее используется обозначение $\{x\} := x - x^{-1}$.

В настоящей работе мы применяем недавно найденные полиномы ХОМФЛИ во всех прямоугольных представлениях и их дифференциальное разложение для узла восьмерки 4_1 [42] с целью сформулировать гипотезу о соответствующих суперполиномах твистованных узлов в прямоугольных представлениях, которая согласуется с различными предыдущими наблюдениями. Также в этом контексте становится очевидной четвертая градуировка [7], которая естественно встраивается в формализм дифференциального разложения [8].

Было бы желательно сравнить наши методы с альтернативными подходами, использующими s -факторы [13], двойную аффинную алгебру Гекке (как часть алгебры Динга–Иохары–Мики) [14], [25], [24], алгебры Верлинде [12], T -деформированные

$\mathcal{R}$ -матрицы [43], [44] и т. д., но такие сильные результаты пока не получены. Надеемся, что наша работа приведет к прогрессу в этих направлениях. Также интересны обобщения на другие узлы с нулевым дефектом. Действительно сложным остается случай ненулевых дефектов, и особенно непрямоугольных представлений, где структура дифференциального разложения остается смутной, и иногда само существование суперполиномов ставится под сомнение (см. работы [45]–[47] для описания простейших случаев $R = [21]$ и $R = [31]$). И последнее, но немаловажное: редукция суперполиномов к конечному N и различие между редуцированными и нередуцированными суперполиномами до сих пор не улавливается средствами дифференциального разложения, поэтому в настоящей работе мы имеем дело только с приведенными суперполиномами при общем значении параметра A .

Основные результаты работы – формулы (13) и (21). Первая представляет собой сильную и вдохновляющую переформулировку недавнего результата работы [42], которая основана на забавной формуле разложения биномиальных коэффициентов (9), специальной для случая прямоугольных представлений. Второе выражение – непосредственный, хоть и нетривиальный, подъем до суперполиномов. В дополнение к этому мы обсуждаем две дополнительные градуировки (одна из них связана с исследованиями из работам [7] и [8]), которые сохраняют свойства факторизации полиномов и заслуживают дальнейшего изучения.

2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХОМФЛИ УЗЛОВ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Дифференциальное разложение может рассматриваться как q -деформация формулы для специальных полиномов [13], [48], возникающих из полиномов ХОМФЛИ в пределе $q = 1$: для любого узла $\mathcal{K}$ и любого представления R

$$H_R^{\mathcal{K}}(A, q)|_{q=1} = (H_{\square}^{\mathcal{K}}(A, q))^{|R|}|_{q=1}. \quad (3)$$

Более того, в топологическом оснащении редуцированные полиномы ХОМФЛИ обращаются в единицу при $A = q^{\pm 1}$, что влечет соотношение

$$H_{\square}^{\mathcal{K}}(A, q) = 1 + F_{\square}^{\mathcal{K}}(A, q) \cdot \{Aq\}\{A/q\}, \quad (4)$$

где $F_{\square}^{\mathcal{K}}(A, q)$ – некоторые полиномы Лорана, которые для узла-восьмерки $\mathcal{K} = 4_1$ равны единице. В частности, специальный полином узла-восьмерки имеет вид

$$H_R^{4_1}(A, q)|_{q=1} = (1 + \{A\}^2)^{|R|} = \sum_{k=0}^{|R|} \binom{|R|}{k} \{A\}^{2k}. \quad (5)$$

В дифференциальном разложении [8], [17], [39], [41] не зависящие от q множители $\{A\}^{2k}$ и биномиальные коэффициенты заменяются на более сложные зависящие от представления k -линейные комбинации Z -факторов $Z_{i|j} = \{Aq^i\}\{A/q^j\}$ с коэффициентами, зависящими от q . Структура этой деформации сильно зависит от величины “дефекта” узла [41], которая загадочным образом регулируется степенью полинома Александра $H_{\square}^{\mathcal{K}}(A, q)|_{A=1}$, возникающего из полинома ХОМФЛИ при $A = 1$, и это до конца не изучено.

Наибольший прогресс на данный момент состоит в недавно предложенной формуле [42] дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ для узла 4_1 в прямоугольных представлениях:

$$\begin{aligned}
 H_{[r^s]}^{4_1}(A, q) = & \sum_{F=0}^{\min(r,s)} \sum_{\substack{0 \leq a_F < \dots < a_1 < r, \\ 0 \leq b_F < \dots < b_1 < s}} \prod_{f' < f''}^F \left(\frac{[a_{f'} - a_{f''}][b_{f'} - b_{f''}]}{[a_{f'} + b_{f''} + 1][a_{f''} + b_{f'} + 1]} \right)^2 \times \\
 & \times \prod_{f=1}^F \left(h^{a_f + b_f + 1} \left(\frac{[a_f + b_f]!}{[a_f]![b_f]!} \right)^2 \frac{[r + b_f]![s + a_f]!}{[r - 1 - a_f]![s - 1 - b_f]!([a_f + b_f + 1]!)^2} \times \right. \\
 & \left. \times \prod_{i_f = -b_f}^{a_f} \{Aq^{r+i_f}\} \{Aq^{i_f-s}\} \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

и ее дальнейших обобщениях на произвольные твистованные узлы [49]. Для удобства мы вводим здесь четвертый градуировочный параметр h [7], [8], который подсчитывает число Z -факторов; для полиномов ХОМФЛИ $h = 1$. Квантовые числа определены как $[x] = \frac{\{q^x\}}{\{q\}} = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$.

Наша основная задача – выявление структуры этого сложного выражения и запись его в очень простой форме (13).

Первое наблюдение состоит в том, что сумма в (6) на самом деле является суммой по диаграммам Юнга λ , которые являются поддиаграммами в прямоугольной диаграмме $R = [r^s]$:

$$H_{[r^s]}^{4_1}(A, q) \stackrel{(6)}{=} \sum_{\lambda \subset [r^s]} h^{|\lambda|} \mathcal{C}_{\lambda}^{[r^s]}(q) Z_{r|s}^{\lambda}(A, q), \tag{7}$$

где зависящие от A множители $Z_{r|s}^{\lambda}$, подчеркнутые в (6), суть произведения “сдвинутых” Z -факторов:

$$Z_{r|s}^{\lambda}(A, q) = \prod_{\square \in \lambda} Z_{r|s}^{a'(\square) - l'(\square)} = \prod_{\square \in \lambda} \{Aq^{r+a'(\square) - l'(\square)}\} \{Aq^{-s+a'(\square) - l'(\square)}\}. \tag{8}$$

Второе наблюдение состоит в том, что зависящие от A коэффициенты $\mathcal{C}_{\lambda}$ имеют очень простой вид. Чтобы объяснить это, необходимо вернуться к (5) и разложить биномиальные коэффициенты в виде сумм по диаграммам Юнга. А именно, для факторизованного $|R| = rs$ имеет место замечательное разложение

$$\binom{rs}{k} = \frac{(rs)!}{k!(rs-k)!} = \sum_{|\lambda|=k} d_{\lambda^{\text{tr}}}(r) d_{\lambda}(s), \tag{9}$$

где

$$d_{\lambda}(N) = \prod_{\square \in \lambda} \frac{N - l'(\square) + a'(\square)}{a(\square) + l(\square) + 1} \tag{10}$$

Рис. 1

есть размерность представления λ алгебры Ли sl_N , а числа a, l, a' и l' для клетки $\square$ диаграммы Юнга равны количеству строк и столбцов справа, снизу, слева и сверху от клетки, как показано на рис. 1.

Простейшие частные случаи соотношения (9) таковы:

$$\begin{aligned} \binom{rs}{2} &= \binom{r+1}{2} \binom{s}{2} + \binom{r}{2} \binom{s+1}{2} = d_{[2]}(r) d_{[11]}(s) + d_{[11]}(r) d_{[2]}(s), \\ \binom{rs}{3} &= \binom{r+2}{3} \binom{s}{3} + 4 \binom{r+1}{3} \binom{s+1}{3} + \binom{r}{3} \binom{s+2}{3} = \\ &= d_{[3]}(r) d_{[111]}(s) + d_{[21]}(r) d_{[21]}(s) + d_{[111]}(r) d_{[3]}(s). \end{aligned}$$

Легко проверить, что при $q = 1$ замысловатые коэффициенты в (6) даются в точности этими формулами.

Разложение (9) следует из тождества Коши, записанного в виде

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-h)^k p_k \bar{p}_k}{k}\right) = \sum_{\lambda} h^{|\lambda|} \text{Schur}_{\lambda^{\text{tr}}}\{p\} \text{Schur}_{\lambda}\{\bar{p}\}, \quad (11)$$

где $\text{Schur}_{\lambda}\{\cdot\}$ – полиномы Шура и все $p_k = r$ и $\bar{p}_k = s$. В самом деле, для этого выбора переменных-времен

$$\text{Schur}_{\lambda}\{p\} = d_{\lambda}(r), \quad \text{если } p_k = r, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

и тождество сводится к

$$(1+h)^{rs} = \sum_{\lambda} h^{|\lambda|} d_{\lambda^{\text{tr}}}(r) d_{\lambda}(s).$$

Теперь ясно, что является q -деформацией: квантовая версия (12) есть

$$S_{\lambda}^*(N|q) = \text{Schur}_{\lambda}\{p\} \Big|_{p_k=p_k^*} = D_{\lambda}(N),$$

где переменные-времена ограничены на топологический локус

$$p_k^* = \frac{\{A^k\}}{\{q^k\}} \stackrel{A=q^N}{=} \frac{[Nk]}{[k]}$$

и $D_\lambda(N)$ суть квантовые размерности представлений λ квантовой группы $U_q(sl_N)$:

$$D_\lambda(N) = \prod_{\square \in \lambda} \frac{[N - l'(\square) + a'(\square)]}{[a(\square) + l(\square) + 1]}.$$

Удивительно или нет, но эта квантовая деформация воспроизводит не зависящие от q коэффициенты в (6), и это приводит к простой и явной форме соотношения (7):

$$H_{[r^s]}^{4_1}(A, q) \stackrel{(6)}{=} \sum_{\lambda \subset [r^s]} h^{|\lambda|} D_{\lambda^{\text{tr}}}(r) D_\lambda(s) Z_{r|s}^\lambda(A, q), \quad (13)$$

где Z -факторы заданы в (8).

Так как $D_{\lambda^{\text{tr}}}(N|q) = D_\lambda(N, q^{-1})$ и $Z_{r|s}^{\lambda^{\text{tr}}}(A, q) = Z_{s|r}^\lambda(A, q^{-1})$, мы получаем обычное свойство симметрии $H_{[r^s]}(A, q) = H_{[s^r]}(A, q^{-1})$. А поскольку $D_\lambda(r) = 0$ для всех диаграмм Юнга λ с более чем r столбцами, сумма в (13) автоматически обрывается, т. е. идет по диаграммам Юнга λ с не более чем r столбцами и s строками, другими словами, по поддиаграммам исходной прямоугольной диаграммы Юнга $R = [r^s]$.

В немного более абстрактной формулировке тождество Коши есть хорошо известное разложение $GL(V) \times GL(W)$ -модуля

$$\Lambda_h^*(V \otimes W) = \sum_{\lambda} h^{|\lambda|} S_{\lambda} V \otimes S_{\lambda^t} W, \quad (14)$$

и классические размерности суть просто $d_\lambda(N) = \dim S_\lambda(\mathbb{C}^N)$. А если мы рассмотрим $x = q^r$, $y = q^s$ как эквивариантные параметры и $\{x\}$ – как К-теоретический А-род [9], то

$$H_{[r^s]}^{4_1}(A, q) \stackrel{(13)}{=} 1 + \sum_{\lambda} h^{|\lambda|} \prod_{\square \in \lambda} \frac{\{xq^{a'_{\square}-l'_{\square}}\}\{yq^{l'_{\square}-a'_{\square}}\}}{\{q^{a_{\square}+l_{\square}+1}\}\{q^{a_{\square}+l_{\square}+1}\}} \{Axq^{l'_{\square}-a'_{\square}}\}\{Ay^{-1}q^{l'_{\square}-a'_{\square}}\}$$

есть на самом деле формула неподвижных точек Лефшеца [50], примененная к определенному пучку на схеме Гильберта (неподвижные точки действия тора параметризуются диаграммами Юнга). Это означает, что все полиномы ХОМФ.ЛИ в прямоугольных представлениях могут быть выведены из (q, q) -эквивариантной эйлеровой характеристики определенного пучка (универсального для всех представлений).

Теперь естественно рассмотреть (q, t) -эквивариантную эйлерову характеристику, т. е. снять условие $t = q$ и наложить $t = q^\beta$.

3. β -ДЕФОРМАЦИЯ

Универсальная составляющая β -деформации дифференциального разложения состоит в замене Z -факторов $Z_{r|s}^{(i|j)} = \{Aq^{r+i-j}\}\{Aq^{-s+i-j}\}$ на

$$\begin{aligned} Z_{r|s}^{(i|j)}(A, q, t) &= \left\{ \frac{Aq^{r+i}}{t^j} \right\} \left\{ \frac{Aq^i}{t^{s+j}} \right\} = \\ &= (-1)^{r+1} \left(\mathbf{a}^2 \mathbf{q}^{r-s+2i-2j} \mathbf{t}^{r+2i+1} + \mathbf{q}^{r+s} \mathbf{t}^r + \frac{1}{\mathbf{q}^{r+s} \mathbf{t}^r} + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{q}^{r-s+2i-2j} \mathbf{t}^{r+2i+1}} \right), \quad (15) \end{aligned}$$

которая с точностью до общего знака дает положительный полином Лорана в переменных Данфилда–Гукова–Расмуссена [11]

$$\mathbf{q} = t, \quad \mathbf{t} = -\frac{q}{t}, \quad \mathbf{a} = A\sqrt{\frac{t}{q}}. \quad (16)$$

Для сдвинутых Z -факторов (8) сдвиги i и j определены как a' и l' соответственно, и (15) влечет замену

$$Z_{r|s}^\lambda(A, q) \rightarrow \mathcal{Z}_{r|s}^\lambda(A, q, t) = \prod_{\square \in \lambda} \mathcal{Z}_{r|s}^{(a'_\square | l'_\square)} = \prod_{\square \in \lambda} \left\{ \frac{Aq^{r+a'_\square}}{t^{l'_\square}} \right\} \left\{ \frac{Aq^{a'_\square}}{t^{s+l'_\square}} \right\}. \quad (17)$$

Неочевидной является деформация коэффициентов перед Z -факторами. В работе [17] в случае узла-восьмерки было предложено переписать формулы для симметрических полиномов ХОМФЛИИ в виде, в котором все коэффициенты равны единице:

$$\begin{aligned} H_{[r]}^{4_1}(A, q) &= 1 + \sum_{k=1}^r \frac{[r]!}{[k]![r-k]!} \prod_{i=0}^{k-1} \{Aq^{r+1}\} \{Aq^{i-1}\} = \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r} Z_{i_1}(A) Z_{i_2}(Aq) \dots Z_{i_k}(Aq^{k-1}); \end{aligned}$$

соответствующие Z -факторы суть $Z_i(A) = \{Aq^{2(r-i)+1}\} \{A/q\}$. В силу $r-i \geq 0$ они естественно деформируются как $Z_i(A) \rightarrow \mathcal{Z}_i(A) = \{Aq^{2(r-i)+1}\} \{A/t\}$, а деформация (симметрический суперполином) – это просто

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{[r]}^{4_1}(A, q, t) &= \sum_{k=0}^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r} \mathcal{Z}_{i_1}(A) \mathcal{Z}_{i_2}(Aq) \dots \mathcal{Z}_{i_k}(Aq^{k-1}) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^r \underbrace{\frac{[r]_q!}{[k]_q![r-k]_q!}}_{M_{[1^k]}^{t^{-1}, q^{-1}}(A)|_{A=t^s}} \prod_{i=0}^{k-1} \{Aq^{r+i}\} \{Aq^i/t\}, \end{aligned} \quad (18)$$

т. е. биномиальные коэффициенты остаются нетронутыми (имеют вид отношения q -чисел), в то время как t появляется только в $\mathcal{Z}$. Наоборот, для кососимметрических представлений биномиальные коэффициенты составлены полностью из t -чисел:

$$\mathcal{P}_{[1^s]}^{4_1}(A, q, t) = 1 + \sum_{k=1}^s \underbrace{\frac{[s]_t!}{[k]_t![s-k]_t!}}_{M_{[1^k]}^{q, t}(A)|_{A=t^s}} \prod_{i=0}^{k-1} \left\{ \frac{A}{t^{s+1}} \right\} \left\{ \frac{Aq}{t^i} \right\}. \quad (19)$$

В этих формулах мы показали также, что биномиальные коэффициенты выражаются через размерности Макдональда $M_R^{q, t}(A)$ – значения полиномов Макдональда

$M_R^{q,t}\{p\}$ на топологическом локусе $p_k = p_k^*(A, t) := \{A^k\}/\{t^k\}$,

$$\begin{aligned}
 M_{[1]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}}{\{t\}}, \\
 M_{[2]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{Aq\}}{\{t\}\{qt\}}, & M_{[11]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{A/t\}}{\{t\}\{t^2\}}, \\
 M_{[3]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{Aq\}\{Aq^2\}}{\{t\}\{qt\}\{q^2t\}}, & M_{[21]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{Aq\}\{A/t\}}{\{t\}^2\{qt^2\}}, \\
 M_{[111]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{A/t\}\{A/t^2\}}{\{t\}\{t^2\}\{t^3\}}, \\
 M_{[4]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{Aq\}\{Aq^2\}\{Aq^3\}}{\{t\}\{qt\}\{q^2t\}\{q^3t\}}, & M_{[31]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{Aq\}\{Aq^2\}\{A/t\}}{\{t\}^2\{qt\}\{q^2t^2\}}, \\
 M_{[22]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{Aq\}\{A/t\}\{Aq/t\}}{\{t\}\{t^2\}\{qt\}\{qt^2\}}, \\
 M_{[211]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{Aq\}\{A/t\}\{A/t^2\}}{\{t\}^2\{t^2\}\{qt^3\}}, & M_{[1111]}^{q,t}(A) &= \frac{\{A\}\{A/t\}\{A/t^2\}\{A/t^3\}}{\{t\}\{t^2\}\{t^3\}\{t^4\}}
 \end{aligned} \tag{20}$$

и т. д. Заметим, что суммы в обоих выражениях (18) и (19) для симметрических и косимметрических представлений $R = [r]$ и $R = [1^s]$ содержат только диаграммы с одним столбцом $[1^k]$, но отличаются заменой $(q, t) \rightarrow (t^{-1}, q^{-1})$, которой также подвергаются значения времен p_k^* , эта замена сделана напрямую в (20). Также следует отметить, что она естественна с точки зрения формулы преобразования полиномов Макдональда

$$M_{\lambda^{\text{tr}}}^{q,t}\{p_k\} = M_{\lambda}^{t^{-1}, q^{-1}}\left(-\frac{\{t^k\}}{\{q^k\}}p_k\right) \prod_{\square \in \lambda} \left(-\frac{\{q^{\square} t^{a_{\square}+1}\}}{\{q^{l_{\square}+1} t^{a_{\square}}\}}\right),$$

которая имеет простейший вид для полиномов Шура,

$$\text{Schur}_{\lambda^{\text{tr}}}\{p_k\} = (-1)^{|\lambda|} \text{Schur}_{\lambda}\{-p_k\},$$

следовательно,

$$D_{\lambda^{\text{tr}}}(N|q) = D_{\lambda^{\text{tr}}}(N|q^{-1}) = (-1)^{|\lambda|} D_{\lambda}(-N|q).$$

Соединяя это наблюдение с новым выражением (13) для комбинаторных коэффициентов, легко угадать формулу β -деформации всех полиномов ХОМФЛИ для прямоугольных представлений. В сокращенных обозначениях предположение состоит в следующем:

$$\mathcal{P}_{[rs]}^{4_1}(A, q, t) = \sum_{\lambda \subset [rs]} h^{|\lambda|} \mathcal{M}_{\lambda^{\text{tr}}}(r) \mathcal{M}_{\lambda}(s) \mathcal{Z}_{r|s}^{\lambda}, \tag{21}$$

где $\mathcal{Z}$ -факторы взяты из правой части (17). Более явно,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{[r^s]}^{4_1}(A, q, t) &= \sum_{\lambda} h^{|\lambda|} \overbrace{M_{\lambda^{\text{tr}}}^{t^{-1}, q^{-1}}(A)|_{A=q^r}}^{\mathcal{M}_{\lambda^{\text{tr}}}(r)} \overbrace{M_{\lambda}^{q, t}(A)|_{A=t^s}}^{\mathcal{M}_{\lambda}(s)} \mathcal{Z}_{r|s}^{\lambda} = \\
 &= \sum_{k=1}^p h^{|\lambda|} M_{\lambda^{\text{tr}}}^{t^{-1}, q^{-1}}(p_i)|_{p_i=\{q^{-ri}\}/\{q^{-i}\}} M_{\lambda}^{q, t}(p_i)|_{p_i=\{t^{si}\}/\{t^i\}} \mathcal{Z}_{r|s}^{\lambda} = \\
 &= 1 + \sum_{\lambda \subset [r^s]} h^{|\lambda|} \underbrace{\prod_{\square \in \lambda} \frac{\{q^{r-a'_{\square}} t^{l'_{\square}}\} \{t^{s-l'_{\square}} q^{a'_{\square}}\}}{\{t^{l_{\square}} q^{a_{\square}+1}\} \{t^{l_{\square}+1} q^{a_{\square}}\}} \{A q^{r+a'_{\square}} t^{-l'_{\square}}\} \{A q^{a'_{\square}} t^{-s-l'_{\square}}\}}_{\text{contr}_{\lambda}}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Знак $\mathcal{Z}$ -фактора, происходящий из $(-1)^{r+1}$ в (15), компенсируется в точности тем же знаком, возникающим в $\mathcal{M}_{\lambda^{\text{tr}}}(r)$ после замены (16). Более серьезный вопрос состоит в том, что в отличие от квантовых размерностей $D_{\lambda}(N|q)$ размерности Макдональда $\mathcal{M}_{\lambda}(N|q)$ не являются полиномами Лорана даже для конкретных значений N . Удивительно или нет, но знаменатели исчезают после суммирования по всем поддиаграммам λ (на самом деле они исчезают в каждом порядке по $|\lambda|$), и (22) всегда является полиномом (Лорана), положительным в переменных Данфилда–Гукова–Расмуссена (16)! Уравнение (22) воспроизводит все ранее предложенные формулы цветных супер- и гиперполиномов узла 4_1 (а также узла 3_1) с единственным исключением, которое можно найти в [26] (которое, однако, отклоняется от общепринятого ответа в фундаментальном представлении с $r = s = 1$).

4. ПОЛИНОМИАЛЬНОСТЬ

Чтобы продемонстрировать полиномиальность, стоит привести пару примеров. В случае представления $R = [2]$ вклад (contr) дают три поддиаграммы:

$$\text{contr}_{[\]} = 1,$$

$$\text{contr}_{[1]} = [2]_q \{Aq^2\} \{A/t\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{a}^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{t}^4 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{t}^4} + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}^2 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}^2} + \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^3 + \frac{1}{\mathbf{q}^4 \mathbf{t}^3} + \mathbf{q}^2 \mathbf{t} + \frac{1}{\mathbf{q}^2 \mathbf{t}},$$

$$\text{contr}_{[2]} = \{Aq^2\} \{A/t\} \{Aq^3\} \{Aq/t\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \mathbf{a}^4 \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^8 + \frac{1}{\mathbf{a}^4 \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^8} + \mathbf{a}^2 \mathbf{q}^6 \mathbf{t}^7 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{q}^6 \mathbf{t}^7} + \mathbf{a}^2 \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^5 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^5} + \\
 &+ \frac{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}}{\mathbf{q}^2} + \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}} + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}^3 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}^3} + \mathbf{q}^6 \mathbf{t}^4 + \frac{1}{\mathbf{q}^6 \mathbf{t}^4} + \mathbf{q}^2 \mathbf{t}^2 + \frac{1}{\mathbf{q}^2 \mathbf{t}^2} + 2.
 \end{aligned}$$

Существует в точности одна диаграмма в каждом порядке $|\lambda|$, так что каждый из этих вкладов как таковой есть положительный полином.

В случае представления $R = [2, 2]$ уже шесть поддиаграмм дают ненулевой вклад в сумму:

$$\text{contr}_{[\]} = 1,$$

$$\text{contr}_{[1]} = [2]_q [2]_t \{Aq^2\} \{A/t^2\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \mathbf{a}^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{t}^4 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{t}^4} + \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}^2} + \frac{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}^2}{\mathbf{q}^2} + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}^4 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}^4} + \mathbf{a}^2 \mathbf{t}^2 + \frac{1}{\mathbf{a}^2 \mathbf{t}^2} + \mathbf{q}^6 \mathbf{t}^3 + \\
 &+ \frac{1}{\mathbf{q}^6 \mathbf{t}^3} + \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^3 + \frac{1}{\mathbf{q}^4 \mathbf{t}^3} + \mathbf{q}^4 \mathbf{t} + \frac{1}{\mathbf{q}^4 \mathbf{t}} + \mathbf{q}^2 \mathbf{t} + \frac{1}{\mathbf{q}^2 \mathbf{t}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{contr}_{[2]} &= [2]_t \frac{\{qt^2\}}{\{qt\}} \{Aq^3\} \{Aq^2\} \{Aq/t^2\} \left\{ A/t^2 \right\} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{(q^2+1)(q^3t-1)(q^3t+1)(a^2t+q^4)(a^2t^3+q^2)(a^2q^4t^5+1)(a^2q^6t^7+1)}{a^4q^{10}t^8(q^2t-1)(q^2t+1)}, \\
\text{contr}_{[1,1]} &= [2]_q \frac{\{q^2t\}}{\{qt\}} \{Aq^2\} \{Aq^2/t\} \{A/t^2\} \{A/t^3\} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{(q^2t^2+1)(q^3t^2-1)(q^3t^2+1)(a^2t+q^4)(a^2t+q^6)(a^2q^2t^5+1)(a^2q^4t^5+1)}{a^4q^{10}t^8(q^2t-1)(q^2t+1)}, \\
\text{contr}_{[2,1]} &= [2]_q [2]_t \{Aq^2\} \{A/t^2\} \{Aq/t^2\} \{Aq^2/t\} \{A/t^3\} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{(q^2+1)(q^2t^2+1)(a^2t+q^4)(a^2t+q^6)(a^2t^3+q^2)(a^2q^2t^5+1)(a^2q^4t^5+1)(a^2q^6t^7+1)}{a^6q^{14}t^{12}}, \\
\text{contr}_{[2,2]} &= \{Aq^2\} \{A/t^2\} \{Aq^3\} \{Aq/t^2\} \{Aq^2/t\} \{A/t^3\} \{Aq^3/t\} \{Aq/t^3\} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{(a^2t+q^4)(a^2t+q^6)(a^2t^3+q^2)(a^2t^3+q^4)(a^2q^2t^5+1)(a^2q^4t^5+1)(a^2q^4t^7+1)(a^2q^6t^7+1)}{a^8t^{16}q^{16}}.
\end{aligned}$$

Две из них имеют одинаковый порядок $|[2]| = |[1,1]|$, и их индивидуальные вклады содержат неположительные множители как в числителе, так и в знаменателе. Однако после суммирования они дают положительный полином. Более того, они дают полином, если их сложить с произвольными коэффициентами $c_{[2]}$ и $c_{[11]}$ при условии

$$c_{[2]} - c_{[11]} \sim \{qt\}. \quad (23)$$

5. ПЛЕТИСТИЧЕСКИЙ ЛОГАРИФМ РЯДА

Все прямоугольные суперполиномы узла-восьмерки получаются из универсального ряда:

$$\begin{aligned}
K^{4_1} &:= 1 + \sum_{\lambda} h^{|\lambda|} \prod_{\square \in \lambda} \frac{\{xq^{-a'_{\square}}t^{l'_{\square}}\}}{\{t'_{\square}q^{a_{\square}+1}\}} \frac{\{yt^{-l'_{\square}}q^{a'_{\square}}\}}{\{t^{l'_{\square}+1}q^{a_{\square}}\}} \{Axq^{a'_{\square}}t^{-l'_{\square}}\} \{Aq^{a'_{\square}}y^{-1}t^{-l'_{\square}}\} = \\
&= 1 + h \frac{\{x\}\{y\}}{\{q\}\{t\}} \{Ax\} \{A/y\} + \\
&\quad + h^2 \left(\frac{\{x\}\{x/q\}\{y\}\{yq\}}{\{q\}\{q^2\}\{t\}\{qt\}} \{Ax\} \{Axq\} \{A/y\} \{Aq/y\} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\{x\}\{xt\}\{y\}\{y/t\}}{\{t\}\{t^2\}\{q\}\{qt\}} \{Ax\} \{Ax/t\} \{A/y\} \{A/(yt)\} \right) + O(h^3).
\end{aligned}$$

Суперполиномы $\mathcal{P}_{[r^s]}^{4_1}$ получаются в частном случае K при $x = q^r$, $y = t^s$. Оказывается, что этот ряд есть симметрическая степень (плетистическая экспонента) более простого ряда L :

$$K(x, y, A, q, t, h) = \text{Sym}^*(L) := \exp \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{L(x^d, y^d, A^d, q^d, t^d, h^d)}{d} \right). \quad (24)$$

Если раскрыть все скобки $\{\cdot\}$, то разложение K с точностью до h^3 содержит более чем 900 членов. В то же время его плетистический логарифм L гораздо проще:

$$L^{4_1} = \frac{\{x\}\{y\}\{Ax\}\{A/y\}}{\{q\}\{t\}} \times \\ \times \left[h - h^2(\alpha + \alpha^{-1}) + \right. \\ \left. + h^3 \left(\alpha^2(q^2 + t^{-2} - x^2 - y^{-2}) - \frac{\alpha q}{t}(x^{-2} + y^2) + 1 - \frac{t}{\alpha q}(x^2 + y^{-2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\alpha^2}(q^{-2} + t^2 - x^{-2} - y^2) \right) - O(h^4) \right], \quad \alpha = \frac{A^2 q}{t}.$$

Было бы интересно найти значение и общий член этого нового разложения.

6. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ СУПЕРПОЛИНОМЫ УЗЛА-ТРИЛИСТНИКА

Узел-восьмерка есть простейший представитель семейства твистованных узлов, которые все имеют нулевой дефект и поэтому обладают сравнительно несложным дифференциальным разложением. Различие между твистованными узлами состоит в том, что вклад каждой диаграммы $\lambda \subset R$ содержит дополнительный множитель F_λ , который был найден в (косо)симметрических представлениях в работе [39] и продолжен на произвольные прямоугольные представления в [49].

Поиск β -деформации F -множителей является отдельной проблемой, но в частном случае трилистника 3_1 – другого члена семейства твистованных узлов – эта проблема решается очень просто. В этом случае множители $F_\lambda^{3_1}$ и их β -деформации являются мономами. Ответ для симметрических представлений был известен еще из работ [13], [17], [39], и обобщение новой формулы (21) на случай узла 3_1 выглядит как

$$\mathcal{P}_{[r^s]}^{3_1}(A, q, t) = \sum_{\lambda \subset [r^s]} h^{|\lambda|} \underbrace{\left(-\frac{A^2 q}{t} \right)^{|\lambda|} \left(\prod_{\square \in \lambda} q^{2a_\square} t^{-2l_\square} \right)}_{\mathcal{F}_\lambda^{3_1}} \mathcal{M}_{\lambda^{\text{tr}}}(r) \mathcal{M}_\lambda(s) \mathcal{Z}_{r|s}^\lambda. \quad (25)$$

Подобно случаю узла 4_1 , эта формула воспроизводит положительные полиномы Лорана, несмотря на то, что отдельные члены в сумме не полиномиальны. В примере раздела 4 это выполняется, потому что условие (23) обеспечивается множителями $c_{[2]} = \mathcal{F}_{[2]}^{3_1}$ и $c_{[11]} = \mathcal{F}_{[11]}^{3_1}$. Подобный критерий может быть использован для нахождения β -деформации F -множителей из [49] для всех остальных твистованных узлов.

Важно заметить, что 3_1 – не только твистованный, но и торический узел, так что наш результат можно сравнить с торическими гиперполиномами из [14] и их 4-градуированных обобщениями из [7], которые гипотетически в прямоугольных представлениях R дают верные суперполиномы (т. е. должны совпадать с будущими вычислениями в рамках подхода Ховановского). Результат этого сравнения положительный: формула (25) воспроизводит полиномы Чередника [14] и их обобщения.

В случае полиномов Чередника достаточно совершить подстановку $A^2 \rightarrow -A^2$. Чтобы воспроизвести 4-градуированные гомологии узлов из [7] для узлов 3_1 и 4_1 , необходимо вставить дополнительный параметр σ в дифференциалы, т. е. дополнительно деформировать Z -факторы, оставляя коэффициенты нетронутыми:

$$\mathcal{P}_{[r^s]}^{3_1}(A, q, t) = \sum_{\lambda \subset [r^s]} h^{|\lambda|} \underbrace{\left(-\frac{A^2 q}{t}\right)^{|\lambda|} \left(\prod_{\square \in \lambda} q^{2a_{\square}} t^{-2l_{\square}}\right)}_{\mathcal{F}_{\lambda}^{3_1}} \mathcal{M}_{\lambda^{\text{tr}}}(r) \mathcal{M}_{\lambda}(s) \times \prod_{\square \in \lambda} \left\{ \frac{A q^{r+a'_{\square}}}{\sigma t^{l'_{\square}}} \right\} \left\{ \frac{A q^{a'_{\square}} \sigma}{t^{s+l'_{\square}}} \right\}. \quad (26)$$

Затем следует сделать замену переменных

$$\sigma \rightarrow \mathbf{t}_r^{-s}, \quad q \rightarrow -\mathbf{q} \mathbf{t}_c, \quad t \rightarrow \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{t}_r}, \quad A \rightarrow \mathbf{a} \sqrt{-\mathbf{t}_r \mathbf{t}_c}$$

(в последней формуле индексы r и s в $\mathbf{t}_r$ и $\mathbf{t}_c$ восходят к оригинальным обозначениям работы [7], и в данном случае r не связано с диаграммой $R = r^s$, однако показатель степени в выражении для σ связан с числом s столбцов диаграммы R). Для узла 3_1 это соотношение обобщает исходное предположение из работы [8] для (косо)симметрических представлений на все прямоугольные. В случае узла 4_1 в работе [7] нет формул за пределами (косо)симметрического случая, поэтому формула (26) с исключенным F -множителем (при $\mathcal{F}_{\lambda}^{4_1} = 1$) является только гипотезой.

7. СВОЙСТВА ФАКТОРИЗАЦИИ

Хотя априори этого не требовалось, прямоугольный суперполином (22) обладает дополнительными алгебраическими свойствами, которые обобщают свойства факторизации для полиномов ХОМФЛИ в корнях из единицы [19], [51]:

$$\begin{array}{ll} \text{при } q = 1 & P_{[r^s]} = (P_{[1^s]})^r \quad \text{для всех } h, A, t, \\ \text{при } t = 1 & P_{[r^s]} = (P_{[r]})^s \quad \text{для всех } h, A, q, \\ \text{при } q^{2n} = 1 & P_{[r^s]} P_{[n^s]} = P_{[(r+n)^s]} \quad \text{для всех } h, A, t, \\ \text{при } t^{2m} = 1 & P_{[r^s]} P_{[r^m]} = P_{[r^{s+m}]} \quad \text{для всех } h, A, q. \end{array}$$

Разностные соотношения из работ [17], [19], [8] также обобщаются на пятиградуированные полиномы $\mathcal{S}(A, q, t, \sigma, h)$:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S}_{[r_1^s]} - \mathcal{S}_{[r_2^s]} & \text{делится на } h \left\{ \frac{A\sigma}{t^s} \right\} \left\{ \frac{A q^{r_1+r_2}}{\sigma} \right\}, \\ \mathcal{S}_{[r^{s_1}]} - \mathcal{S}_{[r^{s_2}]} & \text{делится на } h \left\{ \frac{A q^r}{\sigma} \right\} \left\{ \frac{A\sigma}{t^{s_1+s_2}} \right\}. \end{array}$$

Также в бесконечно малой окрестности точки $q = t = 1$ для наших суперполиномов мы имеем

$$\frac{d(H_R - H_{[1]}^{|R|})}{dq} \Big|_{q=t=1} = \nu_R \sigma_1^{|R|-2} \sigma_2, \quad \frac{d(H_R - H_{[1]}^{|R|})}{dt} \Big|_{q=t=1} = -\nu_R \sigma_1^{|R|-2} \sigma_2, \quad (27)$$

где $\nu_\lambda = \sum_i \lambda_i(\lambda_i - 1)$ и σ_1, σ_2 – низшие суперполиномы. В частности,

$$\left. \frac{d(H_{[1^*]} - H_{[1]}^s)}{dq} \right|_{q=t=1} = 0, \quad \left. \frac{d(H_{[r]} - H_{[1]}^r)}{dt} \right|_{q=t=1} = 0.$$

Соотношения (27) подтверждают гипотезу (15) из работы [52] для прямоугольных представлений R , по крайней мере в случае узла-восьмерки.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы рассказали о существенно новой идее в конструкции цветных суперполиномов: предложен ответ (21) для неторического узла-восьмерки. Это предположение сделано для всех прямоугольных представлений $R = [r^s]$, и соответствующий суперполином всегда положителен. Наш результат воспроизводит предыдущие гипотезы из [7], [11], [17], [20], [29] для симметрических и кососимметрических представлений $[r]$ и $[1^s]$, относительно которых в литературе имеется консенсус (с единственным исключением, которое можно найти в работе [26]).

Ответ (13) есть немедленная (самая наивная) деформация недавно предложенной в работе [42] формулы для прямоугольных полиномов ХОМФЛИ – после переписывания его в элегантной форме (13), которая составляет отдельный результат нашей работы. Эта формула имеет удивительную и многообещающую структуру, которая, однако, характерна для прямоугольных представлений и требует лучшего понимания.

Должно последовать дальнейшее обобщение на непрямоугольные представления и другие узлы. Особенно обнадеживающей является ситуация с твистованными узлами в прямоугольных представлениях; в этом случае полиномы ХОМФЛИ были недавно найдены в [49]. Все эти предположения были основаны на изучении дифференциального разложения [8], [17], [39], [41], которое существенно зависит от дефекта узла [41]. Поэтому естественная последовательность шагов состоит в том, чтобы посмотреть на твистованные узлы, затем на другие узлы с дефектом ноль и минус один, а затем перейти к узлам с положительными дефектами, включая торические, для которых гиперполиномы были предложены Чередником [14]. Эти торические гиперполиномы также положительны в прямоугольных представлениях и поэтому имеют хорошие шансы быть суперполиномами. Таким образом, их можно будет сравнить со следствиями из дифференциального разложения, когда они будут найдены. Необходима, однако, значительная работа в этом направлении.

Список литературы

- [1] S.-S. Chern, J. Simons, “Characteristic forms and geometric invariants”, *Ann. Math.*, **99**:1 (1974), 48–69; E. Witten, “Quantum field theory and the Jones polynomial”, *Commun. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399.
- [2] J. W. Alexander, “Topological invariants of knots and links”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30**:2 (1928), 275–306; J. H. Conway, “An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties”, *Computational Problems in Abstract Algebra* (Science Research Council Atlas Computer Laboratory, Oxford, 29 August – 2 September, 1967), ed. J. Leech, Pergamon Press, Oxford, New York, 1970, 329–358; V. F. R. Jones, “Index for subfactors”, *Invent. Math.*, **72**:1 (1983), 1–25; “A polynomial invariant for knots via von Neumann

- algebras”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **12**:1 (1985), 103–111; “Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials”, *Ann. Math.*, **126**:2 (1987), 335–388; L. H. Kauffman, “State models and the Jones polynomial”, *Topology*, **26**:3 (1987), 395–407; P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu, “A new polynomial invariant of knots and links”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **12**:2 (1985), 239–246; J. H. Przytycki, K. P. Traczyk, “Invariants of links of Conway type”, *Kobe J. Math.*, **4**:2 (1987), 115–139; A. Morozov, A. Smirnov, “Towards the proof of AGT relations with the help of the generalized Jack polynomials”, *Lett. Math. Phys.*, **104**:5 (2014), 585–612, arXiv: 1307.2576.
- [3] R. Gopakumar, C. Vafa, “Topological gravity as large N topological gauge theory”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 413–442, arXiv: hep-th/9802016; *M-Theory and Topological Strings-I*, arXiv: hep-th/9809187; *M-Theory and topological strings-II*, arXiv: hep-th/9812127; “On the gauge theory/geometry correspondence”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **3**:5 (1999), 1415–1443, arXiv: hep-th/9811131; H. Ooguri, C. Vafa, “Knot invariants and topological strings”, *Nucl. Phys. B*, **577**:3 (2000), 419–438, arXiv: hep-th/9912123; S. Gukov, A. Schwarz, C. Vafa, “Khovanov–Rozansky homology and topological strings”, *Lett. Math. Phys.*, **74**:1 (2005), 53–74, arXiv: hep-th/0412243; M. Dedushenko, E. Witten, “Some details on the Gopakumar–Vafa and Ooguri–Vafa formulas”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **20**:1 (2016), 1–133, arXiv: 1411.7108.
- [4] M. Khovanov, “A categorification of the Jones polynomial”, *Duke Math. J.*, **101**:3 (2000), 359–426, arXiv: math/9908171.
- [5] M. Khovanov, L. Rozansky, “Matrix factorizations and link homology”, *Fund. Math.*, **199**:1 (2008), 1–91, arXiv: math/0401268; “Virtual crossings, convolutions and a categorification of the $SO(2N)$ Kauffman polynomial”, *J. Gökova Geom. Topol.*, **1** (2007), 116–214, arXiv: math/0701333; N. Carqueville, D. Murfet, “Computing Khovanov–Rozansky homology and defect fusion”, *Algebr. Geom. Topol.*, **14**:1 (2014), 489–537, arXiv: 1108.1081.
- [6] А. Ю. Морозов, “Существуют ли p -адические инварианты узлов?”, *ТМФ*, **187**:1 (2016), 3–11, arXiv: 1509.04928.
- [7] E. Gorsky, S. Gukov, M. Stosic, *Quadruply-graded colored homology of knots*, arXiv: 1304.3481.
- [8] С. Б. Артамонов, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, “Иерархия дифференциалов и дополнительная градуировка полиномов узлов”, *ТМФ*, **179**:2 (2014), 147–188, arXiv: 1306.5682.
- [9] H. Nakajima, “More lectures on Hilbert schemes of points on surfaces”, *Development of Moduli Theory – Kyoto 2013* (Kyoto, Japan, June 11–21, 2013), Advanced Studies in Pure Mathematics, **69**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016, 173–205; A. Okounkov, *Lectures on K-theoretic computations in enumerative geometry*, arXiv: 1512.07363; N. Nekrasov, A. Okounkov, “Membranes and sheaves”, *Algebr. Geom.*, **3**:3 (2016), 320–369, arXiv: 1404.2323; E. Carlsson, N. Nekrasov, A. Okounkov, “Five dimensional gauge theories and vertex operators”, *Mosc. Math. J.*, **14**:1 (2014), 39–61, arXiv: 1308.2465; E. Carlsson, A. Okounkov, “Exts and vertex operators”, *Duke Math. J.*, **161**:9 (2012), 1797–1815, arXiv: 0801.2565.
- [10] J. Ding, K. Iohara, “Generalization and deformation of Drinfeld quantum affine algebras”, *Lett. Math. Phys.*, **41**:2 (1997), 181–193, arXiv: q-alg/9608002; K. Miki, “A (q, y) analog of the $W_{1+\infty}$ algebra”, *J. Math. Phys.*, **48**:12 (2007), 123520, 35 pp.; B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, “Quantum continuous $\mathfrak{gl}_{\infty}$: Semi-infinite construction of representations”, *Kyoto J. Math.*, **51**:2 (2011), 337–364, arXiv: 1002.3100; “Quantum continuous $\mathfrak{gl}_{\infty}$: Tensor products of Fock modules and W_n characters”, **51**:2 (2011), 365–392, arXiv: 1002.3113; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, A. Smirnov, “Proving AGT conjecture as HS duality: extension to five dimensions”, *Nucl. Phys. B*, **855**:1 (2012), 128–151, arXiv: 1105.0948; H. Awata, B. Feigin, J. Shiraishi, “Quantum algebraic approach to refined topological vertex”, *JHEP*, **03** (2012), 041, 34 pp., arXiv: 1112.6074; D. Maulik, A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, arXiv:

- 1211.1287; N. Nekrasov, V. Pestun, S. Shatashvili, *Quantum geometry and quiver gauge theories*, arXiv:1312.6689; M. Bershtein, O. Foda, “AGT, Burge pairs and minimal models”, *JHEP*, **06** (2014), 177, 26 pp., arXiv:1404.7075; V. Belavin, O. Foda, R. Santachiara, “AGT, N -Burge partitions and W_N minimal models”, *JHEP*, **10** (2015), 073, 36 pp., arXiv:1507.03540; A. Morozov, Y. Zenkevich, “Decomposing Nekrasov decomposition”, *JHEP*, **02** (2016), 098, 44 pp., arXiv:1510.01896; J.-E. Bourguine, Y. Matsuo, H. Zhang, “Holomorphic field realization of SH^c and quantum geometry of quiver gauge theories”, *JHEP*, **04** (2016), 167, 38 pp., arXiv:1512.02492; N. Nekrasov, “BPS/CFT correspondence: non-perturbative Dyson–Schwinger equations and qq -characters”, *JHEP*, **03** (2016), 181, 70 pp., arXiv:1512.05388; *BPS/CFT correspondence II: Instantons at crossroads, moduli and compactness theorem*, arXiv:1608.07272; T. Kimura, V. Pestun, *Quiver W -algebras*, arXiv:1512.08533; *Quiver elliptic W -algebras*, arXiv:1608.04651; A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, “Spectral duality in elliptic systems, six-dimensional gauge theories and topological strings”, *JHEP*, **05** (2016), 121, 43 pp., arXiv:1603.00304; “Ding–Iohara–Miki symmetry of network matrix models”, *Phys. Lett. B*, **762**:10 (2016), 196–208, arXiv:1603.05467; H. Awata, H. Kanno, T. Matsumoto, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Yu. Ohkubo, Y. Zenkevich, “Explicit examples of DIM constraints for network matrix models”, *JHEP*, **07** (2016), 103, 67 pp., arXiv:1604.08366; “Toric Calabi–Yau threefolds as quantum integrable systems. R-matrix and RTT relations”, *JHEP*, **10** (2016), 047, 48 pp., arXiv:1608.05351; A. Nedelin, F. Nieri, M. Zabzine, “ q -Virasoro modular double and 3d partition functions”, *Commun. Math. Phys.*, **353**:3 (2017), 1059–1102, arXiv:1605.07029; J.-E. Bourguine, M. Fukuda, Y. Matsuo, H. Zhang, R.-D. Zhu, “Coherent states in quantum $W_{1+\infty}$ algebra and qq -character for 5d Super Yang–Mills”, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, **2016**:12, 123B05, 41 pp., arXiv:1606.08020.
- [11] N. M. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen, “The superpolynomial for knot homologies”, *Experiment. Math.*, **15**:2 (2006), 129–159, arXiv:math/0505662.
- [12] M. Aganagic, Sh. Shakirov, *Knot homology from refined Chern–Simons theory*, arXiv:1105.5117; “Refined Chern–Simons theory and knot homology”, *String-Math 2011* (University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, June 6–11, 2011), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **85**, eds. J. Block, J. Distler, R. Donagi, E. Sharpe, AMS, Providence, RI, 2012, 3–31, arXiv:1202.2489; *Refined Chern–Simons theory and topological string*, arXiv:1210.2733.
- [13] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, A. Smirnov, “Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators”, *JHEP*, **03** (2013), 021, 85 pp., arXiv:1106.4305.
- [14] I. Cherednik, “Jones polynomials of torus knots via DAHA”, *Int. Math. Res. Not.*, **2013**:23 (2013), 5366–5425, arXiv:1111.6195.
- [15] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, A. Sleptsov, “Interplay between MacDonald and Hall–Littlewood expansions of extended torus superpolynomials”, *JHEP*, **05** (2012), 70, 11 pp., arXiv:1201.3339; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, “Torus HOMFLY as the Hall–Littlewood Polynomials”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:35 (2012), 355202, 11 pp., arXiv:1203.0667.
- [16] А. Ю. Морозов, “Загадки β -деформации”, *ТМФ*, **173**:1 (2012), 104–126, arXiv:1201.4595.
- [17] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, “HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations”, *JHEP*, **07** (2012), 131, 20 pp., arXiv:1203.5978.
- [18] H. Fuji, S. Gukov, P. Sulkovski, “Super-A-polynomial for knots and BPS states”, *Nucl. Phys. B*, **867**:2 (2013), 506–546, arXiv:1205.1515.
- [19] Ant. Morozov, “Special colored superpolynomials and their representation-dependence”, *JHEP*, **12** (2012), 116, 7 pp., arXiv:1208.3544.
- [20] S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, X. Sun, “Super-A-polynomials for twist knots”, *JHEP*, **11** (2012), 157, 38 pp., arXiv:1209.1409.

- [21] H. Fuji, P. Sulkowski, “Super-A-polynomial”, *String-Math 2012* (Hausdorff Center for Mathematics, Universität Bonn, Bonn, July 16–21, 2012), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **90**, eds. R. Donagi, S. Katz, A. Klemm, D. R. Morrison, AMS, Providence, RI, 2015, 277–304, arXiv: 1303.3709.
- [22] S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, “Colored Kauffman homology and Super-A-polynomials”, *JHEP*, **01** (2014), 126, 69 pp., arXiv: 1310.2240.
- [23] A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, A. Smirnov, “On genus expansion of superpolynomials”, *Nucl. Phys. B*, **889** (2014), 757–777, arXiv: 1310.7622.
- [24] Yu. Berest, P. Samuelson, “Double affine Hecke algebras and generalized Jones polynomials”, *Compositio Mathematica*, **152:7** (2016), 1333–1384, arXiv: 1402.6032.
- [25] I. Cherednik, I. Danilenko, “DAHA and iterated torus knots”, *Algebr. Geom. Topol.*, **16:2** (2016), 843–898, arXiv: 1408.4348.
- [26] S. Arthamonov, Sh. Shakirov, *Refined Chern–Simons theory in genus two*, arXiv: 1504.02620.
- [27] E. Witten, *Two lectures on gauge theory and Khovanov homology*, arXiv: 1603.03854.
- [28] S. Gukov, S. Nawata, I. Saberi, M. Stosic, P. Sulkowski, “Sequencing BPS spectra”, *JHEP*, **03** (2016), 004, 160 pp., arXiv: 1512.07883.
- [29] S. Nawata, A. Oblomkov, “Lectures on knot homology”, *Physics and Mathematics of Link Homology* (Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montreal, Montreal, QC, June 24 – July 5, 2013), eds. S. Gukov, M. Khovanov, J. Walcher, AMS, Providence, RI, 2016, 137–177, arXiv: 1510.01795.
- [30] D. Bar-Natan, “On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial”, *Algebr. Geom. Topol.*, **2:1** (2002), 337–370, arXiv: math/0201043; V. Dolotin, A. Morozov, “Introduction to Khovanov homologies. III. A new and simple tensor-algebra construction of Khovanov–Rozansky invariants”, *Nucl. Phys. B*, **878** (2014), 12–81, arXiv: 1308.5759; A. Morozov, And. Morozov, A. Popolitov, “On matrix-model approach to simplified Khovanov–Rozansky calculus”, *Phys. Lett. B*, **749** (2015), 309–325, arXiv: 1506.07516; A. Ю. Морозов, A. A. Морозов, A. В. Пополитов, “Матричные модели и размерности в вершинах гиперкубов”, *ТМФ*, **192:1** (2017), 115–163.
- [31] A. Anokhina, A. Morozov, “Towards $\mathcal{R}$ -matrix construction of Khovanov–Rozansky polynomials. I. Primary T -deformation of HOMFLY”, *JHEP*, **07** (2014), 063, 180 pp., arXiv: 1403.8087.
- [32] N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, “Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups”, *Commun. Math. Phys.*, **127:1** (1990), 1–26; E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev, “Chern–Simons field theory and quantum groups”, *Quantum Groups*, Proceedings of the 8th International Workshop on Mathematical Physics (Clausthal, Germany, July 19–26, 1989), Lecture Notes in Physics, **370**, eds. H. D. Doebner, J. D. Hennig, World Sci., Singapore, 1990, 307–317; “Chern–Simons holonomies and the appearance of quantum groups”, *Phys. Lett. B*, **235:3–4** (1990), 275–281; V. G. Turaev, O. Ya. Viro, “State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols”, *Topology*, **31:4** (1992), 865–902; A. Morozov, A. Smirnov, “Chern–Simons theory in the temporal gauge and knot invariants through the universal quantum R -matrix”, *Nucl. Phys. B*, **835:3** (2010), 284–313, arXiv: 1001.2003; A. Smirnov, *Notes on Chern–Simons theory in the temporal gauge*, arXiv: 0910.5011.
- [33] R. K. Kaul, T. R. Govindarajan, “Three-dimensional Chern–Simons theory as a theory of knots and links”, *Nucl. Phys. B*, **380:1–2** (1992), 293–333, arXiv: hep-th/9111063; “Three-dimensional Chern–Simons theory as a theory of knots and links: (II). Multi-coloured links”, **393:1–2** (1993), 392–412; P. Rama Devi, T. R. Govindarajan, R. K. Kaul, “Three-dimensional Chern–Simons theory as a theory of knots and links. (III). Compact semi-simple group”, *Nucl. Phys. B*, **402:1–2** (1993), 548–566, arXiv: hep-th/9212110; “Knot invariants from rational conformal field theories”, *Nucl. Phys. B*, **422:1–2** (1994), 291–306, arXiv: hep-th/9312215; “Representations of composite braids and invariants for mutant

- knots and links in Chern–Simons field theories”, *Modern Phys. Lett. A*, **10**:22 (1995), 1635–1658, arXiv: hep-th/9412084; P. Ramadevi, T. Sarkar, “On link invariants and topological string amplitudes”, *Nucl. Phys. B*, **600**:3 (2001), 487–511, arXiv: hep-th/0009188; Zodinmawia, P. Ramadevi, “ $SU(N)$ quantum Racah coefficients and non-torus links”, *Nucl. Phys. B*, **870**:1 (2013), 205–242, arXiv: 1107.3918; *Reformulated invariants for non-torus knots and links*, arXiv: 1209.1346; S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, “Colored HOMFLY polynomials from Chern–Simons theory”, *J. Knot Theory Ramifications*, **22**:13 (2013), 1350078, 58 pp., arXiv: 1302.5144.
- [34] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, “Character expansion for HOMFLY polynomials I. Integrability and difference equations”, *Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind* (The Legacy of Maximilian Kreuzer), eds. A. Rebhan, L. Katzarkov, J. Knapp, R. Rashkov, E. Scheidegger, World Sci., Singapore, 2013, 101–118, arXiv: 1112.5754; “Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid”, *JHEP*, **03** (2012), 034, 33 pp., arXiv: 1112.2654; S. Nawata, P. Ramadevi, V. K. Singh, *Colored HOMFLY polynomials that distinguish mutant knots*, arXiv: 1504.00364; A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. Kumar Singh, A. Sleptsov, “Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams”, *JHEP*, **07** (2015), 109, 33 pp., arXiv: 1504.00371; “Tabulating knot polynomials for arborescent knots”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:8 (2017), 085201, 22 pp., arXiv: 1601.04199; A. Mironov, A. Morozov, “Towards effective topological field theory for knots”, *Nucl. Phys. B*, **899** (2015), 395–413, arXiv: 1506.00339.
- [35] L. H. Kauffman, “State models and the Jones polynomial”, *Topology*, **26**:3 (1987), 395–407; L. H. Kauffman, P. Vogel, “Link polynomials and a graphical calculus”, *J. Knot Theory Ramifications*, **1**:1 (1992), 59–104.
- [36] P. Vogel, *The universal Lie algebra*, 1999, <http://www.math.jussieu.fr/~vogel/A299.ps.gz>; “Algebraic structures on modules of diagrams”, *J. Pure Appl. Algebra*, **215**:6 (2011), 1292–1339; P. Deligne, “La série exceptionnelle de groupes de Lie”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I*, **322**:4 (1996), 321–326; A. Cohen, R. de Man, “Computational evidence for Deligne’s conjecture regarding exceptional Lie groups”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I*, **322**:5 (1996), 427–432; J. M. Landsberg, L. Manivel, “Series of Lie groups”, *Michigan Math. J.*, **52**:2 (2004), 453–479, arXiv: math.AG/0203241; *Adv. Math.*, **171**:1 (2002), 59–85.
- [37] A. Mironov, R. Mkrtychyan, A. Morozov, “On universal knot polynomials”, *JHEP*, **02** (2016), 078, 34 pp., arXiv: 1510.05884; “Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials: Arborescent knots”, *Phys. Lett. B*, **755** (2016), 47–57, arXiv: 1511.09077.
- [38] D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, “Colored knot polynomials for arbitrary pretzel knots and links”, *Phys. Lett. B*, **743** (2015), 71–74, arXiv: 1412.2616; A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, “Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links”, *JHEP*, **07** (2015), 069, 34 pp., arXiv: 1412.8432.
- [39] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, “Evolution method and ‘differential hierarchy’ of colored knot polynomials”, *Nonlinear and Modern Mathematical Physics: Proceedings of the 2nd International Workshop* (Tampa, FL, USA, 9–11 March, 2013), AIP Conference Proceedings, **1562**, no. 1, eds. W.-X. Ma, D. Kaup, AIP, Melville, NY, 2013, 123–155, arXiv: 1306.3197.
- [40] S. Arthamonov, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, “Link polynomial calculus and the AENV conjecture”, *JHEP*, **04** (2017), 156, 27 pp., arXiv: 1309.7984.
- [41] Ya. Kononov, A. Morozov, “On the defect and stability of differential expansion”, *Письма в ЖЭТФ*, **101**:12 (2015), 931–934, arXiv: 1504.07146.
- [42] A. Morozov, “Differential expansion and rectangular HOMFLY for the figure eight knot”, *Nucl. Phys.*, **911** (2015), 582–605, arXiv: 1605.09728.
- [43] А. С. Анохина, А. А. Морозов, “Процедура каблирования для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ”, *ТМФ*, **178**:1 (2014), 3–68, arXiv: 1307.2216.
- [44] D. Galakhov, G. W. Moore, *Comments on the two-dimensional Landau–Ginzburg approach to link homology*, arXiv: 1607.04222.

- [45] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, “Knot polynomials in the first non-symmetric representation”, *Nucl. Phys. B*, **882** (2014), 171–194, arXiv:1211.6375.
- [46] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **30**:26 (2015), 1550169, 40 pp., arXiv:1508.02870.
- [47] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, “HOMFLY polynomials in representation $[3, 1]$ for 3-strand braids”, *JHEP*, **09** (2016), 134, 34 pp., arXiv:1605.02313.
- [48] K. Liu, P. Peng, “Proof of the Labastida–Mariño–Ooguri–Vafa conjecture”, *J. Differential Geom.*, **85**:3 (2010), 479–525, arXiv:0704.1526; S. Zhu, “Colored HOMFLY polynomial via skein theory”, *JHEP*, **10** (2013), 229, 23 pp., arXiv:1206.5886.
- [49] A. Morozov, “Factorization of differential expansion for antiparallel double-braid knots”, *JHEP*, **09** (2016), 135, 30 pp., arXiv:1606.06015.
- [50] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир., М., 1982.
- [51] Ya. Kononov, A. Morozov, “Factorization of colored knot polynomials at roots of unity”, *Phys. Lett. B*, **747** (2015), 500–510, arXiv:1505.06170.
- [52] A. Morozov, “The first-order deviation of superpolynomial in an arbitrary representation from the special polynomial”, *Письма в ЖЭТФ*, **97**:4 (2013), 195–196, arXiv:1211.4596.

Поступила в редакцию 20.12.2016