Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Огиевецкий, Б. Эрлемон,
Кольца $\mathbf{h}$ -деформированных дифференциальных операторов, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 322–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:19:31

© 2017 г.

О. В. Огиевецкий^{*†}, Б. Эрлемон^{*}

КОЛЬЦА $\mathbf{h}$ -ДЕФОРМИРОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Описан центр кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ $\mathbf{h}$ -деформированных дифференциальных операторов типа А. Установлен изоморфизм между некоторыми локализациями кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ и алгебры Вейля W_n , расширенной n переменными.

Ключевые слова: редукционные алгебры, осцилляторная реализация, кольца дифференциальных операторов, гипотеза Гельфанда–Кириллова, динамическое уравнение Янга–Бакстера.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9328>

Памяти Петра Кулиша

1. ВВЕДЕНИЕ

Кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ $\mathbf{h}$ -деформированных дифференциальных операторов возникают в теории редукционных алгебр. Редукционная алгебра $R_{\mathbf{g}}^A$ представляет собой инструмент для изучения разложений представлений ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ относительно ее подалгебры в ситуации, когда эта подалгебра – универсальная обертывающая алгебра редуктивной алгебры Ли $\mathbf{g}$ [1], [2] (определения, общую теорию и применения редукционных алгебр см. в [3], [4]).

Разложения тензорных произведений представлений редуктивной алгебры Ли $\mathbf{g}$ – частный случай задачи ограничения, связанный с диагональным вложением алгебры $U(\mathbf{g})$ в $U(\mathbf{g}) \otimes U(\mathbf{g})$. Соответствующая редукционная алгебра обозначается $\mathcal{D}(\mathbf{g})$ и называется *диагональной редукционной алгеброй* [5]. Описание диагональной редукционной алгебры $\mathcal{D}(\mathbf{gl}_n)$ в терминах образующих и (упорядочивающих) определяющих соотношений было дано в [5], [6].

В отпуске из Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. Работа О. В. Огиевского была поддержана Программой повышения конкурентоспособности Казанского федерального университета и грантом РФФИ № 17-01-00585.

^{*}Aix Marseille Univ, Université de Toulon, CNRS, CPT, Marseille, France.
E-mail: oleg@cpt.univ-mrs.fr, herlemont.basile@hotmail.fr

[†]Казанский Приволжский федеральный университет, Казань, Россия

Диагональная редукционная алгебра $\mathcal{D}(\mathbf{gl}_n)$ допускает аналог *осцилляторной локализации* в кольцах $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$, $N = 1, 2, 3, \dots$, $\mathbf{h}$ -деформированных дифференциальных операторов (см. [7]). Кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$ может быть получено редукцией кольца дифференциальных операторов от nN переменных (т.е. алгебры Вейля $W_{nN} = W_n^{\otimes N}$) по отношению к естественному действию алгебры Ли $\mathbf{gl}_n$. Аналогично кольцу q -дифференциальных операторов [8], кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$ может быть описано в R -матричном формализме. Нужная здесь R -матрица – решение так называемого динамического уравнения Янга–Бакстера (различные аспекты динамического уравнения Янга–Бакстера и его решений см. в [9]–[11]).

Кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$ образовано N копиями кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n) = \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, 1)$. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы исследовать структуру кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$. Наш первый результат заключается в описании центра кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$: это кольцо многочленов от n образующих.

Как следует из результатов статьи [12], кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ – нётерова область Оре. Поэтому естественно исследовать его поле частных и проверить, справедливы ли для него гипотезы в духе Гельфанда–Кириллова [13]. Для кольца q -дифференциальных операторов изоморфизм с алгеброй Вейля (с точностью до некоторых локализаций и пополнений) дан в работе [14]. Второй результат настоящей статьи состоит в построении изоморфизма между некоторыми локализациями кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ и алгебры Вейля W_n , расширенной n переменными. В частности, наш изоморфизм влечет изоморфизм соответствующих полей частных.

Согласно общей теории редукционных алгебр кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ допускает действие операторов Желобенко [4], [15] автоморфизмами. Операторы Желобенко порождают действие группы кос B_n . Однако алгебра Вейля W_n допускает действие симметрической группы S_n автоморфизмами. Как побочный результат нашей конструкции мы определяем действие симметрической группы автоморфизмами на кольце $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$. Кроме того, эти формулы могут быть обобщены и дают действие симметрической группы автоморфизмами на кольцах $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$ для любого N , а также на диагональной редукционной алгебре $\mathcal{D}(\mathbf{gl}_n)$. Предположительно, произвольная редукционная алгебра $R_{\mathfrak{g}}^A$ также допускает действие автоморфизмами группы Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Раздел 2 содержит определение колец $\mathbf{h}$ -деформированных дифференциальных операторов и некоторые их свойства, используемые в дальнейшем. В разделе 3 мы строим семейство, состоящее из n квадратичных центральных элементов. Далее мы определяем n -параметрическое семейство представлений “старшего веса” кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ и вычисляем значения квадратичных центральных элементов в этих представлениях. В разделе 4 мы вводим необходимые локализации кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ и алгебры Вейля, проверяем условия Оре и устанавливаем упомянутый выше изоморфизм локализованных колец. В разделе 5 мы доказываем полноту семейства центральных элементов, построенного в разделе 3. Затем мы описываем действие симметрической группы на $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$ и $\mathcal{D}(\mathbf{gl}_n)$, а также действие группы кос, порожденное операторами Желобенко, на локализации алгебры Вейля. Кроме того, мы описываем $2n$ -параметрическое семейство представлений алгебры $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$, получающееся из нашей конструкции.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Везде ниже $\mathfrak{k}$ обозначает основное поле нулевой характеристики. Символ s_i означает транспозицию $(i, i + 1)$.

Обозначим через $U(\mathbf{h})$ свободную коммутативную $\mathfrak{k}$ -алгебру с образующими $\tilde{h}_i$, $i = 1, \dots, n$. Положим $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_i - \tilde{h}_j \in \mathbf{h}$. Обозначим через $\bar{U}(\mathbf{h})$ кольцо частных

алгебры $U(\mathbf{h})$ относительно мультипликативного множества знаменателей, порожденного элементами $(h_{ij} + k)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим

$$\psi_i := \prod_{k:k>i} \tilde{h}_{ik}, \quad \psi'_i := \prod_{k:k<i} \tilde{h}_{ik}, \quad \chi_i := \psi_i \psi'_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Обозначим через ε_j , $j = 1, \dots, n$, автоморфизмы кольца $\overline{U}(\mathbf{h})$, заданные на образующих элементарными сдвигами, $\varepsilon_j: \tilde{h}_i \mapsto \tilde{h}_i + \delta_i^j$. Обозначим результат действия автоморфизма ε_j на элемент $p \in \overline{U}(\mathbf{h})$ через $\varepsilon_j(p)$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА КОЛЕЦ $\mathbf{h}$ -ДЕФОРМИРОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Составим из элементов кольца $\overline{U}(\mathbf{h})$ матрицу $\hat{R} = \{\hat{R}_{ij}^{kl}\}_{i,j,k,l=1}^n$, ненулевые элементы которой имеют вид

$$\hat{R}_{ij}^{ij} = \frac{1}{\tilde{h}_{ij}}, \quad i \neq j, \quad \text{и} \quad \hat{R}_{ji}^{ij} = \begin{cases} \frac{\tilde{h}_{ij}^2 - 1}{\tilde{h}_{ij}^2}, & i < j, \\ 1, & i \geq j. \end{cases} \quad (2)$$

Матрица $\hat{R}$ – стандартное решение динамического уравнения Янга–Бакстера

$$\sum_{a,b,u=1}^n \hat{R}_{ab}^{i_1 i_2} \hat{R}_{u j_3}^{b i_3} [-\varepsilon_a] \hat{R}_{j_1 j_2}^{a u} = \sum_{a,b,u=1}^n \hat{R}_{ab}^{i_2 i_3} [-\varepsilon_{i_1}] \hat{R}_{j_1 u}^{i_1 a} \hat{R}_{j_2 j_3}^{u b} [-\varepsilon_{j_1}], \quad (3)$$

$$1 \leq i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3 \leq n,$$

типа A.

Кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ $\mathbf{h}$ -деформированных дифференциальных операторов типа A порождено образующими x^j и $\bar{\partial}_j$, $j = 1, \dots, n$. Кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ – это $\overline{U}(\mathbf{h})$ -бимодуль, свободный как односторонний $\overline{U}(\mathbf{h})$ -модуль; левая и правая $\overline{U}(\mathbf{h})$ -модульные структуры связаны соотношениями

$$\tilde{h}_i x^j = x^j (\tilde{h}_i + \delta_i^j), \quad \tilde{h}_i \bar{\partial}_j = \bar{\partial}_j (\tilde{h}_i - \delta_i^j). \quad (4)$$

Определяющие соотношения для образующих x^j и $\bar{\partial}_j$, $j = 1, \dots, n$, записываются в следующем виде (см. [7]):

$$x^i x^j = \sum_{k,l} \hat{R}_{kl}^{ij} x^k x^l, \quad \bar{\partial}_i \bar{\partial}_j = \sum_{k,l} \hat{R}_{ji}^{lk} \bar{\partial}_k \bar{\partial}_l, \quad x^i \bar{\partial}_j = \sum_{k,l} \hat{R}_{lj}^{ki} [\varepsilon_k] \bar{\partial}_k x^l - \delta_j^i, \quad (5)$$

или, в компонентах,

$$\begin{aligned} x^i x^j &= \frac{\tilde{h}_{ij} + 1}{\tilde{h}_{ij}} x^j x^i, & i < j, \\ \bar{\partial}_i \bar{\partial}_j &= \frac{\tilde{h}_{ij} - 1}{\tilde{h}_{ij}} \bar{\partial}_j \bar{\partial}_i, & i < j, \\ x^i \bar{\partial}_j &= \begin{cases} \bar{\partial}_j x^i, & i < j, \\ \frac{\tilde{h}_{ij}(\tilde{h}_{ij} - 2)}{(\tilde{h}_{ij} - 1)^2} \bar{\partial}_j x^i, & i > j, \end{cases} & (6) \\ x^i \bar{\partial}_i &= \sum_j \frac{1}{1 - \tilde{h}_{ij}} \bar{\partial}_j x^j - 1. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{X}_n$ – подкольцо кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$, порожденное элементами x^j , $j = 1, \dots, n$, и $\mathfrak{D}_n$ – подкольцо, порожденное элементами $\bar{\partial}_j$, $j = 1, \dots, n$. Кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ можно интерпретировать, как дубль Гейзенберга колец $\mathfrak{X}_n$ и $\mathfrak{D}_n$. В отличие от кольца q -дифференциальных операторов типа А, кольца $\mathfrak{X}_n$ и $\mathfrak{D}_n$ допускают более общие спаривания, приводящие к дублям, не изоморфным кольцу $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ (см. подробнее в [16]).

Кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ допускает автоморфизмы Желобенко $\check{q}_i$, $i = 1, \dots, n-1$, заданные формулами (см. [7])

$$\begin{aligned}\check{q}_i(x^i) &= -x^{i+1} \frac{\tilde{h}_{i,i+1}}{\tilde{h}_{i,i+1} - 1}, & \check{q}_i(x^{i+1}) &= x^i, & \check{q}_i(x^j) &= x^j, & j &\neq i, i+1, \\ \check{q}_i(\bar{\partial}_i) &= -\frac{\tilde{h}_{i,i+1} - 1}{\tilde{h}_{i,i+1}} \bar{\partial}_{i+1}, & \check{q}_i(\bar{\partial}_{i+1}) &= \bar{\partial}_i, & \check{q}_i(\bar{\partial}_j) &= \bar{\partial}_j, & j &\neq i, i+1, \\ \check{q}_i(\tilde{h}_j) &= \tilde{h}_{s_i(j)}.\end{aligned}\quad (7)$$

Операторы $\check{q}_i$, $i = 1, \dots, n-1$, порождают действие группы кос (см. [4], [15]).

Кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ допускает инволютивный антиавтоморфизм ϵ , определенный формулами

$$\epsilon(\tilde{h}_i) = \tilde{h}_i, \quad \epsilon(\bar{\partial}_i) = \varphi_i x^i, \quad \epsilon(x^i) = \bar{\partial}_i \varphi_i^{-1}, \quad (8)$$

где

$$\varphi_i := \frac{\psi_i}{\psi_i[-\varepsilon_i]} = \prod_{k: k > i} \frac{\tilde{h}_{ik}}{\tilde{h}_{ik} - 1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство сводится к тождеству

$$\frac{\varphi_i[-\varepsilon_j]}{\varphi_i} = \frac{\tilde{h}_{ij}^2 - 1}{\tilde{h}_{ij}^2}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

При построении центральных элементов в следующем разделе используются элементы

$$\Gamma_i := \bar{\partial}_i x^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Сформулируем некоторые свойства этих элементов.

ЛЕММА 1. Имеем

- 1) $\Gamma_i x^j = \frac{\tilde{h}_{ij} + 1}{\tilde{h}_{ij}} x^j \Gamma_i$ и $\Gamma_i \bar{\partial}_j = \frac{\tilde{h}_{ij} - 1}{\tilde{h}_{ij}} \bar{\partial}_j \Gamma_i$ для $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$;
- 2) $\check{q}_i(\Gamma_j) = \Gamma_{s_i(j)}$ для $i = 1, \dots, n-1$ и $j = 1, \dots, n$;
- 3) $\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_j \Gamma_i$ для $i, j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы в п. 1 и п. 2 получаются прямым вычислением; формула в п. 3 следует из п. 1. ■

Мы будем использовать следующую техническую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – ассоциативная алгебра. Предположим, что элементы $\check{h}_i$, $\check{Z}_i$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям

$$\check{h}_i \check{h}_j = \check{h}_j \check{h}_i, \quad \check{h}_i \check{Z}^j = \check{Z}^j (\check{h}_i + \delta_i^j), \quad \check{h}_i \check{Z}_j = \check{Z}_j (\check{h}_i - \delta_i^j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\check{h}_{ij} := \check{h}_i - \check{h}_j$ и

$$\check{\psi}_i := \prod_{k: k > i} \check{h}_{ik}, \quad \check{\psi}'_i := \prod_{k: k < i} \check{h}_{ik}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Предположим, что элементы $\check{h}_{ij}$ обратимы. Тогда:

1) элементы $\check{Z}^i$ удовлетворяют соотношениям

$$\check{Z}^i \check{Z}^j = \frac{\check{h}_{ij} + 1}{\check{h}_{ij}} \check{Z}^j \check{Z}^i, \quad i < j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

тогда и только тогда, когда любое из двух семейств $\{\check{Z}^{\circ i}\}_{i=1}^n$ или $\{\check{Z}'^{\circ i}\}_{i=1}^n$, где

$$\check{Z}^{\circ i} := \psi_i \check{Z}^i, \quad \check{Z}'^{\circ i} := \check{Z}^i \psi'_i, \quad (10)$$

коммуникативно;

2) элементы $\check{Z}_i$ удовлетворяют соотношениям

$$\check{Z}_i \check{Z}_j = \frac{\check{h}_{ij} - 1}{\check{h}_{ij}} \check{Z}_j \check{Z}_i, \quad i < j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

тогда и только тогда, когда любое из двух семейств $\{\check{Z}_i^{\circ}\}_{i=1}^n$ или $\{\check{Z}_i'^{\circ}\}_{i=1}^n$, где

$$\check{Z}_i^{\circ} := \psi_i \check{Z}_i, \quad \check{Z}_i'^{\circ} := \check{Z}_i \psi'_i, \quad (11)$$

коммуникативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямым вычислением.

3. КВАДРАТИЧНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Обозначим через $e_k := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \check{h}_{i_1} \cdots \check{h}_{i_k}$, $k = 0, \dots, n$, элементарные симметричные функции от переменных $\check{h}_1, \dots, \check{h}_n$. Положим

$$c_k := \sum_j \frac{\partial e_k}{\partial \check{h}_j} \Gamma_j - e_k,$$

где Γ_j , $j = 1, \dots, n$, — элементы, определенные в (9).

Из леммы 1 следует, что $\check{q}_j(c_k) = c_k$ для всех $j = 1, \dots, n-1$ и $k = 1, \dots, n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Элементы c_k , $k = 1, \dots, n$, принадлежат центру кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать производящие функции

$$e(t) := \sum_{k=0}^n e_k t^k = \prod_i (1 + \check{h}_i t)$$

и

$$c(t) := \sum_{k=1}^n c_k t^k = u(t)e(t) + 1, \quad u(t) := t \sum_i \frac{1}{1 + \check{h}_i t} \Gamma_i - 1.$$

Выражение $u(t)$ введено для удобства; знаменатель $1 + \tilde{h}_i t$, который не определен в кольце $\text{Diff}_{\hbar}(n)$, сокращается в комбинации $u(t)e(t)$.

Мы должны проверить, что многочлен $c(t)$ централен. Имеем

$$x^j e(t) = \frac{1 + (\tilde{h}_j - 1)t}{1 + \tilde{h}_j t} e(t) x^j. \quad (12)$$

Из леммы 1 следует, что

$$x^j u(t) = \left(\sum_{k: k \neq j} \frac{t}{1 + \tilde{h}_k t} \frac{\tilde{h}_{kj}}{\tilde{h}_{kj} + 1} \Gamma_k + \frac{t}{1 + (\tilde{h}_j - 1)t} \left(\sum_k \frac{1}{1 - \tilde{h}_{jk}} \Gamma_k - 1 \right) - 1 \right) x^j.$$

Коэффициент при Γ_k в этом выражении равен $\frac{t(1+\tilde{h}_j)}{(1+\tilde{h}_k)(1+(\tilde{h}_j-1)t)}$ и для $k \neq j$, и для $k = j$. Следовательно,

$$x^j u(t) = \frac{t(1 + \tilde{h}_j)}{(1 + \tilde{h}_j)(1 + (\tilde{h}_j - 1)t)} u(t) x^j. \quad (13)$$

Объединяя (12) и (13), мы находим, что $c(t)$ коммутирует с x^j , $j = 1, \dots, n$. Для $\bar{\partial}_j$ можно либо сделать вычисление, аналогичное тому, что было сделано для x^j , либо использовать антиавтоморфизм (8). ■

ЛЕММА 3. 1. Матрица V , определенная формулой $V_j^k := \partial e_j / \partial \tilde{h}_k$, обратима. Компоненты обратной к ней матрицы равны

$$(V^{-1})_i^j = \frac{(-1)^{j-1} \tilde{h}_i^{n-j}}{\chi_i},$$

где элементы χ_i определены в (1).

2. Имеем

$$\chi_j \Gamma_j = \tilde{h}_j^n - \tilde{h}_j^n c(-\tilde{h}_j^{-1}). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство п. 1 см., например, в [17] (предложение 4).

Для доказательства п. 2 перепишем равенство $c_k = \sum_j V_k^j \Gamma_j - e_k$ в виде

$$\Gamma_j = \sum_k (V^{-1})_j^k (c_k + e_k) = \frac{1}{\chi_j} \sum_k (-1)^{k-1} \tilde{h}_j^{n-k} (c_k + e_k) = -\frac{\tilde{h}_j^n}{\chi_j} (c(-\tilde{h}_j^{-1}) + e(-\tilde{h}_j^{-1}) - 1).$$

Поскольку $e(-\tilde{h}_j^{-1}) = 0$, мы получаем (14). ■

3.1. Представления со старшим весом. Кольцо $\text{Diff}_{\hbar}(n)$ допускает n -параметрическое семейство представлений “старшего веса”. Чтобы определить их, обозначим $\bar{U}(\hbar)$ -подкольцо в $\text{Diff}_{\hbar}(n)$, порожденное элементами $\{\bar{\partial}_i\}_{i=1}^n$, через $\mathfrak{D}_n$. Пусть $\vec{\lambda} := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ – последовательность комплексных чисел длины n таких, что $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$. Обозначим через $M_{\vec{\lambda}}$ одномерное $\mathfrak{k}$ -векторное пространство с базисным вектором $|\cdot\rangle$. При наших условиях на $\vec{\lambda}$ формулы

$$\tilde{h}_i: |\cdot\rangle \mapsto \lambda_i |\cdot\rangle, \quad \bar{\partial}_i: |\cdot\rangle \mapsto 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

определяют структуру $\mathfrak{D}_n$ -модуля на $M_{\vec{\lambda}}$. Мы будем называть индуцированное представление $\text{Ind}_{\mathfrak{D}_n}^{\text{Diff}_{\hbar}(n)} M_{\vec{\lambda}}$ представлением старшего веса со старшим весом $\vec{\lambda}$.

ЛЕММА 4. Центральным оператор c_k , $k = 1, \dots, n$, действует на модуле $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)} M_{\tilde{\lambda}}$ умножением на скаляр $-e_k|_{\tilde{h}_i \mapsto \lambda_i - 1}$, равный значению симметрической функции $-e_k$ на сдвинутом векторе $\{\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно вычислить значение оператора c_k на старшем векторе $|\cdot\rangle$. В терминах производящих функций мы должны проверить, что

$$e(t)u(t): |\cdot\rangle \mapsto -\prod_i (1 + (\lambda_i - 1)t)|\cdot\rangle.$$

Из [7] (раздел 3.3) следует, что

$$\Gamma_j |\cdot\rangle = \frac{\chi_j[\varepsilon_j]}{\chi_j} |\cdot\rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поэтому мы должны проверить, что

$$e(t) \left(t \sum_j \frac{1}{1 + \tilde{h}_j t} \frac{\chi_j[\varepsilon_j]}{\chi_j} - 1 \right) : |\cdot\rangle \mapsto -\prod_i (1 + (\lambda_i - 1)t) |\cdot\rangle. \quad (15)$$

Мы используем следующую формулу из работы [7] (примечание 3 после доказательства предложения 4.3 в разделе 4.2):

$$\prod_l \frac{\tilde{h}_0 - \tilde{h}_l - 1}{\tilde{h}_0 - \tilde{h}_l} + \sum_j \frac{1}{\tilde{h}_0 - \tilde{h}_j} \frac{\chi_j[-\varepsilon_j]}{\chi_j} = 1,$$

где $\tilde{h}_0$ – переменная. После замены $\tilde{h}_0 \rightarrow t^{-1}$ и $\tilde{h}_j \rightarrow -\tilde{h}_j$, $j = 1, \dots, n$, эта формула принимает вид

$$\frac{e(t)[- \varepsilon]}{e(t)} + t \sum_j \frac{1}{1 + \tilde{h}_j t} \frac{\chi_j[\varepsilon_j]}{\chi_j} = 1,$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, откуда следует (15). ■

4. ИЗОМОРФИЗМ КОЛЕЦ ЧАСТНЫХ

Из результатов [12] следует, что кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ не имеет делителей нуля. Пусть S_x – мультипликативный набор, порожденный элементами x^j , $j = 1, \dots, n$. Набор S_x удовлетворяет левому и правому условиям Оре (необходимые определения см., например, в [18]): скажем, для проверки левого условия Оре достаточно убедиться, что для любого x^k и монома $m = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_A} x^{j_1} \dots x^{j_B}$ существуют $\tilde{s} \in S_x$ и $\tilde{m} \in \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ такие, что $\tilde{s}m = \tilde{m}x^k$. Структура коммутационных соотношений (6) показывает, что можно выбрать $\tilde{s} = (x^k)^\nu$ с достаточно большим ν . Обозначим через $S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ локализацию кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ по отношению к множеству S_x .

Пусть W_n – алгебра Вейля, т.е. алгебра с образующими X^j , D_j , $j = 1, \dots, n$, и определяющими соотношениями

$$X^i X^j = X^j X^i, \quad D_i D_j = D_j D_i, \quad D_i X^j = \delta_i^j + X^j D_i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть T – мультипликативный набор, порожденный элементами $X^j D_j - X^k D_k + \ell$, $1 \leq j < k \leq n$, $\ell \in \mathbb{Z}$, и X^j , $j = 1, \dots, n$. Набор T удовлетворяет левому и правому

условиям Оре (см. приложение в работе [12]). Обозначим через $T^{-1}W_n$ локализацию алгебры W_n относительно множества T .

Пусть $a_1, \dots, a_n$ – семейство коммутирующих переменных. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_j &:= D_j X^j, & \mathcal{H}_{jk} &:= \mathcal{H}_j - \mathcal{H}_k, \\ \Psi'_j &:= \prod_{k: k < j} \mathcal{H}_{jk}, & \Psi_j &:= \prod_{k: k > j} \mathcal{H}_{jk}, \\ \mathbf{C}(t) &:= \sum_{k=1}^n a_k t^k, & \Upsilon_i &:= \mathcal{H}_i^n (1 - \mathbf{C}(-\mathcal{H}_i^{-1})).\end{aligned}$$

Полином $\mathbf{C}$ имеет степень n , поэтому элемент Υ_i – многочлен от $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 1. *Кольцо $S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ изоморфно кольцу $\mathfrak{k}[a_1, \dots, a_n] \otimes T^{-1}W_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Знание центральных элементов (предложение 1) позволяет предъявить набор образующих кольца $S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$, в котором требуемый изоморфизм вполне прозрачен.

В локализованном кольце $S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ мы можем использовать множество образующих $\{\tilde{h}_i, x^i, \Gamma_i\}_{i=1}^n$ вместо $\{\tilde{h}_i, x^i, \bar{\partial}_i\}_{i=1}^n$. Согласно лемме 3, п. 2, $\{\tilde{h}_i, x^i, c_i\}_{i=1}^n$ – тоже порождающий набор. Наконец, $\mathfrak{B}_D := \{\tilde{h}_i, x'^{\circ i}, c_i\}_{i=1}^n$, где $x'^{\circ i} := x^i \psi'_i$, $i = 1, \dots, n$, также порождает локализованное кольцо $S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$. Из леммы 2 следует, что семейство $\{x'^{\circ i}\}_{i=1}^n$ коммутативно. Определяющие соотношения для образующих из множества $\mathfrak{B}_D$ таковы:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_i \tilde{h}_j &= \tilde{h}_j \tilde{h}_i, & \tilde{h}_i x'^{\circ j} &= x'^{\circ j} (\tilde{h}_i + \delta_i^j), & x'^{\circ i} x'^{\circ j} &= x'^{\circ j} x'^{\circ i}, & i, j &= 1, \dots, n, \\ c_i &\text{ центральны,} & i &= 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{16}$$

В локализованном кольце $\mathfrak{k}[a_1, \dots, a_n] \otimes T^{-1}W_n$ мы можем перейти к набору образующих $\mathfrak{B}_W := \{\mathcal{H}_i, X^i, a_i\}_{i=1}^n$ с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i \mathcal{H}_j &= \mathcal{H}_j \mathcal{H}_i, & \mathcal{H}_i X^j &= X^j (\mathcal{H}_i + \delta_i^j), & X^i X^j &= X^j X^i, & i, j &= 1, \dots, n, \\ a_i &\text{ центральны,} & i &= 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{17}$$

Сравнивая (16) и (17), мы видим, что имеется изоморфизм

$$\mu: \mathfrak{k}[a_1, \dots, a_n] \otimes T^{-1}W_n \rightarrow S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n),$$

заданный на наших порождающих множествах $\mathfrak{B}_D$ и $\mathfrak{B}_W$ формулами

$$\mu: X^i \mapsto x'^{\circ i}, \quad \mathcal{H}_i \mapsto \tilde{h}_i, \quad a_i \mapsto c_i, \quad i = 1, \dots, n.\tag{18}$$

Доказательство завершено. ■

Запишем формулы, определяющие изоморфизм μ , в терминах исходных образующих колец $S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ и $\mathfrak{k}[a_1, \dots, a_n] \otimes T^{-1}W_n$.

ЛЕММА 5. *Имеем*

$$\mu: X^i \mapsto x^i \psi'_i, \quad D_i \mapsto (\psi'_i)^{-1} \tilde{h}_i (x^i)^{-1}, \quad a_i \mapsto c_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (19)$$

и

$$\mu^{-1}: \tilde{h}_i \mapsto \mathcal{H}_i, \quad x^i \mapsto X^i \frac{1}{\Psi'_i}, \quad \bar{\partial}_i \mapsto \frac{\Upsilon_i}{\Psi_i} (X^i)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы прокомментируем лишь последнюю формулу в (20). Из п. 2 леммы 3 следует, что $\mu^{-1}(\chi_i \Gamma_i) = \Upsilon_i$, и формула для $\mu^{-1}(\bar{\partial}_i)$ следует из того, что $\bar{\partial}_i = \Gamma_i (x^i)^{-1}$. ■

5. КОММЕНТАРИИ

Установим несколько следствий нашей конструкции.

1. Теперь мы можем дать описание центра кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$.

ЛЕММА 6. *Центр кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ образован многочленами от элементов $\{c_i\}_{i=1}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой центральный элемент ζ должен иметь нулевой $\mathbf{h}$ -вес и поэтому принадлежать подкольцу, порожденному Γ_i и $\tilde{h}_i$, $i = 1, \dots, n$, или, согласно лемме 3, порожденному c_i и $\tilde{h}_i$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим ζ как рациональную функцию от $\tilde{h}_i$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку ζ коммутирует с x'^{oi} , $i = 1, \dots, n$, эта рациональная функция периодическая, с периодом 1, по отношению к любому $\tilde{h}_i$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, ζ не зависит от $\tilde{h}_i$, $i = 1, \dots, n$, и принадлежит подкольцу, порожденному c_i , $i = 1, \dots, n$, что и требовалось доказать. ■

Другое доказательство заключается в использовании изоморфизма μ и тривиальности центра алгебры Вейля.

Отметим, что центры колец $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ и $S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ изоморфны.

2. Симметрическая группа S_n действует автоморфизмами на алгебре W_n ,

$$\pi(X^j) = X^{\pi(j)}, \quad \pi(D_j) = D_{\pi(j)} \quad \text{для} \quad \pi \in S_n.$$

Изоморфизм μ переводит это действие в действие группы S_n на кольце $S_x^{-1} \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$. Оказывается, что подкольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$ сохраняется при этом действии. Приведем формулы для действия образующих s_i группы S_n :

$$\begin{aligned} s_i(x^i) &= -x^{i+1} \tilde{h}_{i,i+1}, & s_i(x^{i+1}) &= x^i \frac{1}{\tilde{h}_{i,i+1}}, & s_i(x^j) &= x^j & \text{при } j \neq i, i+1, \\ s_i(\bar{\partial}_i) &= -\frac{1}{\tilde{h}_{i,i+1}} \bar{\partial}_{i+1}, & s_i(\bar{\partial}_{i+1}) &= \tilde{h}_{i,i+1} \bar{\partial}_i, & s_i(\bar{\partial}_j) &= \bar{\partial}_j & \text{при } j \neq i, i+1, \\ s_i(\tilde{h}_j) &= \tilde{h}_{s_i(j)}. \end{aligned} \quad (21)$$

3а. Для R-матричного описания диагональной редукционной алгебры $\mathcal{D}(\mathbf{gl}_n)$ в работе [7] использовалось кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$, образованное N копиями кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n)$. Мы не располагаем аналогом изоморфизма μ для кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$. Однако прямое обобщение формул (21) задает действие группы S_n автоморфизмами на кольце $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$.

Напомним, что кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$ порождено образующими $x^{j,\alpha}$ и $\bar{\partial}_{j,\alpha}$, $j = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, N$. Кольцо $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$ — это $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{h})$ -бимодуль, свободный как односторонний $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{h})$ -модуль; левая и правая $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{h})$ -модульные структуры связаны соотношениями

$$\tilde{h}_i x^{j,\alpha} = x^{j,\alpha} (\tilde{h}_i + \delta_i^j), \quad \tilde{h}_i \bar{\partial}_{j,\alpha} = \bar{\partial}_{j,\alpha} (\tilde{h}_i - \delta_i^j). \quad (22)$$

Определяющие соотношения для образующих $x^{j,\alpha}$ и $\bar{\partial}_{j,\alpha}$, $j = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, N$, таковы:

$$\begin{aligned} x^{i,\alpha} x^{j,\beta} &= \sum_{k,l} \hat{\mathbf{R}}_{kl}^{ij} x^{k,\beta} x^{l,\alpha}, & \bar{\partial}_{i,\alpha} \bar{\partial}_{j,\beta} &= \sum_{k,l} \hat{\mathbf{R}}_{jl}^{lk} \bar{\partial}_{k,\beta} \bar{\partial}_{l,\alpha}, \\ x^{i,\alpha} \bar{\partial}_{j,\beta} &= \sum_{k,l} \hat{\mathbf{R}}_{lj}^{ki} [\varepsilon_k] \bar{\partial}_{k,\beta} x^{l,\alpha} - \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_j^i, \end{aligned} \quad (23)$$

или, в компонентах,

$$\begin{aligned} x^{i,\alpha} x^{j,\beta} &= \frac{1}{\tilde{h}_{ij}} x^{i,\beta} x^{j,\alpha} + \frac{\tilde{h}_{ij}^2 - 1}{\tilde{h}_{ij}^2} x^{j,\beta} x^{i,\alpha}, \\ x^{j,\alpha} x^{i,\beta} &= -\frac{1}{\tilde{h}_{ij}} x^{j,\beta} x^{i,\alpha} + x^{i,\beta} x^{j,\alpha}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ \bar{\partial}_{i,\alpha} \bar{\partial}_{j,\beta} &= -\frac{1}{\tilde{h}_{ij}} \bar{\partial}_{i,\beta} \bar{\partial}_{j,\alpha} + \frac{\tilde{h}_{ij}^2 - 1}{\tilde{h}_{ij}^2} \bar{\partial}_{j,\beta} \bar{\partial}_{i,\alpha}, \\ \bar{\partial}_{j,\alpha} \bar{\partial}_{i,\beta} &= \frac{1}{\tilde{h}_{ij}} \bar{\partial}_{j,\beta} \bar{\partial}_{i,\alpha} + \bar{\partial}_{i,\beta} \bar{\partial}_{j,\alpha}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ x^{i,\alpha} \bar{\partial}_{j,\beta} &= \bar{\partial}_{j,\beta} x^{i,\alpha}, \quad x^{j,\alpha} \bar{\partial}_{i,\beta} = \frac{\tilde{h}_{ij}(\tilde{h}_{ij} + 2)}{(\tilde{h}_{ij} + 1)^2} \bar{\partial}_{i,\beta} x^{j,\alpha}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ x^{i,\alpha} \bar{\partial}_{i,\beta} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \tilde{h}_{ik}} \bar{\partial}_{k,\beta} x^{k,\alpha} - \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (24)$$

ЛЕММА 7. *Отображения s_i , $i = 1, \dots, n-1$, заданные на образующих кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$ формулами*

$$\begin{aligned} s_i(x^{i,\alpha}) &= -x^{i+1,\alpha} \tilde{h}_{i,i+1}, & s_i(x^{i+1,\alpha}) &= x^{i,\alpha} \frac{1}{\tilde{h}_{i,i+1}}, \\ s_i(x^{j,\alpha}) &= x^{j,\alpha} & \text{при } j &\neq i, i+1, \\ s_i(\bar{\partial}_{i,\alpha}) &= -\frac{1}{\tilde{h}_{i,i+1}} \bar{\partial}_{i+1,\alpha}, & s_i(\bar{\partial}_{i+1,\alpha}) &= \tilde{h}_{i,i+1} \bar{\partial}_{i,\alpha}, \\ s_i(\bar{\partial}_{j,\alpha}) &= \bar{\partial}_{j,\alpha} & \text{при } j &\neq i, i+1, \\ s_i(\tilde{h}_j) &= \tilde{h}_{s_i(j)}, \end{aligned} \quad (25)$$

продолжаются до автоморфизмов кольца $\text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N)$. Кроме того, эти автоморфизмы удовлетворяют соотношениям Артина и, следовательно, задают действие симметрической группы S_n автоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После того, как формулы (25) написаны, проверка сводится к непосредственному вычислению. ■

36. Операторы $s'_i := \epsilon s_i \epsilon$, где ϵ – антиавтоморфизм (8), также порождают действие симметрической группы S_n автоморфизмами. Формулы для действия автоморфизма s'_i , $i = 1, \dots, n-1$, содержат только элемент $\tilde{h}_{i,i+1}$ (как и для автоморфизма s_i) и имеют вид

$$\begin{aligned} s'_i(x^{i,\alpha}) &= -\frac{1}{\tilde{h}_{i,i+1}} x^{i+1,\alpha}, & s'_i(x^{i+1,\alpha}) &= \tilde{h}_{i,i+1} x^{i,\alpha}, \\ s'_i(x^{j,\alpha}) &= x^{j,\alpha} & \text{при } j &\neq i, i+1, \\ s'_i(\bar{\partial}_{i,\alpha}) &= -\bar{\partial}_{i+1,\alpha} \tilde{h}_{i,i+1}, & s'_i(\bar{\partial}_{i+1,\alpha}) &= \bar{\partial}_{i,\alpha} \frac{1}{\tilde{h}_{i,i+1}}, \\ s'_i(\bar{\partial}_{j,\alpha}) &= \bar{\partial}_{j,\alpha} & \text{при } j &\neq i, i+1, \\ s_i(\tilde{h}_j) &= \tilde{h}_{s_i(j)}. \end{aligned} \quad (26)$$

4. Диагональная редукционная алгебра $\mathcal{D}(\mathbf{gl}_n)$ порождена элементами L_i^j , $i, j = 1, \dots, n$. Определяющие соотношения алгебры $\mathcal{D}(\mathbf{gl}_n)$ пишутся в виде уравнения отражения (см. [7])

$$\hat{R}_{12} L_1 \hat{R}_{12} L_1 - L_1 \hat{R}_{12} L_1 \hat{R}_{12} = \hat{R}_{12} L_1 - L_1 \hat{R}_{12},$$

где $L = \{L_i^j\}_{i,j=1}^n$ – матрица, составленная из образующих (различные аспекты и применения уравнения отражения см. в [19]–[26]).

Для каждого N существует гомоморфизм ([7], раздел 4.1)

$$\tau_N: \mathcal{D}(\mathbf{gl}_n) \rightarrow \text{Diff}_{\mathbf{h}}(n, N),$$

заданный формулой

$$\tau_N(L_i^j) = \sum_{\alpha} x^{j,\alpha} \bar{\partial}_{i,\alpha}.$$

Более того, τ_N – вложение при $N \geq n$.

Формулы (25) показывают, что образ отображения τ_N сохраняется при действии автоморфизмов s_i .

Элемент $s_i(\tau_N(L_k^j))$ записывается одной и той же формулой для всех N . Поскольку гомоморфизм τ_N инъективен при $N \geq n$, мы приходим к выводу, что формулы (25) индуцируют действие симметрической группы S_n на диагональной редукционной алгебре $\mathcal{D}(\mathbf{gl}_n)$ автоморфизмами.

Получающиеся формулы для действия автоморфизмов s_i , $i = 1, \dots, n-1$, на образующих L_j^k , $j, k = 1, \dots, n$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} s_i(L_j^i) &= -L_j^{i+1} \tilde{h}_{i,i+1}, & s_i(L_j^{i+1}) &= L_j^i \frac{1}{\tilde{h}_{i,i+1}}, & j &\neq i, i+1, \\ s_i(L_i^j) &= -\frac{1}{\tilde{h}_{i,i+1}} L_{i+1}^j, & s_i(L_{i+1}^j) &= \tilde{h}_{i,i+1} L_j^i, & j &\neq i, i+1, \\ s_i(L_i^i) &= L_{i+1}^{i+1}, & s_i(L_{i+1}^i) &= -L_i^{i+1} (\tilde{h}_{i,i+1} - 1)^2, \\ s_i(L_i^{i+1}) &= -L_{i+1}^i \frac{1}{(\tilde{h}_{i,i+1} + 1)^2}, & s_i(L_{i+1}^{i+1}) &= L_i^i, \\ s_i(L_j^k) &= L_j^k, & k &\neq i, i+1 \quad \text{и} \quad j \neq i, i+1. \end{aligned}$$

5. Изоморфизм μ может быть также использован для того, чтобы перевести действие (7) группы кос операторами Желобенко в действие группы кос автоморфизмами на кольце $\mathfrak{k}[a_1, \dots, a_n] \otimes T^{-1}W_n$. Оказывается, это действие сохраняет подкольцо $T^{-1}W_n$. Более того, пусть T_0 – мультипликативное подмножество множества T , порожденное элементами $X^j D_j - X^k D_k + \ell$, $1 \leq j < k \leq n$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Тогда действие операторов $\check{q}_i$, $i = 1, \dots, n-1$, сохраняет подкольцо $T_0^{-1}W_n$. Приведем формулы для действия операторов $\check{q}_i$, $i = 1, \dots, n-1$:

$$\check{q}_i(X^i) = \frac{1}{\mathcal{H}_{i,i+1}} X^{i+1}, \quad \check{q}_i(X^{i+1}) = X^i \mathcal{H}_{i,i+1}, \quad \check{q}_i(X^j) = X^j \quad \text{при } j \neq i, i+1,$$

$$\check{q}_i(D_i) = D_{i+1} \mathcal{H}_{i,i+1}, \quad \check{q}_i(D_{i+1}) = \frac{1}{\mathcal{H}_{i,i+1}} D_i, \quad \check{q}_i(D_j) = D_j \quad \text{при } j \neq i, i+1.$$

6. Изоморфизм (20) позволяет построить $2n$ -параметрическое семейство представлений кольца $\text{Diff}_{\mathfrak{h}}(n)$, отличающихся от представлений старшего веса. Пусть $\vec{\gamma} := \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ – последовательность комплексных чисел длины n таких, что $\gamma_i - \gamma_j \notin \mathbb{Z}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$. Пусть $V_{\vec{\gamma}}$ – векторное пространство с базисом

$$v_{\vec{j}} := (X^1)^{j_1+\gamma_1} (X^2)^{j_2+\gamma_2} \dots (X^n)^{j_n+\gamma_n}, \quad \vec{j} := \{j_1, \dots, j_n\}, \quad j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}.$$

При наших условиях на последовательности $\vec{\gamma}$ пространство $V_{\vec{\gamma}}$ имеет естественную структуру $T^{-1}W_n$ -модуля. Определим действие элементов a_k на пространстве $V_{\vec{\gamma}}$ формулой $a_k: v_{\vec{j}} \mapsto A_k v_{\vec{j}}$, где $\vec{A} := \{A_1, \dots, A_n\}$ – еще одна последовательность комплексных чисел длины n . Тем самым $V_{\vec{\gamma}}$ приобретает структуру $\mathfrak{k}[a_1, \dots, a_n] \otimes T^{-1}W_n$ -модуля и, следовательно, $\text{Diff}_{\mathfrak{h}}(n)$ -модуля, который мы обозначим через $V_{\vec{\gamma}, \vec{A}}$. Центральный оператор c_k действует на $V_{\vec{\gamma}, \vec{A}}$ умножением на скаляр A_k .

Список литературы

- [1] J. Mickelsson, “Step algebras of semisimple subalgebras of Lie algebras”, *Rep. Math. Phys.*, **4:4** (1973), 307–318.
- [2] Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, “Проекционные операторы для простых групп Ли. II. Общая схема построения понижающих операторов. Случай групп $SU(n)$ ”, *ТМФ*, **15:1** (1973), 107–119.
- [3] V. N. Tolstoy, “Fortieth anniversary of extremal projector method for Lie symmetries”, *Noncommutative Geometry and Representation Theory in Mathematical Physics*, Satellite Conference to the Fourth European Congress of Mathematics (Karlstad University, Karlstad, Sweden, July 5–10, 2004), *Contemporary Mathematics*, **391**, eds. J. Fuchs, J. Mickelsson, G. Rozenblium, A. Stolin, A. Westerberg, AMS, Providence, RI, 2005, 371–384.
- [4] Д. П. Желобенко, *Представления редуктивных алгебр Ли*, Наука, М., 1993.
- [5] О. В. Огиевский, С. М. Хорошкин, “Диагональная редукционная алгебра полной линейной алгебры Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **44:3** (2010), 27–49.
- [6] S. Khoroshkin, O. V. Ogievetsky, “Structure constants of diagonal reduction algebras of $\mathfrak{gl}$ type”, *SIGMA*, **7** (2011), 064, 34 pp.
- [7] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, *Diagonal reduction algebra and reflection equation*, arXiv: 1510.05258.
- [8] J. Wess, B. Zumino, “Covariant differential calculus on the quantum hyperplane”, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **18:2** (1990), 302–312.

- [9] G. Felder, “Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, Switzerland, August 3–11, 1994), ed. S. D. Chatterji, Birkhäuser, Basel, 1995, 1247–1255.
- [10] J.-L. Gervais, A. Neveu, “Novel triangle relation and absence of tachyons in Liouville string field theory”, *Nucl. Phys. B*, **238**:1 (1984), 125–141.
- [11] P. Etingof, O. Schiffmann, “Lectures on the dynamical Yang–Baxter equations”, *Quantum Groups and Lie Theory* (Durham, UK, July 19–29, 1999), London Mathematical Society Lecture Note Series, **290**, ed. A. Pressley, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 89–129.
- [12] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, “Rings of fractions of reduction algebras”, *Algebras and Representation Theory*, **17**:1 (2014), 265–274.
- [13] I. M. Gelfand, A. A. Kirillov, “Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **31** (1966), 5–19.
- [14] O. Ogievetsky, “Differential operators on quantum spaces for $GL_q(n)$ and $SO_q(n)$ ”, *Lett. Math. Phys.*, **24**:3 (1992), 245–255.
- [15] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, “Mickelsson algebras and Zhelobenko operators”, *J. Algebra*, **319**:5 (2008), 2113–2165.
- [16] B. Herlemont, O. Ogievetsky, *Differential calculus on $\mathbf{h}$ -deformed spaces*, arXiv:1704.05330.
- [17] O. Ogievetsky, T. Popov, “ R -matrices in rime”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **14**:2 (2010), 439–505.
- [18] M. Artin, *Noncommutative Rings; Lecture Notes*, 1999, <http://math.mit.edu/~etingof/artinnotes.pdf>.
- [19] И. В. Чередник, “Факторизующиеся частицы на полупрямой и системы корней”, *ТМФ*, **61**:1 (1984), 35–44.
- [20] E. K. Sklyanin, “Boundary conditions for integrable quantum systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**:10 (1988), 2375–2389.
- [21] N. Yu. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky, “Central extensions of quantum current groups”, *Lett. Math. Phys.*, **19**:2 (1990), 133–142.
- [22] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Algebraic structures related to the reflection equations”, *J. Phys. A*, **25**:22 (1992), 5963–5975.
- [23] A. P. Isaev, O. V. Ogievetsky, “On baxterized solutions of reflection equation and integrable chain models”, *Nucl. Phys. B*, **760**:3 (2007), 167–183, arXiv:math-ph/0510078.
- [24] A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov, “Generalized Cayley–Hamilton–Newton identities”, *Czechoslovak J. Phys.*, **48**:11 (1998), 1369–1374.
- [25] A. P. Isaev, A. I. Molev, O. V. Ogievetsky, “A new fusion procedure for the Brauer algebra and evaluation homomorphisms”, *Int. Math. Res. Notices*, **2012**:11 (2012), 2571–2606.
- [26] A. P. Isaev, A. I. Molev, O. V. Ogievetsky, “Idempotents for Birman–Murakami–Wenzl algebras and reflection equation”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **18**:1 (2014), 1–25.