Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Структуры Ли–Пуассона над дифференциальными алгебрами, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 3, 459–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:18:55

© 2017 г.

В. В. Жаринов*

СТРУКТУРЫ ЛИ–ПУАССОНА НАД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ АЛГЕБРАМИ

На основе ключевых элементов подхода Олвера к гамильтоновым эволюционным уравнениям в частных производных предложена алгебраическая конструкция, пригодная для представления гамильтоновых эволюционных систем со связями.

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, структура Ли–Пуассона, дифференциальный бикомплекс, гамильтоново отображение, гамильтонова эволюционная система в частных производных, констрейнт (связь).

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9329>

1. ВВЕДЕНИЕ

В своей книге [1] (см. гл. 7) Олвер развил гамильтонов подход к эволюционным системам дифференциальных уравнений в частных производных. По существу, главная компонента его техники – построение структуры Ли–Пуассона над дифференциальной алгеброй дифференциальных функций (см. п. 4.2 настоящей статьи), ассоциированной с эволюционной системой без связей (констрейнта).

В данной статье, используя ключевые элементы схемы Олвера, мы предлагаем общую алгебраическую конструкцию, пригодную, в частности, для описания гамильтоновых эволюционных систем уравнений в частных производных со связями. А именно, в чисто алгебраической манере мы даем описание структур Ли–Пуассона над произвольными дифференциальными алгебрами. Главный результат статьи – теорема 1, являющаяся алгебраическим аналогом теоремы 7.8 из книги [1], характеризующая гамильтоновы операторы над изучаемой дифференциальной алгеброй. Наши абстрактные результаты можно использовать следующим образом. Для данных связей (системы уравнений в частных производных по пространственным переменным) следует определить подходящую дифференциальную алгебру, а затем искать гамильтонов оператор, совместимый с данной эволюционной системой. Отметим, что обе эти задачи довольно сложны. Более того, вторая задача разрешима чрезвычайно редко, каждый разрешимый случай – огромный успех и важный шаг в изучении данной эволюционной системы со связями.

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: zharinov@mi.ras.ru

Далее мы используем следующие стандартные обозначения:

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$,
- $M = \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$,
- $\mathbb{I} = \mathbb{Z}_+^M = \{i = (i^1, \dots, i^m) \mid i^\mu \in \mathbb{Z}_+, \mu \in M\}$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

2.1. Основная алгебра. Пусть $\mathcal{F}$ – ассоциативная коммутативная унитарная алгебра над числовым полем $\mathbb{F}$. Обозначим через $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{F})$ множество всех дифференцирований алгебры $\mathcal{F}$, т.е. всех линейных (здесь и всюду ниже *линейное* означает $\mathbb{F}$ -линейное) отображений $X: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ (другими словами, всех $X \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{F})$), удовлетворяющих *правилу Лейбница*

$$X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg) \quad \text{для всех } f, g \in \mathcal{F}.$$

Множество $\mathfrak{D}$ обладает двумя согласованными структурами, а именно: структурой алгебры Ли с коммутатором $X, Y \mapsto [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ в качестве скобок Ли, структурой $\mathcal{F}$ -модуля, $(f \cdot X)g = f \cdot (Xg)$, и условием согласования $[X, g \cdot Y] = (Xg) \cdot Y + g \cdot [X, Y]$ для всех $f, g \in \mathcal{F}$, $X, Y \in \mathfrak{D}$.

Для любой пары множеств индексов A, B определен $\mathcal{F}$ -модуль

$$\mathcal{F}_B^A = \{\eta = (\eta_\beta^\alpha) \mid \eta_\beta^\alpha \in \mathcal{F}, \alpha \in A, \beta \in B\},$$

причем произведение $f \cdot \eta$, $f \in \mathcal{F}$, $\eta \in \mathcal{F}_B^A$, задается покомпонентно: $(f \cdot \eta)_\beta^\alpha = f \cdot \eta_\beta^\alpha$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$.

Для любого $\mathcal{F}$ -модуля $\mathcal{F}_B^A$ и любого дифференцирования $X \in \mathfrak{D}$ линейное отображение $X: \mathcal{F}_B^A \rightarrow \mathcal{F}_B^A$ определено покомпонентно, т.е. $\eta = (\eta_\beta^\alpha) \mapsto X\eta = (X\eta_\beta^\alpha)$. В частности, правило Лейбница принимает вид $X(f \cdot \eta) = (Xf) \cdot \eta + f \cdot (X\eta)$ для всех $X \in \mathfrak{D}$, $f \in \mathcal{F}$, $\eta \in \mathcal{F}_B^A$.

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_B^A$ $\mathcal{F}$ -модуль всех элементов $\eta = (\eta_\beta^\alpha) \in \mathcal{F}_B^A$, таких что для всякого верхнего индекса $\alpha \in A$ только конечное число компонент $\eta_\beta^\alpha \neq 0$. В частности, $\overset{\circ}{\mathcal{F}}^A = \mathcal{F}^A$ для любого множества индексов A , тогда как $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_B$ состоит из всех финитных элементов $\eta = (\eta_\beta) \in \mathcal{F}_B$ и $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_B = \mathcal{F}_B$ тогда и только тогда, когда множество индексов B конечно.

Элементы $\phi = (\phi^\alpha) \in \mathcal{F}^A$ с верхними индексами можно рассматривать как “векторы”, элементы $\xi = (\xi_\alpha) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_A$ с нижними индексами – как “ковекторы”, а элементы с кратными индексами – как “тензоры”. По повторяющимся верхним и нижним индексам подразумевается суммирование, которое можно рассматривать как “спаривание”. Множества индексов могут быть бесконечными, но мы будем заботиться о том, чтобы все формально бесконечные суммы фактически были конечными.

2.2. Комплекс де Рама. $\mathcal{F}$ -модули $\Omega^q = \Omega^q(\mathcal{F})$, $q \in \mathbb{Z}_+$, q -форм над алгеброй $\mathcal{F}$ со значениями в $\mathcal{F}$ определяются следующим образом:

$$\Omega^0 = \mathcal{F}, \quad \Omega^q = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\wedge_{\mathcal{F}}^q \mathfrak{D}; \mathcal{F}), \quad q \in \mathbb{N}.$$

Прямая сумма $\Omega = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q$ (здесь $\bigoplus = \bigoplus_{\mathcal{F}}$) имеет естественную структуру внешней алгебры. Внешний дифференциал $d \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ задается формулой Картана

$$d\omega(X_0, \dots, X_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq r \leq q} (-1)^r X_r(\omega(X_0, \dots, \check{X}_r, \dots, X_q)) + \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq r < s \leq q} (-1)^{r+s} \omega([X_r, X_s], X_0, \dots, \check{X}_r, \dots, \check{X}_s, \dots, X_q) \right\}$$

для всех $q \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega^q$, $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{D}$ (здесь и всюду далее предполагается, что аргумент под “галочкой” пропускается).

По построению $d^q = d|_{\Omega^q}: \Omega^q \rightarrow \Omega^{q+1}$, $q \in \mathbb{Z}_+$, и $d \circ d = 0$. Таким образом, определен комплекс де Рама $\{\Omega^q; d^q\}$ алгебры $\mathcal{F}$ (см., например, статью [2]). Линейные пространства когомологий этого комплекса суть $H^q = H^q(\mathcal{F}) = \text{Ker } d^q / \text{Im } d^{q-1}$, где $q \in \mathbb{Z}_+$, $\text{Ker } d^q = \{\omega \in \Omega^q \mid d\omega = 0\}$, $\text{Im } d^{q-1} = \{\omega = d\chi \mid \chi \in \Omega^{q-1}\} = d\Omega^{q-1}$ ($\Omega^{-1} = 0$).

2.3. Дифференциальная алгебра. Основные предположения. Алгебра $\mathcal{F}$ называется дифференциальной, если выделена подалгебра $\mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_H(\mathcal{F})$ алгебры Ли $\mathfrak{D}$, обладающая $\mathcal{F}$ -базисом $D = \{D_\mu \mid \mu \in M\}$, причем коммутаторы $[D_\mu, D_\nu] = 0$, $\mu, \nu \in M$. Отметим, что дифференциальная алгебра $\mathcal{F}$ фактически является парой $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$ (см., например, работы [3], [4]).

Пусть $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$ – изучаемая дифференциальная алгебра.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Мы предполагаем, что $\mathcal{F}$ -модуль $\mathfrak{D}$ разбит на прямую сумму $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_V \oplus_{\mathcal{F}} \mathfrak{D}_H$ (здесь и всюду ниже V обозначает вертикальную компоненту, а H – горизонтальную компоненту), где $\mathfrak{D}_V = \mathfrak{D}_V(\mathcal{F})$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$ такая, что коммутатор $[D, \mathfrak{D}_V] \subset \mathfrak{D}_V$ (т.е. $[D_\mu, V] \in \mathfrak{D}_V$ для всех $V \in \mathfrak{D}_V$ и $\mu \in M$). Более того, мы предполагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{D}_V$ имеет формальный $\mathcal{F}$ -базис $\{\partial_a \mid a \in \mathbf{A}\}$, где $[\partial_a, \partial_b] = 0$, $a, b \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ – множество индексов. В этом случае $[D_\mu, \partial_a] = \Gamma_{\mu a}^b \cdot \partial_b$, где символ $\Gamma = (\Gamma_{\mu a}^b) \in \mathring{\mathcal{F}}_{MA}^{\mathbf{A}}$, $a, b \in \mathbf{A}$, $\mu \in M$. Заметим, что здесь множество M конечно, тогда как множество $\mathbf{A}$, как правило, бесконечно, но согласно введенным выше обозначениям для всякого индекса $b \in \mathbf{A}$ только конечное число коэффициентов $\Gamma_{\mu a}^b \neq 0$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Для всякого элемента $f \in \mathcal{F}$ действие $\partial_a f \neq 0$ только для конечного числа индексов $a \in \mathbf{A}$ (т.е. $\partial f = (\partial_a f) \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}$). В частности, $\mathfrak{D}_V = \{V = \phi^a \cdot \partial_a \mid \phi^a \in \mathcal{F}\}$, и действие формально бесконечной суммы $\phi^a \cdot \partial_a$ на алгебре $\mathcal{F}$ корректно определено.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Дифференциальная алгебра $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$ является алгеброй типа *до Бюа-Реймонда*, т.е. обладает следующим свойством: равенство $\phi \cdot \psi = D_\mu \chi^\mu$ имеет место для фиксированного элемента $\phi \in \mathcal{F}$, всех $\psi \in \mathcal{F}$ и некоторых “векторов” $\chi^\mu = \chi^\mu(\phi, \psi) \in \mathcal{F}$, $\mu \in M$, тогда и только тогда, когда $\phi = 0$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_E = \mathfrak{D}_E(\mathcal{F}) = \{V \in \mathfrak{D}_V \mid [D_\mu, V] = 0, \mu \in M\}$ множество всех эволюционных дифференцирований алгебры $\mathcal{F}$. Множество $\mathfrak{D}_E$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}_V$, поскольку $[\mathfrak{D}_E, \mathfrak{D}_E] \subset \mathfrak{D}_E$ в силу тождества Якоби для коммутаторов, но оно не является подмодулем $\mathcal{F}$ -модуля $\mathfrak{D}_V$ (см., например, работу [5]).

Рассмотрим множество $\mathcal{E} = \text{Ker } \nabla = \{\phi = (\phi^a) \in \mathcal{F}^{\mathbf{A}} \mid \nabla \phi = 0\}$, где

$$\nabla: \mathcal{F}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{A}}, \quad \phi = (\phi^a) \mapsto \eta = (\eta_{\mu}^a), \quad \eta_{\mu}^a = D_{\mu} \phi^a + \Gamma_{\mu b}^a \cdot \phi^b.$$

Очевидно, что множество $\mathcal{E}$ обладает структурой линейного подпространства линейного пространства $\mathcal{F}^{\mathbf{A}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение $\text{ev}: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{D}_{\mathbf{E}}, \phi = (\phi^a) \mapsto U = \text{ev } \phi = \phi^a \cdot \partial_a$, есть изоморфизм линейных пространств. Более того, структура алгебры Ли на $\mathfrak{D}_{\mathbf{E}}$ задает изоморфную структуру на $\mathcal{E}$ правилом*

$$W = [U, V] \mapsto \xi = [\phi, \psi], \quad U = \phi^a \cdot \partial_a, \quad V = \psi^a \cdot \partial_a, \quad W = \xi^a \cdot \partial_a,$$

$$\text{где } \xi^a = U\psi^a - V\phi^a, \quad a \in \mathbf{A}.$$

2.4. Дифференциальный бикомплекс. Разбиение $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\mathbf{V}} \oplus_{\mathcal{F}} \mathfrak{D}_{\mathbf{H}}$ дифференцирований приводит к соответствующему разбиению дифференциальных форм $\Omega = \oplus_{p,q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^{pq}$, где

$$\Omega^{pq} = \Omega_{\mathbf{V}}^p \wedge_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathbf{H}}^q, \quad \Omega_{\mathbf{V}}^p = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\wedge_{\mathcal{F}}^p \mathfrak{D}_{\mathbf{V}}; \mathcal{F}), \quad \Omega_{\mathbf{H}}^q = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\wedge_{\mathcal{F}}^q \mathfrak{D}_{\mathbf{H}}; \mathcal{F});$$

в частности, $\Omega^{00} = \Omega_{\mathbf{V}}^0 = \Omega_{\mathbf{H}}^0 = \mathcal{F}$ (здесь $\oplus = \oplus_{\mathcal{F}}$).

Аналогичным образом внешний дифференциал $d: \Omega \rightarrow \Omega$ разбивается на две компоненты: $d = d_{\mathbf{V}} + d_{\mathbf{H}}$, где

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{V}}^{pq} &= d_{\mathbf{V}}|_{\Omega^{pq}}: \Omega^{pq} = \Omega_{\mathbf{V}}^p \wedge_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathbf{H}}^q \rightarrow \Omega_{\mathbf{V}}^{p+1} \wedge_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathbf{H}}^q = \Omega^{p+1,q}, \\ d_{\mathbf{H}}^{pq} &= d_{\mathbf{H}}|_{\Omega^{pq}}: \Omega^{pq} = \Omega_{\mathbf{V}}^p \wedge_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathbf{H}}^q \rightarrow \Omega_{\mathbf{V}}^p \wedge_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathbf{H}}^{q+1} = \Omega^{p,q+1}. \end{aligned}$$

Тождество $d \circ d = 0$ влечет тождества

$$d_{\mathbf{V}} \circ d_{\mathbf{V}} = d_{\mathbf{V}} \circ d_{\mathbf{H}} + d_{\mathbf{H}} \circ d_{\mathbf{V}} = d_{\mathbf{H}} \circ d_{\mathbf{H}} = 0.$$

Далее, $\mathcal{F}$ -модуль $\Omega_{\mathbf{V}}^1 = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{V}}; \mathcal{F}) = \mathfrak{D}_{\mathbf{V}}^*$ имеет дуальный $\mathcal{F}$ -базис $\{\rho^a \mid a \in \mathbf{A}\}$, $\rho^a(\partial_b) = \delta_b^a$, $a, b \in \mathbf{A}$, так что $\Omega_{\mathbf{V}}^1 = \{\omega_a \cdot \rho^a \mid \omega = (\omega_a) \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}\}$. В общем случае для всякого $p \in \mathbb{N}$ определен $\mathcal{F}$ -модуль

$$\Omega_{\mathbf{V}}^p = \wedge_{\mathcal{F}}^p \Omega_{\mathbf{V}}^1 = \{\omega = \omega_{a_1 \dots a_p} \cdot \rho^{a_1} \wedge \dots \wedge \rho^{a_p} \mid \omega_{a_1 \dots a_p} \in \mathcal{F}\},$$

где только конечное число коэффициентов $\omega_{a_1 \dots a_p} \neq 0$.

Точно так же $\mathcal{F}$ -модуль $\Omega_{\mathbf{H}}^1 = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{H}}; \mathcal{F}) = \mathfrak{D}_{\mathbf{H}}^*$ имеет дуальный $\mathcal{F}$ -базис $\{\vartheta^{\mu} \mid \mu \in \mathbf{M}\}$, $\vartheta^{\mu}(D_{\nu}) = \delta_{\nu}^{\mu}$, так что $\Omega_{\mathbf{H}}^1 = \{\omega_{\mu} \cdot \vartheta^{\mu} \mid \omega_{\mu} \in \mathcal{F}\}$. Для любого $q \in \mathbb{N}$ справедливо представление $\Omega_{\mathbf{H}}^q = \wedge_{\mathcal{F}}^q \Omega_{\mathbf{H}}^1$ (фактически, $\Omega_{\mathbf{H}}^q = 0$ при $q > m$).

Равенство $d(\omega \wedge \chi) = (d\omega) \wedge \chi + (-1)^{\text{ord } \omega} \omega \wedge (d\chi)$, $\omega, \chi \in \Omega$, влечет аналогичные равенства для $d_{\mathbf{V}}$ и $d_{\mathbf{H}}$.

Легко проверить, что

- $d_{\mathbf{V}} L = \partial_a L \cdot \rho^a, \quad d_{\mathbf{H}} L = D_{\mu} L \cdot \vartheta^{\mu}, \quad L \in \Omega^0 = \mathcal{F},$
- $d_{\mathbf{V}} \rho^a = 0, \quad d_{\mathbf{H}} \rho^a = \Gamma_{\mu b}^a \cdot \rho^b \wedge \vartheta^{\mu}, \quad a \in \mathbf{A}, \mu \in \mathbf{M},$
- $d_{\mathbf{V}} \vartheta^{\mu} = 0, \quad d_{\mathbf{H}} \vartheta^{\mu} = 0, \quad \mu \in \mathbf{M}.$

Так, например, пусть $\omega = \omega_a \cdot \rho^a \in \Omega_V^1$, $\chi = \chi_\mu \cdot \vartheta^\mu \in \Omega_H^1$, тогда

- $d_V \omega = d_V \omega_a \wedge \rho^a + \omega_a \cdot d_V \rho^a = \partial_{[a} \omega_{b]} \cdot \rho^a \wedge \rho^b$, где $\partial_{[a} \omega_{b]} = (\partial_a \omega_b - \partial_b \omega_a)/2$,
- $d_H \omega = d_H \omega_a \wedge \rho^a + \omega_a \cdot d_H \rho^a = (-D_\mu \omega_a + \Gamma_{\mu a}^b \cdot \omega_b) \cdot \rho^a \wedge \vartheta^\mu$,
- $d_V \chi = d_V \chi_\mu \wedge \vartheta^\mu + \chi_\mu \cdot d_V \vartheta^\mu = \partial_a \chi_\mu \cdot \rho^a \wedge \vartheta^\mu$,
- $d_H \chi = d_H \chi_\mu \wedge \vartheta^\mu + \chi_\mu \cdot d_H \vartheta^\mu = \partial_{[\mu} \chi_{\nu]} \cdot \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu$, где $\partial_{[\mu} \chi_{\nu]} = (\partial_\mu \chi_\nu - \partial_\nu \chi_\mu)/2$.

В частности, определен бикомплекс $\{\Omega^{pq}; d_V^{pq}, d_H^{pq}\}$ с пространствами когомологий $H_V^{pq} = \text{Ker } d_V^{pq} / \text{Im } d_V^{p-1,q}$ и $H_H^{pq} = \text{Ker } d_H^{pq} / \text{Im } d_H^{p,q-1}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

2.5. Основные ингредиенты. Нам понадобится правый нижний угол введенного выше бикомплекса:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & d_V^{1,m-1} & & d_V^{1m} & \\
 \dots & \xrightarrow{d_H^{1,m-2}} & \Omega^{1,m-1} & \xrightarrow{d_H^{1,m-1}} & \Omega^{1m} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d_V^{0,m-1} & & \uparrow d_V^{0m} & & \\
 \dots & \xrightarrow{d_H^{0,m-2}} & \Omega^{0,m-1} & \xrightarrow{d_H^{0,m-1}} & \Omega^{0m} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Положим $\vartheta = \vartheta^1 \wedge \dots \wedge \vartheta^m$, $\vartheta_\mu = (-1)^{\mu-1} \vartheta^1 \wedge \dots \wedge \check{\vartheta}^\mu \wedge \dots \wedge \vartheta^m$, так что $\vartheta^\mu \wedge \vartheta_\nu = \delta_\nu^\mu \vartheta$, $\mu, \nu \in M$. С этими обозначениями имеют место представления

- $\Omega^{0,m-1} = \{\omega = \psi^\mu \cdot \vartheta_\mu \mid \psi = (\psi^\mu) \in \mathcal{F}^M\} \simeq \mathcal{F}^M$,
- $\Omega^{0m} = \{\omega = L \cdot \vartheta \mid L \in \mathcal{F}\} \simeq \mathcal{F}$,
- $\Omega^{1,m-1} = \{\omega = \chi_a^\mu \cdot \rho^a \wedge \vartheta_\mu \mid \chi = (\chi_a^\mu) \in \mathring{\mathcal{F}}_A^M\} \simeq \mathring{\mathcal{F}}_A^M$,
- $\Omega^{1m} = \{\omega = f_a \cdot \rho^a \wedge \vartheta \mid \mathbf{f} = (f_a) \in \mathring{\mathcal{F}}_A\} \simeq \mathring{\mathcal{F}}_A$.

Далее,

- $d_H^{0,m-1}: \Omega^{0,m-1} \rightarrow \Omega^{0m}, \quad \omega = \psi^\mu \cdot \vartheta_\mu \mapsto d_H \omega = \text{Div } \psi \cdot \vartheta$,
- $d_H^{1,m-1}: \Omega^{1,m-1} \rightarrow \Omega^{1m}, \quad \omega = \chi_a^\mu \cdot \rho^a \wedge \vartheta_\mu \mapsto d_H \omega = (\nabla^* \chi)_a \cdot \rho^a \wedge \vartheta$,
- $d_V^{0m}: \Omega^{0m} \rightarrow \Omega^{1m}, \quad \omega = L \cdot \vartheta \mapsto d_V \omega = (\partial L)_a \cdot \rho^a \wedge \vartheta$,

где

- $\text{Div} = -D^*: \mathcal{F}^M \rightarrow \mathcal{F}, \quad \psi = (\psi^\mu) \mapsto \text{Div } \psi = D_\mu \psi^\mu$
 $(D: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_M, \quad L \mapsto \zeta = (\zeta_\mu), \quad \zeta_\mu = D_\mu L),$
- $\nabla^*: \mathring{\mathcal{F}}_A^M \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_A, \quad \chi = (\chi_a^\mu) \mapsto \nabla^* \chi, \quad (\nabla^* \chi)_a = -D_\mu \chi_a^\mu + \Gamma_{\mu a}^b \cdot \chi_b^\mu$,
- $\partial: \mathcal{F} \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_A, \quad L \mapsto \partial L, \quad (\partial L)_a = \partial_a L.$

Таким образом,

- $H_{\mathbb{H}}^{0m} = \Omega^{0m} / d_{\mathbb{H}}^{0,m-1} \Omega^{0,m-1} = \mathcal{F} / \text{Div } \mathcal{F}^M, \quad \text{Div } \mathcal{F}^M = \text{Im Div},$
 - $H_{\mathbb{H}}^{1m} = \Omega^{1m} / d_{\mathbb{H}}^{1,m-1} \Omega^{1,m-1} = \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}} / \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M, \quad \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M = \text{Im } \nabla^*,$
 - $[d_{\mathbb{V}}^{0m}] : H_{\mathbb{H}}^{0m} \rightarrow H_{\mathbb{H}}^{1m}, \quad [\omega] \mapsto [d_{\mathbb{V}}][\omega] = [d_{\mathbb{V}}\omega],$
- т. е. $[d_{\mathbb{V}}^{0m}] : \mathcal{F} / \text{Div } \mathcal{F}^M \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}} / \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M, \quad [L] \mapsto [\partial L].$

Мы будем использовать обозначения

- $\mathfrak{F} = H_{\mathbb{H}}^{0m} = \mathcal{F} / \text{Div } \mathcal{F}^M = \{\int L = [L] = L + \text{Div } \mathcal{F}^M \mid L \in \mathcal{F}\},$
- $\mathcal{S} = H_{\mathbb{H}}^{1m} = \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}} / \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M = \{[\mathbf{f}] = \mathbf{f} + \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M \mid \mathbf{f} \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}\},$
- $\boldsymbol{\delta} = [d_{\mathbb{V}}^{0m}] : \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \int L \mapsto \boldsymbol{\delta} \int L = [\partial L] = \partial L + \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M.$

Определены естественные спаривания

- $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}} \times \mathcal{F}^{\mathbb{A}} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \mathbf{f} = (f_a), \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi^a) \mapsto \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\phi} \rangle = f_a \cdot \phi^a,$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M \times \mathcal{F}_{\mathbb{M}}^{\mathbb{A}} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \boldsymbol{\chi} = (\chi_a^\mu), \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_\mu^a) \mapsto \langle \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \chi_a^\mu \cdot \eta_\mu^a$

и линейное отображение (естественная проекция в точной последовательности $\mathbb{F}$ -линейных пространств $0 \rightarrow \text{Div } \mathcal{F}^M \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow 0$)

- $\int : \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{F}, \quad L \mapsto \int L = L + \text{Div } \mathcal{F}^M.$

Легко проверяются следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{E}$ образ $\text{ev}_{\boldsymbol{\phi}} \text{Div } \mathcal{F}^M \subset \text{Div } \mathcal{F}^M$; в частности, определено отображение $\text{ev}_{\boldsymbol{\phi}} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ правилом $\text{ev}_{\boldsymbol{\phi}} \int K = \int \text{ev}_{\boldsymbol{\phi}} K$ для всякого $K \in \mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Отображение $\nabla^* : \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}$ является дуальным по Лагранжу к отображению $\nabla : \mathcal{F}^{\mathbb{A}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{M}}^{\mathbb{A}}$, т. е. для любых $\boldsymbol{\chi} \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M$ и $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{F}^{\mathbb{A}}$ имеет место формула Грина $\langle \boldsymbol{\chi}, \nabla \boldsymbol{\phi} \rangle - \langle \nabla^* \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\phi} \rangle = \text{Div } \psi$, где $\psi = (\psi^\mu) \in \mathcal{F}^M$, $\psi^\mu = \chi_a^\mu \cdot \phi^a$ (другими словами, $\int (\langle \boldsymbol{\chi}, \nabla \boldsymbol{\phi} \rangle - \langle \nabla^* \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\phi} \rangle) = 0$).

Нам понадобится следующее дуальное линейное пространство:

$$\mathcal{S}^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{S}; \mathfrak{F}) = \{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{F}^{\mathbb{A}} \mid \int \langle \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M, \boldsymbol{\phi} \rangle = 0\} = \{\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{F}^{\mathbb{A}} \mid \int \langle \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}^M, \nabla \boldsymbol{\phi} \rangle = 0\} = \mathcal{E}.$$

Последнее равенство имеет место в силу свойства дю Буа–Реймонда дифференциальной алгебры $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_{\mathbb{H}})$ (напомним, что $\mathcal{E} = \text{Ker } \nabla$). Заметим, что для любого $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{F}^{\mathbb{A}}$ линейное отображение $\boldsymbol{\phi} : \mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{F}$ задается правилом $[\mathbf{f}] \mapsto \int \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\phi} \rangle$ для всех $\mathbf{f} \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}$. В частности, определено спаривание

$$\mathcal{S} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{F}, \quad [\mathbf{f}], \boldsymbol{\phi} \mapsto \int \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\phi} \rangle = \int f_a \cdot \phi^a.$$

3. СТРУКТУРА ЛИ–ПУАССОНА

3.1. Определение. Структура Ли–Пуассона над дифференциальной алгеброй $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_{\mathbb{H}})$ есть билинейное отображение (скобка Ли–Пуассона)

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}, \quad \int K, \int L \mapsto \{\int K, \int L\}$$

со свойствами

- $\{\int K, \int L\} + \{\int L, \int K\} = 0$ (кососимметричность),
- $\mathbf{JL}(\int K, \int L, \int M) = \{\int K, \{\int L, \int M\}\} + \text{с. п.} = 0$ (тождество Якоби),

где сокращение “с. п.” означает циклическую перестановку аргументов $\int K, \int L, \int M \in \mathfrak{F}$. В этом случае пара $(\mathfrak{F}, \{\cdot, \cdot\})$ есть алгебра Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Скобка Ли–Пуассона не является скобкой Пуассона в классическом смысле, поскольку она не удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$\{fK, fL \cdot fM\} = \{fK, fL\} \cdot fM + fL \cdot \{fK, fM\},$$

произведение $fK \cdot fL$ даже не определено в линейном пространстве $\mathfrak{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скобку $\{\cdot, \cdot\}: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ определим следующим образом:

$$\{fK, fL\} = f\langle \delta K, \Lambda \delta L \rangle = f\langle \partial K, \Lambda \partial L \rangle, \quad fK, fL \in \mathfrak{F},$$

где линейное отображение $\Lambda: \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{F}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{f} \mapsto \boldsymbol{\phi} = \Lambda \mathbf{f}$, обладает свойствами $\Lambda \circ \nabla^* = 0$ и $\nabla \circ \Lambda = 0$.

Это определение корректно в силу двух последних равенств, поскольку в этом случае

$$f\langle \mathbf{f} + \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}}, \Lambda(\mathbf{g} + \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}}) \rangle = f\langle \mathbf{f}, \Lambda \mathbf{g} \rangle \quad \text{для всех } \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для всех $K, L \in \mathcal{F}$ имеет место представление

$$f\langle \partial K, \Lambda \partial L \rangle = f \operatorname{ev}_{\boldsymbol{\phi}(L)} K, \quad \boldsymbol{\phi}(L) = \Lambda \partial L \in \mathcal{E}.$$

Кососимметричность и тождество Якоби налагают на отображение дополнительные ограничения.

Кососимметричность сводится к свойству

$$f(\langle \partial K, \Lambda \partial L \rangle + \langle \partial L, \Lambda \partial K \rangle) = 0 \quad \text{для всех } K, L \in \mathcal{F},$$

оно заведомо имеет место, если отображение Λ – антидуальное по Лагранжу, т. е. если $f(\langle \mathbf{f}, \Lambda \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{g}, \Lambda \mathbf{f} \rangle) = 0$ для всех $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}$. Последнее условие является также необходимым, если образ $\operatorname{Im} \partial = \partial \mathcal{F} \subset \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}$ обладает свойством дю Буа–Реймонда в подходящем смысле.

С тождеством Якоби ситуация намного сложнее.

Прежде всего напомним один простой факт о когомологиях алгебр Ли. Пусть V есть линейное пространство и

$$\Omega(V) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q(V), \quad \Omega^0(V) = V, \quad \Omega^q(V) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\wedge_{\mathbb{F}}^q V; V), \quad q \in \mathbb{N},$$

есть градуированное линейное пространство форм на V со значениями в V . Пусть, кроме того, определена кососимметричная билинейная операция $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$. Определим градуированный линейный эндоморфизм

$$d \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(V)), \quad d|_{\Omega^q(V)}: \Omega^q(V) \rightarrow \Omega^{q+1}(V), \quad \omega \rightarrow d\omega,$$

формулой Картана

$$d\omega(u_0, \dots, u_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq r \leq q} (-1)^r [u_r, \omega(u_0, \dots, \check{u}_r, \dots, u_q)] + \sum_{0 \leq r < s \leq q} (-1)^{r+s} \omega([u_r, u_s], u_0, \dots, \check{u}_r, \dots, \check{u}_s, \dots, u_q) \right\},$$

где $u_0, \dots, u_q \in V$. Эндоморфизм d есть внешний дифференциал, т.е. $d \circ d = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется тождество Якоби

$$\mathbf{JI}(u, v, w) = [u, [v, w]] + \text{с. п.} = 0, \quad u, v, w \in V$$

(т.е. V имеет структуру алгебры Ли).

В частности, пусть $u \in V = \Omega^0(V)$, тогда

$$du(v) = [v, u] \quad \text{и} \quad ((d \circ d)u)(v, w) = \frac{1}{2} \mathbf{JI}(u, v, w), \quad v, w \in V.$$

В нашем случае $V = \mathfrak{F}$, $[\cdot, \cdot] = \{\cdot, \cdot\}$ и справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Тождество Якоби для кососимметричного билинейного отображения $\{\cdot, \cdot\}: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$, $\int K, \int L \mapsto \{\int K, \int L\}$ имеет место тогда и только тогда, когда соответствующее линейное отображение $d: \Omega(\mathfrak{F}) \rightarrow \Omega(\mathfrak{F})$ есть внешний дифференциал.*

Для получения каких-либо практических результатов касательно тождества Якоби нам необходимы дополнительные технические инструменты и предположения.

3.2. Линейные дифференциальные операторы. Для любого заданного $i = (i^1, \dots, i^m) \in \mathbb{I}$ положим $D^i = (D_1)^{i^1} \dots (D_m)^{i^m}$.

Обозначим через

$$\mathcal{F}[D] = \{P(D) = P_i \cdot D^i \mid P = (P_i) \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{I}}\}$$

унитальную ассоциативную алгебру всех многочленов (дифференциальных многочленов) от переменных $D = (D_1, \dots, D_m)$ с коэффициентами из алгебры $\mathcal{F}$. Каждый многочлен $P(D) \in \mathcal{F}[D]$ задает линейное отображение (линейный дифференциальный оператор)

$$P(D): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \quad L \mapsto P(D)L = P_i \cdot D^i L.$$

Умножение в $\mathcal{F}[D]$ задается как композиция дифференциальных операторов.

Аналогичным образом для данной пары множеств индексов $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ обозначим через

$$\mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}[D] = \{P(D) = P_i \cdot D^i = (P_{ib}^a \cdot D^i) \mid P = (P_{ib}^a) \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{I}\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}\}$$

$\mathcal{F}[D]$ -модуль всех многочленов от переменных $D = (D_1, \dots, D_m)$ с коэффициентами из $\mathcal{F}$ -модуля $\mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$. Каждый многочлен $P(D) \in \mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}[D]$ задает линейные отображения

$$\begin{aligned} P(D): \mathcal{F}^{\mathbf{B}} &\rightarrow \mathcal{F}^{\mathbf{A}}, & \psi = (\psi^b) &\mapsto \phi = (\phi^a), & \phi^a &= P_{ib}^a \cdot D^i \psi^b, \\ P(D): \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}} &\rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}}, & \mathbf{f} = (f_a) &\mapsto \mathbf{g} = (g_b), & g_b &= P_{ib}^a \cdot D^i f_a. \end{aligned}$$

Например,

- $D \in \mathcal{F}_M[D]$, $D: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_M$, $K \mapsto DK$, $(DK)_\mu = D_\mu K$, $\mu \in M$,
- $\text{Div} \in \mathcal{F}_M[D]$, $\text{Div}: \mathcal{F}^M \rightarrow \mathcal{F}$, $\psi = (\psi^\mu) \mapsto \text{Div} \psi = D_\mu \psi^\mu$,
- $\nabla \in \mathcal{F}_{MA}^A$, $\nabla: \mathcal{F}^A \rightarrow \mathcal{F}_M^A$, $\phi = (\phi^a) \mapsto \eta = (\eta_\mu^a)$,
 $\eta_\mu^a = D_\mu \phi^a + \Gamma_{\mu b}^a \cdot \phi^b$,
- $\nabla^* \in \mathcal{F}_{MA}^A$, $\nabla^*: \mathring{\mathcal{F}}_M^A \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_A$, $\chi = (\chi_a^\mu) \mapsto \mathbf{f} = (f_a)$,
 $f_a = -D_\mu \chi_a^\mu + \Gamma_{\mu a}^b \cdot \chi_b^\mu$.

Для каждого дифференциального многочлена

$$P(D) = P_i \cdot D^i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \quad L \mapsto P(D)L = P_i \cdot D^i L,$$

определен дуальный по Лагранжу многочлен

$$P^*(D) = P_i^* \cdot D^i = (-D)^i \circ P_i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \quad K \mapsto P^*(D)K = (-D)^i (P_i \cdot K),$$

причем справедлива формула Грина

$$K \cdot P(D)L - P^*(D)K \cdot L = \text{Div} \psi,$$

где “ток” $\psi = (\psi^\mu) \in \mathcal{F}^M$, $\psi^\mu = \psi^\mu(P, K, L)$, можно вычислить явно, используя метод интегрирования по частям. В общем случае, когда многочлен $P(D) \in \mathcal{F}_B^A[D]$, ситуация имеет аналогичный вид. Например, пусть

$$P(D) = (P_i^{ab} \cdot D_i): \mathring{\mathcal{F}}_A \rightarrow \mathcal{F}^A, \quad \mathbf{g} = (g_a) \mapsto \phi = (\phi^a),$$

где $\phi^a = (P(D)\mathbf{g})^a = P_i^{ab} \cdot D^i g_b$ (здесь $a, b \in \mathbf{A} = \mathbf{B}$). Тогда дуальный по Лагранжу многочлен записывается как

$$P^*(D) = ((-D)^i \circ P_i^{ba}): \mathring{\mathcal{F}}_A \rightarrow \mathcal{F}^A, \quad \mathbf{f} = (f_a) \mapsto \xi = (\xi^a),$$

где $\xi^a = (P^*(D)\mathbf{f})^a = (-D)^i (P_i^{ba} \cdot f_b)$, и формула Грина имеет вид

$$\langle \mathbf{f}, P(D)\mathbf{g} \rangle - \langle P^*(D)\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \text{Div} \psi,$$

а “ток” $\psi \in \mathcal{F}^M$ вычисляется явно.

В частности, оператор ∇^* является дуальным по Лагранжу для оператора ∇ , а оператор Div дуален по Лагранжу для оператора $-D$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для каждого многочлена $P(D) = (P_{ib}^a \cdot D^i): \mathcal{F}^B \rightarrow \mathcal{F}^A$, дуального к нему по Лагранжу многочлена $P^*(D) = ((-D)^i \circ P_{ib}^a): \mathring{\mathcal{F}}_A \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_B$ и любого элемента $\phi \in \mathcal{E}$ справедливы следующие утверждения:

- $[\text{ev}_\phi, P(D)] = \text{ev}_\phi P(D) = ((\text{ev}_\phi P_{ib}^a) \cdot D^i)$,
- $[\text{ev}_\phi, P^*(D)] = \text{ev}_\phi P^*(D) = ((-D)^i \circ (\text{ev}_\phi P_{ib}^a)) = [\text{ev}_\phi, P(D)]^*$,

т.е. эволюционное дифференцирование ev_ϕ действует на дифференциальные многочлены покоэффициентно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на характеристическом свойстве эволюционных дифференцирований: $[D_\mu, \text{ev}_\phi] = 0$ для всех $\mu \in M$ и $\phi \in \mathcal{E}$.

3.3. Дополнительные предположения. Чтобы двигаться дальше, нам понадобятся два следующих дополнительных предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. Мы предполагаем, что существует линейный дифференциальный оператор $\mathbf{j} = \mathbf{j}(D): \mathcal{F}^A \rightarrow \mathcal{F}^A$, где A – множество индексов, такой, что

- композиция $\nabla \circ \mathbf{j} = 0$, т. е. $\text{Im } \mathbf{j} \subset \text{Ker } \nabla$,
- коммутатор $[\text{ev}_\phi, \mathbf{j}] = 0$ для всех $\phi \in \mathcal{E}$.

Подробнее, $\mathbf{j}(D) = (j_{i\alpha}^a \cdot D^i) \in \mathcal{F}_A^A[D]$, $\phi = (\phi^\alpha) \mapsto \mathbf{j}\phi = \phi = (\phi^a)$, $\phi^a = j_{i\alpha}^a \cdot D^i \phi^\alpha$.

Обозначим $\mathcal{E} = \mathcal{F}^A$ и $\mathcal{E}^* = \overset{\circ}{\mathcal{F}}_A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Справедливы следующие утверждения:

- определен дуальный по Лагранжу многочлен

$$\mathbf{j}^* = ((-D)^i \circ j_{i\alpha}^a) \in \mathcal{F}_A^A[D], \quad \mathbf{j}^*: \overset{\circ}{\mathcal{F}}_A \rightarrow \mathcal{E}^*, \\ \mathbf{f} = (f_a) \mapsto f = (f_\alpha), \quad f_\alpha = (-D)^i (j_{i\alpha}^a \cdot f_a);$$

- композиция $\mathbf{j}^* \circ \nabla^* = 0$, т. е. $\text{Im } \nabla^* \subset \text{Ker } \mathbf{j}^*$;
- коммутатор $[\text{ev}_\phi, \mathbf{j}^*] = [\text{ev}_\phi, \mathbf{j}]^* = 0$ для всех $\phi \in \mathcal{E}$;
- линейное отображение $\delta = \mathbf{j}^* \circ \partial = \mathbf{j}^* \circ \partial: \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{E}^*$ действует по правилу $\int L \mapsto \delta L = (\delta_\alpha L)$, $\delta_\alpha L = (-D)^i (j_{i\alpha}^a \cdot \partial_a L)$, $\alpha \in A$;
- $\int \langle \delta L, \phi \rangle = \int L_* \phi = \int \text{ev}_{\mathbf{j}\phi} L$, $L \in \mathcal{F}$, $\phi \in \mathcal{E}$, где $L_*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, $\phi = (\phi^\alpha) \mapsto L_* \phi = \partial_a L \cdot j_{i\alpha}^a \cdot D^i \phi^\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на определения, предложение 6 и свойство дю Буа–Реймонда алгебры $\mathcal{F}$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5. Мы предполагаем, что отображение $\Lambda: \overset{\circ}{\mathcal{F}}_A \rightarrow \mathcal{F}^A$ имеет вид $\Lambda = \mathbf{j} \circ \Lambda \circ \mathbf{j}^*$, где кососимметричный по Лагранжу многочлен $\Lambda = (\Lambda_i^{\alpha\beta} \cdot D^i) \in \mathcal{F}^{AA}[D]$, дуальный по Лагранжу многочлен $\Lambda^* = ((-D)^i \circ \Lambda_i^{\beta\alpha}) = -\Lambda \in \mathcal{F}^{AA}[D]$ и Λ, Λ^* такие, что $\mathcal{E}^* = \overset{\circ}{\mathcal{F}}_A \rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{F}^A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. В этих условиях многочлен $\Lambda \in \mathcal{F}^{AA}[D]$ является кососимметричным по Лагранжу и верны равенства $\nabla \circ \Lambda = 0$, $\Lambda \circ \nabla^* = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для любого $\phi \in \mathcal{E}$ справедливо равенство $[\text{ev}_\phi, \Lambda]^* = -[\text{ev}_\phi, \Lambda]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Смотри предложение 6.

3.4. Гамильтоновы операторы. Мы считаем, что выполнены все пять предположений, перечисленные выше.

В этом случае скобка Ли–Пуассона имеет вид

$$\{\int K, \int L\} = \int \langle \delta K, \Lambda \delta L \rangle \quad \text{для всех} \quad \int K, \int L \in \mathfrak{F}.$$

По построению эта скобка кососимметрична, и наша цель теперь состоит в том, чтобы найти по возможности простые и эффективные условия, при которых кососимметричный по Лагранжу дифференциальный многочлен $\Lambda: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}$ гамильтонов, т. е. выполняется тождество Якоби.

Для всякого $R \in \mathcal{F}$ мы полагаем, что $\phi(R) = \Lambda \delta R \in \mathcal{E}$ и $\phi(R) = \mathbf{j}\phi(R) \in \mathcal{E}$.

ЛЕММА 1. Для любых $K, L, M \in \mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\int \langle \text{ev}_{\phi(K)} \delta L, \phi(M) \rangle = \int \langle \text{ev}_{\phi(M)} \delta L, \phi(K) \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \int \langle \text{ev}_{\phi(K)} \delta L, \phi(M) \rangle &= \int \langle \text{ev}_{\phi(K)} (\mathbf{j}^* \circ \partial) L, \phi(M) \rangle = ([\text{ev}_{\phi(K)}, \mathbf{j}^*] = 0) = \\ &= \int \langle \mathbf{j}^* (\text{ev}_{\phi(K)} \partial L), \phi(M) \rangle = (\mathbf{j} \phi(M) = \phi(M)) = \int \langle \text{ev}_{\phi(K)} \partial L, \phi(M) \rangle = \\ &= \int \phi^a(K) \cdot (\partial_a \partial_b L) \cdot \phi^b(M) = \int \phi^b(M) \cdot (\partial_b \partial_a L) \cdot \phi^a(K) = \\ &= \int \langle \text{ev}_{\phi(M)} \delta L, \phi(K) \rangle. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Тождество Якоби имеет представление

$$\mathbf{JI}(\int K, \int L, \int M) = \int \langle \delta K, \Lambda \delta \langle \delta L, \Lambda \delta M \rangle \rangle + \text{с. р.} = \int \langle \delta K, [\text{ev}_{\phi(L)}, \Lambda] \delta M \rangle + \text{с. р.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно.

$$\begin{aligned} \mathbf{JI}(\int K, \int L, \int M) &= \int \langle \delta K, \Lambda \delta \langle \delta L, \Lambda \delta M \rangle \rangle + \text{с. р.} = (\Lambda^* = -\Lambda) = \\ &= - \int \langle \Lambda \delta K, \delta \langle \delta L, \Lambda \delta M \rangle \rangle + \text{с. р.} = (\Lambda \delta K = \phi(K), \delta = \mathbf{j}^* \circ \partial) = \\ &= - \int \langle \phi(K), \mathbf{j}^* \circ \partial \langle \delta L, \Lambda \delta M \rangle \rangle + \text{с. р.} = (\mathbf{j} \phi(K) \cdot \partial = \text{ev}_{\phi(K)}) = \\ &= - \int \langle \text{ev}_{\phi(K)} \langle \delta L, \Lambda \delta M \rangle \rangle + \text{с. р.} = (\Lambda \delta M = \phi(M)) = \\ &= - \int (\langle \text{ev}_{\phi(K)} \delta L, \phi(M) \rangle + \langle \delta L, [\text{ev}_{\phi(K)}, \Lambda] \delta M \rangle + \langle \delta L, \Lambda \text{ev}_{\phi(K)} \delta M \rangle) + \text{с. р.} = \\ &= - \int (\langle \text{ev}_{\phi(K)} \delta L, \phi(M) \rangle + \langle \delta L, [\text{ev}_{\phi(K)}, \Lambda] \delta M \rangle - \langle \text{ev}_{\phi(K)} \delta M, \phi(L) \rangle + \\ &\quad + \langle \text{ev}_{\phi(L)} \delta M, \phi(K) \rangle + \langle \delta M, [\text{ev}_{\phi(L)}, \Lambda] \delta K \rangle - \langle \text{ev}_{\phi(L)} \delta K, \phi(M) \rangle + \\ &\quad + \langle \text{ev}_{\phi(M)} \delta K, \phi(L) \rangle + \langle \delta K, [\text{ev}_{\phi(M)}, \Lambda] \delta L \rangle - \langle \text{ev}_{\phi(M)} \delta L, \phi(K) \rangle) = \\ &= (\text{по лемме 1}) = - \int \langle \delta L, [\text{ev}_{\phi(K)}, \Lambda] \delta M \rangle + \text{с. р.} = (\text{согласно предложению 9}) = \\ &= \int \langle \delta M, [\text{ev}_{\phi(K)}, \Lambda] \delta L \rangle + \text{с. р.} = \int \langle \delta K, [\text{ev}_{\phi(L)}, \Lambda] \delta M \rangle + \text{с. р.} \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если дифференциальный многочлен $\Lambda: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}$ является кососимметричным по Лагранжу и коммутатор $[\text{ev}_{\phi}, \Lambda] = 0$ для всех $\phi \in \mathcal{E}$, то многочлен Λ гамильтонов, т. е. выполняется тождество Якоби.

4. ГЛАВНЫЙ ПРИМЕР – ЭВОЛЮЦИОННАЯ СИСТЕМА БЕЗ СВЯЗЕЙ

4.1. Алгебра. Здесь (ср. с главой VII книги [1]) алгебра $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\text{fin}}^{\infty}(XU)$, где

- $X = \mathbb{R}^M = \{x = (x^{\mu}) \mid x^{\mu} \in \mathbb{R}, \mu \in M\}$ – пространство независимых переменных,
- $U = \mathbb{R}^A = \{u = (u^{\alpha}) \mid u^{\alpha} \in \mathbb{R}, \alpha \in A\}$ – пространство зависимых переменных, A – конечное множество,
- $U = \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^A = \{u = (u_i^{\alpha}) \mid u_i^{\alpha} \in \mathbb{R}, \alpha \in A, i \in \mathbb{I}\}$ – пространство дифференциальных переменных, $u^{\alpha} = u_0^{\alpha}$,
- $\mathcal{C}_{\text{fin}}^{\infty}(XU)$ – алгебра всех гладких функций на бесконечномерном пространстве $XU = X \times U$, зависящих от конечного числа аргументов x^{μ}, u_i^{α} .

4.2. Дифференциальная алгебра. Подалгебра Ли $\mathfrak{D}_H$ имеет $\mathcal{F}$ -базис $D = \{D_{\mu} \mid \mu \in M\}$, где полные частные производные

$$D_{\mu} = \partial_{x^{\mu}} + u_{i+(\mu)}^{\alpha} \partial_{u_i^{\alpha}}, \quad i + (\mu) = (i^1, \dots, i^{\mu} + 1, \dots, i^m),$$

характеризуются правилом дифференцирования сложной функции:

- $\partial_{x^{\mu}}(F(x, u))|_{u=\mathbf{j}\phi(x)} = (D_{\mu} F(x, u))|_{u=\mathbf{j}\phi(x)}, \quad F \in \mathcal{F},$
- $\phi = (\phi^{\alpha}(x)) = \mathcal{F}^A, \quad \mathbf{j}\phi = \phi = (\phi_i^{\alpha}(x)) \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}}^A, \quad \phi_i^{\alpha}(x) = D^i \phi^{\alpha}(x).$

Подалгебра Ли $\mathfrak{D}_V$ имеет $\mathcal{F}$ -базис $\{\partial_{u_i^\alpha} \mid \alpha \in A, i \in \mathbb{I}\}$, так что здесь $a = \binom{\alpha}{i}$, $A = \binom{A}{\mathbb{I}}$ и коммутатор

$$[D_\mu, \partial_{u_i^\alpha}] = -\partial_{u_{i-(\mu)}^\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \Gamma_{\mu\alpha j}^{i\beta} = -\delta_\alpha^\beta \delta_{j+(\mu)}^i, \quad \alpha, \beta \in A, \quad i, j \in \mathbb{I}, \quad \mu \in M.$$

Отметим, что пара $\binom{\alpha}{i}$ есть единый верхний индекс, а $\binom{i}{\alpha}$ есть единый нижний индекс.

4.3. Ключевые ингредиенты. Определены отображения

- $\nabla: \mathcal{F}_{\mathbb{I}}^A \rightarrow \mathcal{F}_{M\mathbb{I}}^A, \quad \phi = (\phi_i^\alpha) \mapsto \eta = (\eta_{\mu i}^\alpha), \quad \eta_{\mu i}^\alpha = D_\mu \phi_i^\alpha - \phi_{i+(\mu)}^\alpha,$
- $\mathbf{j}: \mathcal{F}^A \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{I}}^A, \quad \phi = (\phi^\alpha) \mapsto \phi = (\phi_i^\alpha), \quad \phi_i^\alpha = D^i \phi^\alpha = \delta_{ik} \delta_\beta^\alpha \cdot D^k \phi^\beta.$

По индукции можно проверить, что

$$\mathcal{E} = \text{Ker } \nabla = \{\phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}}^A \mid \phi = \mathbf{j}\phi, \phi \in \mathcal{F}^A\} \simeq \mathcal{F}^A.$$

Положив $\mathcal{E} = \mathcal{F}^A$, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\mathbf{j}} \mathcal{F}_{\mathbb{I}}^A \xrightarrow{\nabla} \mathcal{F}_{M\mathbb{I}}^A, \quad \text{т. е.} \quad \text{Ker } \mathbf{j} = 0, \quad \text{Im } \mathbf{j} = \text{Ker } \nabla.$$

Более того, коммутатор $[\text{ev}_\phi, \mathbf{j}] = 0$ для всех $\phi \in \mathcal{E}$, поскольку дифференциальный многочлен $\mathbf{j} = \mathbf{j}(D) \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}A}^A[D]$ имеет постоянные коэффициенты $j_{ik\beta}^\alpha = \delta_{ik} \delta_\beta^\alpha$.

Далее, $\mathcal{F}$ -модуль $\Omega_{\mathbb{H}}^1$ имеет дуальный $\mathcal{F}$ -базис $\{dx^\mu \mid \mu \in M\}$, а для $\mathcal{F}$ -модуля Ω_V^1 удобно использовать $\mathcal{F}$ -базис

$$\{\delta u_i^\alpha = du_i^\alpha - u_{i+(\mu)}^\alpha dx^\mu \mid \alpha \in A, i \in \mathbb{I}\}.$$

В частности, $d_V \delta u_i^\alpha = 0$, $d_H \delta u_i^\alpha = -\delta u_{i+(\mu)}^\alpha \wedge dx^\mu$, $\alpha \in A, i \in \mathbb{I}$.

Определены дуальные по Лагранжу отображения

- $\nabla^*: \mathring{\mathcal{F}}_A^{M\mathbb{I}} \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_A^{\mathbb{I}}, \quad \chi = (\chi_\alpha^{\mu i}) \mapsto \mathbf{f} = (f_\alpha^i), \quad f_\alpha^i = D_\mu \chi_\alpha^{\mu i} + \delta_{j+(\mu)}^i \chi_\alpha^{\mu j},$
- $\mathbf{j}^*: \mathring{\mathcal{F}}_A^{\mathbb{I}} \rightarrow \mathcal{F}_A, \quad \mathbf{f} = (f_\alpha^i) \mapsto \mathbf{j}^* \mathbf{f} = f = (f_\alpha), \quad f_\alpha = (-D)^i \delta_{ik} f_\alpha^k.$

Положим $\mathcal{E}^* = \mathcal{F}_A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $\mathbf{f} = (f_\alpha^i)$, $\mathbf{g} = (g_\alpha^i) \in \mathring{\mathcal{F}}_A^{\mathbb{I}}$, $g_\alpha^i = \delta_0^i f_\alpha$, $f_\alpha = (\mathbf{j}^* \mathbf{f})_\alpha \in \mathcal{E}$, тогда

$$\mathbf{f} - \mathbf{g} = \nabla^* \chi, \quad \text{где} \quad \chi = (\chi_\alpha^{\mu i}) \in \mathring{\mathcal{F}}_A^{M\mathbb{I}}, \quad \chi_\alpha^{\mu i} = -\frac{1}{m} \delta_{kj} \delta_{ik} (-D)^k f_\alpha^{i+j+(\mu)},$$

суммирование проводится по всем $k, j \in \mathbb{I}$; напомним, что только конечное число компонент $f_\alpha^j \neq 0$.

Доказательство проводится прямой проверкой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Линейное пространство $\mathring{\mathcal{F}}_A^{\mathbb{I}}$ разбивается в прямую сумму линейных пространств, $\mathring{\mathcal{F}}_A^{\mathbb{I}} = \mathcal{E}^* \oplus_{\mathbb{F}} \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_A^{M\mathbb{I}}$, где инъективное отображение $\mathcal{E}^* \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_A^{\mathbb{I}}$ действует по правилу $f = (f_\alpha) \mapsto \mathbf{f} = (f_\alpha^i)$, $f_\alpha^i = \delta_0^i f_\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Следующая последовательность линейных пространств является точной:

$$0 \leftarrow \mathcal{E}^* \xleftarrow{\mathbf{j}^*} \mathring{\mathcal{F}}_A^{\mathbb{I}} = \mathcal{E}^* \oplus \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_A^{M\mathbb{I}} \xleftarrow{\nabla^*} \mathring{\mathcal{F}}_A^{M\mathbb{I}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Справедливо представление $\mathcal{S} = \mathring{\mathcal{F}}_A^{\mathbb{I}} / \nabla^* \mathring{\mathcal{F}}_A^{M\mathbb{I}} = \mathcal{E}^*$.

4.4. Проверка предположений. Проверим, что все перечисленные выше пять предположений выполняются.

- Алгебра Ли $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{F})$ разбита в прямую сумму вертикальной и горизонтальной подалгебр, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_V \oplus_{\mathcal{F}} \mathfrak{D}_H$.

- Для всякого $f \in \mathcal{F}$ производная $\partial_{u_i^\alpha} f \neq 0$ только для конечного числа индексов $a = \binom{\alpha}{i} \in \mathbf{A} = \binom{\mathbf{A}}{\mathbb{I}}$.

- Дифференциальная алгебра $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$, $\mathcal{F} = C_{\text{fin}}^\infty(XU)$, есть алгебра типа дю Бюа–Реймонда (см., например, книгу [1]).

- Отображение $\mathbf{j}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ обладает свойствами $\text{Im } \mathbf{j} = \text{Ker } \nabla$ и $[\text{ev}_\phi, \mathbf{j}] = 0$ для всех $\phi \in \mathcal{E}$, так что предположение 4 выполняется. Более того, здесь также верно равенство $\text{Im } \nabla^* = \text{Ker } \mathbf{j}^*$.

- Предположение 5 фактически есть выбор представления для отображения $\mathbf{A}$, оно не налагает каких-либо дополнительных ограничений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги.

- Было показано, что структуры Ли–Пуассона допускают чисто алгебраическую формулировку в виде гамильтоновых операторов над дифференциальными алгебрами.

- Главный пример, в частности, показывает, что перечисленные выше пять предположений совместимы и по существу.

- Решающий компонент схемы есть символ $\Gamma = (\Gamma_{\mu\alpha}^b) \in \mathcal{F}_{\mathbf{MA}}^{\mathbf{A}}$, определяющий все дальнейшие построения.

- Главная (и наиболее трудная) проблема на этой стадии – найти отображение $\mathbf{j}: \mathcal{F}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{F}^{\mathbf{A}}$ с необходимыми свойствами (т. е. *отображение джетов*).

Каковы возможные приложения нашей конструкции? Предположим, что требуется представить данную эволюционную систему уравнений в частных производных со связями в гамильтоновой форме. Чтобы применить развитую выше технику в этой ситуации, следует подобрать подходящую дифференциальную алгебру, согласованную с дифференциальными уравнениями связей и удовлетворяющую трем основным предположениям. Естественный способ осуществить задуманное приводит к алгебраическому подходу к уравнениям в частных производных (см., например, книгу [5]). Затем следует действовать согласно процедуре, описанной во введении настоящей статьи. Заметим, что приложения нашей конструкции не ограничиваются эволюционными системами уравнений в частных производных. В частности, эта техника может найти приложения в исследованиях из работ [6]–[16] и т. д.

Список литературы

- [1] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [2] В. В. Жаринов, “Формальный комплекс де Рама”, *ТМФ*, **174:2** (2013), 256–271.
- [3] V. V. Zharinov, “Operational calculus in differential algebras”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **7:1–2** (1998), 145–158.
- [4] В. В. Жаринов, “Законы сохранения эволюционных систем”, *ТМФ*, **68:2** (1986), 163–171.
- [5] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, **9**, World Sci., Singapore, 1992.

- [6] В. В. Жаринов, “Эволюционные системы со связями в виде условий нулевой дивергенции”, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 3–16.
- [7] В. В. Жаринов, “О преобразовании Беклунда”, *ТМФ*, **189**:3 (2016), 323–334.
- [8] A. Sergeev, “The Sobolev space of half-differentiable functions and quasisymmetric homeomorphisms”, *Georgian Math. J.*, **23**:4 (2016), 615–622.
- [9] А. Г. Сергеев, “Квантовое исчисление и квазиконформные отображения”, *Матем. заметки*, **100**:1 (2016), 144–154.
- [10] М. О. Катанаев, “Rotational elastic waves in a cylindrical waveguide with wedge dislocation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:8 (2016), 085202, 8 pp.
- [11] М. О. Катанаев, “Векторные поля Киллинга и однородная и изотропная вселенная”, *УФН*, **186**:7 (2016), 763–775.
- [12] N. G. Marchuk, D. S. Shirokov, “Constant solutions of Yang–Mills equations and generalized Proca equations”, *J. Geom. Symmetry Phys.*, **42** (2016), 53–72, arXiv:1611.03070.
- [13] А. К. Гущин, “ L_p -оценки некасательной максимальной функции для решения эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **207**:10 (2016), 28–55.
- [14] А. К. Погребков, “Коммутаторные тождества на ассоциативных алгебрах, разностное неабелево уравнение Хироты и его редукции”, *ТМФ*, **187**:3 (2016), 433–446.
- [15] Д. В. Быков, “Циклические градуировки алгебр Ли и пары Лакса для сигма-моделей”, *ТМФ*, **189**:3 (2016), 380–388.
- [16] А. А. Славнов, “Квантование моделей массивных неабелевых калибровочных полей со спонтанно нарушенной симметрией вне рамок теории возмущений”, *ТМФ*, **189**:2 (2016), 279–285.

Поступила в редакцию 9.01.2017