Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Синглтон, Янг-миллсовские аналоги общерелятивистских решений, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 308–324

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:18:21

© 1998 г.

Д. Синглтон*

ЯНГ-МИЛЛСОВСКИЕ АНАЛОГИ ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ РЕШЕНИЙ

Обсуждаются некоторые решения уравнений Янга–Миллса, которые можно найти, используя связь между общей теорией относительности и теорией Янга–Миллса. Сделано несколько замечаний относительно возможного физического смысла этих решений. В частности, приводятся аргументы в пользу того, что некоторые из подобных (аналогичных общерелятивистским) решений в теории Янга–Миллса могут иметь некоторую связь с явлением конфайнмента. Для этого кратко рассматривается движение пробных частиц, помещенных в фоновый потенциал, аналогичный шварцшильдовскому.

Памяти профессора Федора Лунева

1. ВВЕДЕНИЕ

Теории Янга–Миллса являются [1] неабелевыми калибровочными теориями, играющими центральную роль в физике элементарных частиц при описании как электрослабых, так и сильных взаимодействий. Поскольку теории Янга–Миллса неабелевы, соответствующие полевые уравнения являются нелинейными и оперировать с ними существенно сложнее, чем с уравнениями абелевых калибровочных теорий, таких как чистая теория электромагнетизма. Например, на классическом уровне (а также приближенно и на квантовом, если квантовые поправки не слишком велики [2]) для абелевых калибровочных теорий можно использовать суперпозицию, тогда как для теорий Янга–Миллса даже на классическом уровне суперпозиция неприменима. Такая нелинейная природа уравнений Янга–Миллса затрудняет поиск их решений. Имеются некоторые известные решения уравнений Янга–Миллса, такие как монополь 'т Хоофта–Полякова [3], дион Жулиа–Зи [4], дион Богомольного–Прасада–Соммерфилда (БПС) [5, 6], инстантон [7]. Однако систематического способа получения решений уравнений Янга–Миллса не существует.

В некотором смысле можно рассматривать общую теорию относительности как неабелеву калибровочную теорию [8, 9] и проводить математические параллели между двумя упомянутыми теориями [10, 11]. При использовании этой связи возникает вопрос о том, могут ли решения полевых уравнений одной теории служить отправной точкой для поиска решений в другой теории. Это действительно возможно, и таким путем мы можем найти значительное число решений.

*Department of Physics, Virginia Commonwealth University, Richmond, USA

В данной работе приведен обзор различных решений, найденных предложенным способом, и обсуждаются некоторые их свойства. У всех решений, найденных таким способом, есть очевидное слабое место. Они обладают бесконечной энергией поля, т.е. в решениях имеются сингулярности, приводящие к бесконечному значению энергии поля. Это контрастирует с результатами работ [3–6], в которых получены решения с конечной энергией поля. Помимо чисто математического интереса к исследованию всех типов решений, встречающихся в подобных нелинейных теориях поля, мы предлагаем также некоторые идеи, касающиеся возможного физического применения таких сингулярных решений. Одна из возможностей заключается в том, что некоторые из этих решений могли бы быть связаны с явлением конфайнмента в сильных взаимодействиях. Подобно тому как различные решения типа черных дыр (черные дыры Шварцшильда или Керра) обнаруживают некий вид конфайнмента для любых частиц, пересекающих горизонт событий, янг-милловские аналоги этих решений могут также демонстрировать поведение, приводящее к конфайнменту.

Ниже обсуждаются сферически-симметричные решения $SU(2)$ -уравнений Янга–Миллса, взаимодействующих со скалярным полем (обычно называемых уравнениями Янга–Миллса–Хиггса). Затем рассматриваются решения для калибровочных групп, отличных от $SU(2)$. В заключение исследуется поведение пробной частицы, помещенной в потенциал, аналогичный шварцшильдовскому. Показано, что при определенных условиях это аналоговое решение может удерживать пробную частицу, а также что такая система обладает полужелым моментом импульса даже в тех случаях, когда все рассматриваемые поля имеют целый момент импульса.

2. $SU(2)$ -УРАВНЕНИЯ ЯНГА–МИЛЛСА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ПОЛЯ

В данном разделе исследуется калибровочное $SU(2)$ -поле, взаимодействующее со скалярным полем ϕ^a в триплетном представлении. Скалярное поле выбирается безмассовым и лишенным самодействия. Лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a), \quad (1)$$

где $G_{\mu\nu}^a$ – тензор напряженности, определяемый калибровочными полями W_μ^a как

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon_{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \quad (2)$$

а D_μ – ковариантная производная скалярного поля:

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + g\epsilon_{abc}W_\mu^b \phi^c. \quad (3)$$

Общие уравнения движения такой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \partial^\nu G_{\mu\nu}^a &= g\epsilon_{abc}[G_{\mu\nu}^b W_c^\nu - (D_\mu \phi^b)\phi^c], \\ \partial^\mu D_\mu \phi^a &= g\epsilon_{abc}(D_\mu \phi^b)W_c^\mu. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти полевые уравнения можно упростить, используя обобщенный анзац Ву–Янга [12], подобно тому как это сделал Виттен [13] при исследовании мультиинстантонных решений:

$$\begin{aligned} W_i^a &= \epsilon_{aij} \frac{r^j}{gr^2} [1 - K(r)] + \left(\frac{r_i r_a}{r^2} - \delta_{ia} \right) \frac{G(r)}{gr}, \\ W_0^a &= \frac{r^a}{gr^2} J(r), \\ \phi^a &= \frac{r^a}{gr^2} H(r). \end{aligned} \quad (5)$$

Функции $K(r)$, $G(r)$, $J(r)$ и $H(r)$ должны определяться уравнениями движения. Подставляя выражения (5) в полевые уравнения (4), получим систему связанных нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} r^2 K'' &= K(K^2 + G^2 + H^2 - J^2 - 1), \\ r^2 G'' &= G(K^2 + G^2 + H^2 - J^2 - 1), \\ r^2 J'' &= 2J(K^2 + G^2), \\ r^2 H'' &= 2H(K^2 + G^2), \end{aligned} \quad (6)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r . Наиболее известные решения этих уравнений были получены Прасадом и Соммерфилдом [6], а также независимо Богомольным [5]. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} K(r) &= \cos(\theta) Cr \operatorname{cosech}(Cr), & G(r) &= \sin(\theta) Cr \operatorname{cosech}(Cr), \\ J(r) &= \operatorname{sh}(\gamma) [1 - Cr \operatorname{cth}(Cr)], & H(r) &= \operatorname{ch}(\gamma) [1 - Cr \operatorname{cth}(Cr)], \end{aligned} \quad (7)$$

где C , θ и γ – произвольные постоянные.

Решения (7) приводят к конечному значению энергии поля. Действительно, плотность энергии записывается в виде

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{g^2 r^2} \left(K'^2 + G'^2 + \frac{(K^2 + G^2 - 1)^2}{2r^2} + \frac{J^2(K^2 + G^2)}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(rJ' - J)^2}{2r^2} + \frac{H^2(K^2 + G^2)}{r^2} + \frac{(rH' - H)^2}{2r^2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

что дает конечное значение энергии поля при интегрировании по всему пространству $E = 4\pi C \operatorname{ch}^2(\gamma)/g^2$. Тот факт, что решение БПС имеет конечную энергию поля, является одной из основных причин повышенного интереса к этому классическому решению.

Теперь рассмотрим общерелятивистский аналог решений уравнений Янга–Миллса.

2.1. Решения со сферическими сингулярностями. Для того чтобы найти общерелятивистский аналог решений уравнений Янга–Миллса, проанализируем сначала решение Шварцшильда в общей теории относительности. В шварцшильдовских координатах это решение имеет две ненулевые компоненты метрического тензора, g_{00} и g_{rr} . Ненулевой пространственный элемент имеет вид $g_{rr} = Kr/(1 - Kr)$, причем $g_{00} = -1/g_{rr}$, где $K = 1/2GM$. Используя это выражение для g_{rr} в уравнении (6), получаем решение вида

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{\mp \cos(\theta) Cr}{1 \pm Cr}, & G(r) &= \frac{\mp \sin(\theta) Cr}{1 \pm Cr}, \\ J(r) &= \frac{\operatorname{sh} \gamma}{1 \pm Cr}, & H(r) &= \frac{\operatorname{ch} \gamma}{1 \pm Cr}, \end{aligned} \quad (9)$$

где C , γ и θ – произвольные постоянные. Решение со знаком минус в знаменателе (будем называть его решением шварцшильдовского типа) имеет сингулярность в калибровочном W_μ^a и скалярном ϕ^a полях на сферической поверхности радиуса $r = r_0 = 1/C$. Как решение шварцшильдовского типа, так и решение со знаком плюс в знаменателе имеют сингулярности при $r = 0$. Эти сингулярности приводят к тому, что энергии поля становятся бесконечными, это видно после подстановки функции из анзаца (9) в уравнение (8) при попытке интегрирования по всему пространству. Подобные решения уравнений Янга–Миллса с бесконечной энергией исследовались различными авторами [14–19]. Самая ранняя из этих работ [14] фактически предваряла изучение решений с конечной энергией, таких как монополю Хоффа–Полякова или дион БПС.

Бесконечность энергии поля для решений (9) не является существенным недостатком по сравнению со случаем решений, имеющих конечную энергию. Подобная ситуация возникает и для некоторых решений в классической теории поля. Тем не менее эти решения имеют физический смысл. Примером может служить кулоновское решение в теории электромагнетизма, которое при $r = 0$ имеет сингулярность по полю, аналогичную сингулярностям, порождаемым решениями (9) при подстановке их в (5) при $r = 0$. Делались попытки связать обладающее сингулярной сферической поверхностью решение шварцшильдовского типа с явлением конфайнмента кварков [15, 17, 18, 20, 21]. Исследуя движение пробной частицы в потенциале, определяемом решением (9) со знаком минус, можно обнаружить, что сферическая сингулярность поля представляет собой барьер, способный удерживать пробную частицу внутри этой сферы. Это происходит в духе “мешковых” моделей адронной структуры, в которых рассматривается движущаяся в некотором удерживающем потенциале (например, в бесконечном сферическом колоде) пробная частица. Интересно также и то, что решение шварцшильдовского типа было получено из общерелятивистского решения для невращающейся черной дыры, которая демонстрирует свой собственный тип “конфайнмента”: любая частица, пересекающая горизонт событий, оказывается захваченной навсегда. Проводить подобные аналогии нужно с достаточной осторожностью, поскольку сферические сингулярности в общей теории относительности и в теории Янга–Миллса имеют различную природу. Сингулярность на горизонте событий в общерелятивистском решении Шварцшильда – это не физическая, а координатная сингулярность, что видно из записи решения Шварцшильда в координатах Крускала, где единственная сингулярность возникает при $r = 0$. Обе же сингулярности в янг-милловском аналоге решения Шварцшильда представляют собой полевые сингулярности.

Существование сингулярных решений в некоторых теориях поля не является чем-то новым. Например, известны сингулярности кулоновского решения в теории электромагнетизма, монополярные решения Ву–Янга [12] или меронные решения [22]. Даже (кажущееся с первого взгляда уникальной особенностью данного случая) возникновение сингулярности калибровочных полей на сферических поверхностях, как это происходит для решения шварцшильдовского типа (9), можно обнаружить и для других решений с бесконечной энергией. Эти решения обладают бесконечным набором концентрических сферических поверхностей, на которых поля имеют сингулярность. Такое поведение решений свидетельствует в пользу того, что подобные сферические поверхности с сингулярностями – обычное явление в классических решениях полевых уравнений Янга–Миллса. Первое из таких решений может быть получено путем замены гиперболи-

ческих функций в решении БПС (7) на их тригонометрические аналоги:

$$\begin{aligned} K(r) &= \cos(\theta)Cr \operatorname{cosec}(Cr), & G(r) &= \sin(\theta)Cr \operatorname{cosec}(Cr), \\ J(r) &= \operatorname{sh}(\gamma)[1 - Cr \operatorname{ctg}(Cr)], & H(r) &= \operatorname{ch}(\gamma)[1 - Cr \operatorname{ctg}(Cr)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Это решение кратко обсуждалось в работе [23] при выводе решения БПС, где авторы, взяв за исходное решение типа (10) и применив преобразование $C \rightarrow iC$, получили решение БПС. Решение (10) обладает последовательностью концентрических сферических поверхностей, на которых калибровочное и скалярное поля становятся сингулярными. Эти сингулярности локализованы на сферических поверхностях $Cr = n\pi$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Подставляя в (8) функции (10), получаем для плотности энергии выражение

$$T^{00} = \frac{2 \operatorname{ch}^2(\gamma)}{r^2 g^2} \left[C^2 \operatorname{cosec}^2(Cr) (1 - Cr \operatorname{ctg}(Cr))^2 + \frac{(C^2 r^2 \operatorname{cosec}^2(Cr) - 1)^2}{2r^2} \right]. \quad (11)$$

Плотность энергии становится сингулярной на тех же сферических поверхностях, что и калибровочное, и скалярное поля. Из-за наличия таких сферических оболочек, на которых плотность энергии становится бесконечной, полная энергия поля решения расходится.

Для построения следующего решения мы попробуем взять в соотношениях (10) дополнительные тригонометрические функции. Таким путем можно установить [24], что функции

$$\begin{aligned} K(r) &= \cos(\theta)Cr \sec(Cr), & G(r) &= \sin(\theta)Cr \sec(Cr), \\ J(r) &= \operatorname{sh}(\gamma)[1 + Cr \operatorname{tg}(Cr)], & H(r) &= \operatorname{ch}(\gamma)[1 + Cr \operatorname{tg}(Cr)] \end{aligned} \quad (12)$$

также являются решением уравнения (6). Необходимо заметить, что из-за линейной зависимости каждого из решений от Cr нельзя получить решение (12) из других тригонометрических решений (10) простой заменой $Cr \rightarrow Cr - \pi/2$. Хотя тригонометрические решения (10) и (12) являются в этом смысле различными (т.е. они не связаны просто преобразованием $Cr \rightarrow Cr - \pi/2$), с физической точки зрения они похожи, поскольку к обоим применима большая часть рассуждений, касающихся решений (10). Совершенно очевидно, что входящие в анзац функции и, следовательно, калибровочное и скалярное поля становятся сингулярными при $Cr = n\pi/2$, где $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, и при $r = 0$. Таким образом, это решение обладает последовательностью концентрических сферических поверхностей, на которых его поля становятся сингулярными, а также имеет точечную сингулярность в начале координат. Кроме того, эти сингулярности проявляются в выражении для плотности энергии данного решения подобно тому, как это имеет место для решения (10). Точечная сингулярность при $r = 0$ и сферические сингулярные поверхности решений (10) и (12) подобны сингулярностям решения (9). Однако решение (9) имеет только одну сферическую поверхность, на которой поля и плотность энергии расходятся.

Решения шварцшильдовского типа можно использовать, например, для возможного объяснения механизма конфайнмента. Если рассматривать решение шварцшильдовского типа из работы [19] в качестве фонового потенциала, в который помещена пробная частица, то получится, что сферическая сингулярность может играть роль непроходимого барьера, удерживающего эту частицу или внутри, или снаружи сферы [20], что

дает нам классический вариант конфайнмента. Аналогичные результаты были получены и для других сингулярных решений [15, 17, 18]. Кроме того, в работе [15] отмечалось, что подобный классический вариант конфайнмента возможен только для решений с бесконечной энергией. Рассмотрение тригонометрических решений в качестве фонового потенциала также могло бы привести к захвату пробных частиц между любыми двумя концентрическими сферическими сингулярностями. Возможно, что такие тригонометрические решения удалось бы использовать для полевых уравнений при некоторых ограниченных значениях r , а затем можно было бы сшить эти решения с какими-нибудь другими решениями, чтобы получить решения полевых уравнений для оставшихся значений r . Подобную процедуру иногда проводят в общей теории относительности, пытаясь сшить внешнее решение с каким-нибудь из внутренних.

В итоге можно получить третье решение уравнения (6), применив к решению (12) преобразование $C \rightarrow iC$ [24]. Это дает

$$\begin{aligned} K(r) &= i \cos(\theta) Cr \operatorname{sech}(Cr), & G(r) &= i \sin(\theta) Cr \operatorname{sech}(Cr), \\ J(r) &= \operatorname{sh}(\gamma) [1 - Cr \operatorname{th}(Cr)], & H(r) &= \operatorname{ch}(\gamma) [1 - Cr \operatorname{th}(Cr)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку функции $K(r)$ и $G(r)$ мнимые, пространственные компоненты калибровочных полей оказываются комплексными. Несмотря на это все физические величины, связанные с этим комплексным решением (в том числе плотность энергии), являются действительными. Подставляя функции (13) в уравнение (8), получаем для плотности энергии поля выражение

$$T^{00} = \frac{2 \operatorname{ch}^2(\gamma)}{r^2 g^2} \left[-C^2 \operatorname{sech}^2(Cr) (1 - Cr \operatorname{th}(Cr))^2 + \frac{(C^2 r^2 \operatorname{sech}^2(Cr) + 1)^2}{2r^2} \right]. \quad (14)$$

Такая плотность энергии является действительной величиной, однако значение полной энергии поля бесконечно вследствие сингулярности при $r = 0$. Таким образом, полученное выше решение больше похоже на монополю Ву–Янга [12] или на точечный заряд, в отличие от диона БПС, энергия которого конечна.

2.2. $SU(2)$ -решения с возрастающими потенциалами. Кроме упомянутых решений с бесконечной энергией, чьи калибровочные и скалярные поля становятся сингулярными на некоторых сферических поверхностях, есть и другие виды имеющих общерелятивистские аналоги решений с бесконечной энергией. В общей теории относительности с отличной от нуля космологической постоянной Λ дваждывременная компонента метрического тензора решения Шварцшильда записывается как [25]

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (15)$$

Ньютоновский потенциал такого решения имеет вид

$$\Phi = \frac{(g_{00} - 1)}{2} = \frac{-GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{6}. \quad (16)$$

Используя в качестве отправной точки уравнение (16), получаем [26] следующее простое решение уравнения (6):

$$K(r) = \cos \theta, \quad G(r) = \sin \theta, \quad J(r) = H(r) = \frac{B}{r} + Ar^2, \quad (17)$$

где a , B и θ — произвольные постоянные. Очевидно, что если положить $A = 0$, то при $C \rightarrow \infty$ и $e^\gamma/C \rightarrow 2B$ решения шварцшильдовского типа (9) становятся аналогичными решениям (17). Подставляя функции (17) в калибровочное и скалярное поля (5), получим, что временные компоненты калибровочного W_0^a и скалярного ϕ^a полей изменяются как $Ar + B/r^2$. Пространственная часть калибровочных полей W_i^a ведет себя как $1/r$. Это классическое решение дает линейный удерживающий потенциал, подобный потенциалам, используемым в некоторых феноменологических исследованиях адронных спектров [27]. Кроме того, в соответствии с доводами решеточной калибровочной теории [28] удерживающий потенциал между кварками должен быть линейным. Связанные с проблемой конфайнмента классические решения, аналогичные решению (17), обсуждались в работе [29].

Решение (17) также имеет бесконечную энергию поля. Подставляя функции (17) в выражение для плотности энергии (8) и интегрируя, находим полную энергию поля

$$E = \int T^{00} d^3x = \frac{4\pi}{g^2} \int_{r_a}^{r_b} T^{00} r^2 dr = \frac{4\pi A^2}{g^2} (r_b^3 - r_a^3) - \frac{8\pi B^2}{g^2} \left(\frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_a^3} \right), \quad (18)$$

где введены верхнее r_b и нижнее r_a обрезания по радиальной координате. При $r_b \rightarrow \infty$ энергия поля становится бесконечной из-за линейной части калибровочных и скалярных полей, тогда как при $r_a \rightarrow 0$ энергия поля обращается в бесконечность из-за сингулярности при $r = 0$. Сравнивая эти результаты с решением (9), имеющим бесконечную энергию поля вследствие локальных сингулярностей (как при $r = 0$, так и при $r = 1/C$), видим, что решение (17) может иметь бесконечную энергию поля, связанную с точечной сингулярностью при $r = 0$ и/или калибровочными и скалярными полями, линейно возрастающими при $r \rightarrow \infty$. Повторим, что хотя это классическое решение обладает некоторыми нежелательными свойствами, оно также описывает и свойства, обнаруженные в ряде феноменологических исследований адронных связанных состояний.

2.3. $SU(3)$ -решения. До настоящего момента мы обсуждали классические решения уравнений Янга–Миллса для $SU(2)$ -полей. Поскольку квантовая хромодинамика (КХД) включает калибровочную группу $SU(3)$, естественно задаться вопросом, имеются ли обобщения полученных выше решений на случай этой группы или даже вообще группы $SU(N)$. Одна из возможностей — вложение $SU(2)$ -решения в калибровочную $SU(N)$ -теорию [30]. Недавно [31] было получено классическое решение шварцшильдовского типа, которое является не просто вложением $SU(2)$ -решений в калибровочную $SU(N)$ -теорию, а истинным $SU(3)$ -решением. Для получения этого $SU(3)$ -решения анзац Ву–Ву [32–34] обобщается следующим образом [31]:

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{-i\phi(r)}{gr^2} (\lambda^7 x - \lambda^5 y + \lambda^2 z) + \frac{1}{2} \lambda^a (\lambda_{ij}^a + \lambda_{ji}^a) \frac{x^i x^j}{gr^3} w(r), \\ W_i^a &= (\lambda_{ij}^a - \lambda_{ji}^a) \frac{ix^j}{gr^2} (1 - f(r)) + \lambda_{jk}^a (\epsilon_{ilj} x^k + \epsilon_{ilk} x^j) \frac{x^l}{gr^3} v(r), \end{aligned} \quad (19)$$

где λ^a — матрицы Гелл-Мана. Используя анзац (19) в уравнениях Янга–Миллса, приходим к следующей системе связанных дифференциальных уравнений для функций $f(r)$,

$v(r)$, $\phi(r)$ и $w(r)$:

$$\begin{aligned} r^2 f'' &= f^3 - f + 7fv^2 + 2vw\phi - f(w^2 + \phi^2), \\ r^2 v'' &= v^3 - v + 7vf^2 + 2fw\phi - v(w^2 + \phi^2), \\ r^2 w'' &= 6w(f^2 + v^2) - 12fv\phi, \\ r^2 \phi'' &= 2\phi(f^2 + v^2) - 4fvw, \end{aligned} \quad (20)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r . Нелинейные связанные дифференциальные уравнения (20) являются $SU(3)$ -аналогами уравнений (6). Чтобы облегчить рассмотрение, в работе [31] были сделаны некоторые упрощающие предположения. Во-первых, если положить $w = \phi = 0$, то система (20) сводится к системе

$$\begin{aligned} r^2 f'' &= f(f^2 - 1 + 7v^2), \\ r^2 v'' &= v(v^2 - 1 + 7f^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Положив $f^2 = v^2 = q^2/8$, после упрощения можно получить, что уравнения (21) сводятся к уравнению Ву–Янга [12] для $q(r)$:

$$r^2 q'' = q(q^2 - 1). \quad (22)$$

В работах [14, 18, 31] было показано, что это уравнение имеет решение, которое при некотором значении радиуса $r = r_1$ является сингулярным. Другими словами, вблизи $r = r_1$ решение имеет вид

$$q(r) \approx \frac{A}{r_1 - r}, \quad (23)$$

где A и r_1 – константы. Таким образом, даже в отсутствие скалярного поля можно получить решения для уравнений чистой калибровочной теории поля, которые в принципе могли бы описывать удержание пробной частицы за сферическим барьером подобно тому, как это имеет место для решений шварцшильдовского типа (9).

Решения системы (20) в некотором специальном случае можно также найти в замкнутом виде. Положим $v = w = 0$, тогда система (20) запишется как

$$\begin{aligned} r^2 f'' &= f(f^2 - \phi^2 - 1), \\ r^2 \phi'' &= 2\phi f^2 \end{aligned} \quad (24)$$

и будет допускать решение в простой замкнутой форме

$$\begin{aligned} f(r) &= \mp \frac{Cr}{1 \pm Cr}, \\ \phi(r) &= \pm \frac{i}{1 \pm Cr}. \end{aligned} \quad (25)$$

Другие подобные решения мы можем найти, вводя различные упрощающие предположения, например, полагая $f = w = 0$. Таким образом, можно получить решения с сингулярными полями на сферической поверхности не только для калибровочных $SU(2)$ -теорий, но также и для $SU(3)$ [31] и даже для общего случая $SU(N)$ [30]. Интересное свойство, отмеченное в работе [31], заключается в том, что эти решения являются истинными $SU(3)$ -решениями, а не вложениями $SU(2)$ -решений в калибровочную группу $SU(N)$, как в работе [30]. Кроме того, представленные здесь $SU(3)$ -решения – решения только для калибровочных полей, в отличие от общих $SU(2)$ -решений системы (1),

включающих и скалярные поля. В некотором смысле роль скалярного поля $SU(2)$ -системы берет на себя временная компонента калибровочного поля в $SU(3)$ -системе. Это можно заметить, сравнив систему уравнений (6) и систему (20): уравнения для $f(r)$ и $v(r)$ аналогичны уравнениям для $K(r)$ и $G(r)$, в то время как уравнения для $w(r)$ и $\phi(r)$ аналогичны уравнениям для $J(r)$ и $H(r)$.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА $SU(2)$ -РЕШЕНИЙ

Все $SU(2)$ -решения уравнений Янга–Миллса имеют интересные “электромагнитные” свойства. Для их исследования мы использовали определение ’т Хоофта обобщенного калибровочно-инвариантного $U(1)$ -тензора напряженности [3]

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\hat{\phi}^a W_\nu^a) - \partial_\nu(\hat{\phi}^a W_\mu^a) - \frac{1}{g}\epsilon_{abc}\hat{\phi}^a(\partial_\mu\hat{\phi}^b)(\partial_\nu\hat{\phi}^c), \quad (26)$$

где $\hat{\phi}^a = \phi^a(\phi^b\phi^b)^{-1/2}$. Это выражение для обобщенного $U(1)$ -тензора напряженности сводится к обычному выражению для тензора напряженности, если выполнить калибровочное преобразование к абелевой калибровке, в которой скалярное поле имеет ненулевую компоненту только вдоль одного направления в изоспиновом пространстве (т.е. $\phi^a = \delta^{3a}v$) [35]. Если этому $U(1)$ -полю поставить в соответствие фотон в теории электромагнетизма, то решения (9), (10), (12), (13), (17) будут нести магнитные и/или электрические заряды. В общем случае соответствующие этим решениям электрические и магнитные поля имеют вид

$$\begin{aligned} E_i &= F_{i0} = \frac{r_i}{gr} \frac{d}{dr} \left(\frac{J(r)}{r} \right), \\ B_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} = -\frac{r_i}{gr^3}. \end{aligned} \quad (27)$$

Магнитное поле во всех этих решениях – это поле точечного монополя напряженности $-4\pi/g$. Причины этого мы обсудим в конце данного раздела.

Электрическое поле в решениях шварцшильдовского типа (9) легко получить, подставив функции $J(r)$ из анзаца (9) в уравнения (27):

$$E_i = \frac{-r_i \operatorname{sh} \gamma(1 \pm 2Cr)}{gr^3(1 \pm Cr)^2}. \quad (28)$$

При $r \rightarrow \infty$ электрическое поле ведет себя как $1/r^3$; это указывает на то, что полный электрический заряд, соответствующий этому решению, равен нулю, хотя и возникает нечто вроде дипольного распределения заряда.

Электрические поля в обоих тригонометрических решениях (10) и (12) похожи. Они указывают на то, что эти решения несут бесконечный электрический заряд. Взяв входящую в анзац функцию $J(r)$ из тригонометрического решения (10) и подставив ее в уравнение (27), получим электрическое поле

$$E_i = \frac{-\operatorname{sh}(\gamma)r_i}{gr^3}(1 - C^2r^2 \operatorname{cosec}^2(Cr)). \quad (29)$$

Это электрическое поле не убывает при больших r , а ведет себя как $r_i \operatorname{cosec}^2(Cr)/r$. Кроме того, оно становится сингулярным на сферических поверхностях, определяемых

соотношениями $Cr = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Тригонометрическое решение (12) дает электрическое поле такого же типа, за исключением того, что оно становится сингулярным на сферических оболочках, определяемых соотношениями $Cr = n\pi/2$ (n нечетное), и при $r = 0$. Электрический заряд этого решения также бесконечен, поскольку электрическое поле (29) не убывает при $r \rightarrow \infty$. В особом случае $\gamma = 0$ получается, что решение вообще не несет никакого электрического заряда, а только магнитный. Однако даже и в этом случае плотность энергии становится сингулярной на концентрических сферических поверхностях и в начале координат. Как в решениях БПС, так и в решениях (10) и (12) напряженность магнитного поля равна $-4\pi/g$. Хотя это решение и является дионом в том смысле, что оно несет и магнитный, и электрический заряды, не вполне корректно, быть может, рассматривать его как частицеподобное решение, поскольку соответствующее электрическое поле не убывает с расстоянием, вследствие чего этому решению отвечает бесконечный распределенный электрический заряд.

Электрическое поле, соответствующее комплексному решению (13), можно найти тем же способом, что и для других решений. Подставляя входящую в анзац (13) функцию $J(r)$ в уравнение (27), получаем

$$E_i = \frac{-\operatorname{sh}(\gamma)r_i}{gr^3}(C^2r^2 \operatorname{sech}^2(Cr) + 1). \quad (30)$$

Как и всем остальным решениям, комплексному решению соответствует магнитный заряд $-4\pi/g$. Кроме того, исследуя поведение электрического поля (30) при $r \rightarrow \infty$, получаем, что это комплексное решение несет электрический заряд $-4\pi \operatorname{sh}(\gamma)/g$, что совпадает с электрическим зарядом решения БПС. Интересное свойство решения (13) состоит в том, что хотя пространственные компоненты калибровочных полей и комплексны, все рассчитанные на его основе физические величины (например, энергия поля, магнитный и электрический заряды) оказываются действительными. Кроме того, в отличие от решений (10) и (12), комплексное решение можно рассматривать как точечный дион, т.к. ему соответствует локализованный заряд. Главное различие между комплексным решением и решением БПС состоит в том, что первому соответствует бесконечное (вследствие наличия у поля сингулярности при $r = 0$) значение энергии поля.

В то время как большинство физических характеристик, соответствующих всем этим различным решениям, существенно отличается друг от друга в каждом отдельном случае, магнитные заряды всех решений совпадают. Это происходит потому, что магнитный заряд каждого решения представляет собой топологический заряд, имеющий одно и то же значение для всякой конфигурации поля. Мы можем определить топологический ток k_μ как [35]

$$k_\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{abcd} \partial^\nu \hat{\phi}^a \partial^\alpha \hat{\phi}^b \partial^\beta \hat{\phi}^c. \quad (31)$$

Тогда топологический заряд для такой конфигурации поля будет иметь вид

$$\begin{aligned} q &= \int k_0 d^3x = \frac{1}{8\pi} \int (\epsilon_{ijk} \epsilon_{abcd} \partial^i \hat{\phi}^a \partial^j \hat{\phi}^b \partial^k \hat{\phi}^c) d^3x = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{ijk} \epsilon_{abcd} \partial^i (\hat{\phi}^a \partial^j \hat{\phi}^b \partial^k \hat{\phi}^c) d^3x. \end{aligned} \quad (32)$$

Для всех решений получаем $\hat{\phi}^a = r^a/r$, что справедливо независимо от выбранной функции $H(r)$ из анзаца. Во всех случаях оказывается, что топологический заряд $q = 1$. В

следующем разделе, исследуя движение пробной частицы в поле, соответствующем решению шварцшильдовского типа, мы покажем, что вследствие взаимодействия частицы с полем такой конфигурации у поля появляется момент импульса. При этом можно видеть, что данный момент импульса возникает вследствие взаимодействия топологического магнитного заряда с зарядом пробной частицы, подобно тому как комбинация обычных магнитного и электрического зарядов соответствует полю, обладающему моментом импульса [36, 37, 2].

4. ДВИЖЕНИЕ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ В ПОТЕНЦИАЛЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕМ РЕШЕНИЮ ШВАРЦШИЛЬДОВСКОГО ТИПА

Теперь нам бы хотелось исследовать движение пробной частицы на фоне потенциала, соответствующего решению шварцшильдовского типа (9). Для этого сделаем несколько предположений.

Во-первых, пусть, как и в работах [18, 20], наша пробная частица является скалярной. Одна из причин, определяющих такой выбор, состоит в том, чтобы проиллюстрировать связанный с этими решениями эффект возникновения спина из изоспина [38]. Как было отмечено в предыдущем разделе, все наши решения несут магнитный заряд. Многие авторы [36, 37] указывали на то, что вследствие определенной конфигурации электрического и магнитного полей составленная из магнитного и электрического зарядов система обладает моментом импульса. Подобный эффект наблюдается [38], даже если магнитный заряд имеет топологическую природу, как в случае монополей 'т Хоффа–Полякова, вследствие чего системам, состоящим из топологического магнитного заряда и частицы с изотопическим зарядом, соответствуют калибровочные поля, обладающие ненулевым моментом импульса. Этот факт имеет интересное следствие, заключающееся в том, что если мы хотим построить на основании сингулярных решений фермионные объекты, то следует использовать скалярные частицы, лежащие в фундаментальном представлении калибровочной группы (т.е. группы $SU(2)$ для решений, которые мы здесь рассматриваем; пробные частицы фермионного типа в присоединенном представлении также дадут чисто фермионное связанное состояние [21]).

Наше второе предположение состоит в том, что взаимодействие пробной частицы со скалярным полем, соответствующим решению (9), вводится посредством подстановки $m^2 \rightarrow (m + \lambda \sigma^a \phi^a / 2)^2$, где λ – произвольная константа связи.

Наконец, для того чтобы не учитывать входящую в анзац функцию $G(r)$, мы полагаем в (9) $\theta = 0$.

С учетом всего этого получаем для скалярной частицы Φ^A , движущейся в поле решения шварцшильдовского типа (9), уравнение

$$\left(\partial_0 - \frac{ig}{2} \sigma^a W_0^a \right) \left(\partial_0 - \frac{ig}{2} \sigma^a W_0^a \right)_B^A \Phi^B(x, t) - \\ - \left(\partial_i - \frac{ig}{2} \sigma^a W_i^a \right) \left(\partial_i - \frac{ig}{2} \sigma^a W_i^a \right)_B^A \Phi^B(x, t) = - \left(m + \frac{\lambda}{2} \sigma^a \phi^a \right)^2 \Phi^A(x, t), \quad (33)$$

где σ^a – стандартные матрицы Паули, а A и B – индексы группы $SU(2)$, принимающие значения 1 и 2. Полагая $\Phi^A(x, t) = \Phi^A(x) e^{-iEt}$, используя соотношение $(\sigma^a v^a)^2 =$

$v^a v^a$ и раскрывая скобки, приводим уравнение (33) к виду

$$\begin{aligned} & \left[-E^2 - g\sigma^a W_0^a E - \frac{g^2}{4}(W_0^a)^2 - \nabla^2 + ig\sigma^a W_i^a \partial_i + \frac{g^2}{4}(W_i^a)^2 \right]_B^A \Phi^B(x) = \\ & = - \left[m^2 + \lambda m \sigma^a \phi^a + \frac{\lambda^2}{4}(\phi^a)^2 \right]_B^A \Phi^B(x). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя калибровочное и скалярное поля в виде анзаца (5) в уравнение (34), получим

$$\begin{aligned} & - \left[\nabla^2 - \frac{(1-K(r))}{r^2} \sigma^a l^a - \frac{(1-K(r))^2}{2r^2} + \frac{\sigma^a r^a}{r^2} E J(r) + \frac{J(r)^2}{4r^2} \right]_B^A \Phi^B(x) = \\ & = \left(E^2 - m^2 - \frac{\lambda m}{gr^2} \sigma^a r^a H(r) - \frac{\lambda^2}{4g^2 r^2} H(r)^2 \right)_B^A \Phi^B(x). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь мы использовали соотношения

$$ig\sigma^a W_i^a \partial_i = -i(1-K(r))\sigma^a \epsilon_{aji} \frac{r^j \partial^i}{r^2} = (1-K(r)) \frac{\sigma^a l^a}{r^2}$$

(где l^a — стандартный оператор орбитального момента импульса) и

$$(W_i^a)^2 = \epsilon_{aij} \epsilon_{aik} r^j r^k \frac{(1-K(r))^2}{g^2 r^4} = 2 \frac{(1-K(r))^2}{g^2 r^2}.$$

Поскольку величины $\sigma^a l^a$ не коммутируют с $\sigma^a r^a$, уравнение (35) трудно анализировать. Мы воспользуемся свободным параметром γ , который входит в функции $J(r)$ и $H(r)$, а именно, выберем γ так, чтобы выполнялось соотношение $E \operatorname{sh} \gamma = \lambda m \operatorname{ch} \gamma / g$. Тогда оба члена с $\sigma^a r^a$ в уравнении (35) взаимно сокращаются. Для того чтобы разобратся с членом $\sigma^a l^a$, необходимо определить оператор полного момента импульса в виде

$$J^a = l^a + S^a = l^a + \frac{1}{2} \sigma^a. \quad (36)$$

Полный момент импульса, таким образом, обусловлен не только орбитальным моментом импульса, но также и вкладом, имеющим вид спинного момента импульса. Однако матрицы σ в последнем члене уравнения (36) связаны с изоспином системы, а не с ее спином. Именно в этом и состоит эффект появления спина из изоспина [38]. Этот эффект связан с тем, что решение шварцшильдовского типа (9) несет топологический магнитный заряд. Таким образом, хотя наша система и включает только поля целого спина (т.е. W_μ^a , ϕ^a , Φ^A), комбинированная система представляет собой систему со спином $1/2$. С помощью уравнения (36) можно обычным образом разложить член $\sigma^a l^a$ как $\sigma^a l^a = 2S^a l^a = J_{op}^2 - l_{op}^2 - S_{op}^2$, где, однако, необходимо учитывать, что S_{op} теперь оператор не спина, а изоспина.

В заключение сделаем предположение, что $\lambda = g$. В этом случае легче комбинировать члены $J(r)^2$ и $H(r)^2$. В таком выборе на первый взгляд нет ничего особенного. Однако можно заметить, что в соответствии с доводами работ [18] и [39] барьер при

$r = 1/C$ будет полностью удерживать частицу только при $\lambda \geq g$, тогда как при $\lambda < g$ существует некоторая вероятность туннелирования пробной частицы сквозь барьер. Суммируя все перечисленные выше предположения, окончательно получаем, что

$$-\left[\nabla^2 - \frac{(1-K(r))}{r^2}(J_{op}^2 - l_{op}^2 - S_{op}^2) - \frac{(1-K(r))^2}{2r^2} + \frac{1}{4r^2}(J(r)^2 - H(r)^2)\right]_B^A \Phi^B(x) = (E^2 - m^2)_B^A \Phi^B(x). \quad (37)$$

Для того чтобы выделить из (37) радиальное уравнение, возьмем

$$\Phi^A(x) = \frac{1}{r} f_{Jl}(r) Y_{JlM}^A(\theta, \phi), \quad (38)$$

где Y_{JlM}^A – стандартные спинорные сферические гармоники, которые можно получить, прибавляя орбитальный момент импульса l^a к спину $1/2$. При этом спин заменяется на изоспин, однако математическая сторона дела, как и спинорные сферические гармоники, остаются в точности такими же. Подставив (38) в (37), получим

$$-\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D}{r^2} - \frac{F(1-K(r))}{r^2} - \frac{(1-K(r))^2}{2r^2} + \frac{1}{4r^2}(J(r)^2 - H(r)^2)\right] f_{Jl}(r) = (E^2 - m^2) f_{Jl}(r), \quad (39)$$

где постоянные D и F определены как $D = l(l+1)$ и $F = J(J+1) - l(l+1) - 3/4$. Полагая теперь $x = Cr$ и подставляя в уравнение (39) функции $K(r)$, $J(r)$ и $H(r)$ из анзаца (9), мы видим, что задача свелась к эффективному одномерному уравнению Шредингера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D}{x^2} + \frac{F(1-2x)}{x^2(1-x)} + \frac{(1-2x)^2}{2x^2(1-x)^2} + \frac{1}{4x^2(1-x)^2}\right] f_{Jl}(x) = \frac{(E^2 - m^2)}{C^2} f_{Jl}(x), \quad (40)$$

где в левой части все члены без производных рассматриваются как эффективный потенциал. Определяющей чертой эффективного потенциала является наличие сингулярностей при $x = 0$ и $x = 1$. При $x \rightarrow 1$ главный член эффективного потенциала имеет вид

$$V_{\text{эф}}(x) = \frac{D}{x^2} + \frac{F(1-2x)}{x^2(1-x)} + \frac{(1-2x)^2}{2x^2(1-x)^2} + \frac{1}{4x^2(1-x)^2} \rightarrow \frac{3}{4(1-x)^2}. \quad (41)$$

В работах [39, 18] было показано, что такая сингулярность будет создавать настоящий барьер для пробной частицы (т.е. вероятность туннелирования пробной частицы через барьер будет равна нулю), только если коэффициент в уравнении (41) будет больше или равен $3/4$. Таким образом, именно эффективный потенциал в уравнении (40) удерживает пробную частицу в пределах $0 \leq x \leq 1$. Тот факт, что эффективный потенциал как раз способен удержать пробную частицу, следует из нашего выбора $\lambda = g$ для взаимодействия скалярного потенциала ϕ^a с пробной частицей Φ^A . Если бы мы взяли $\lambda < g$, то коэффициент в предельной форме эффективного потенциала (41) был бы меньше чем $3/4$ и пробная частица больше не удерживалась бы (например, если взять $\lambda = 0$,

то исходя из (35) можно непосредственно показать, что значение коэффициента будет равняться $1/2$). Наоборот, при $\lambda > g$ коэффициент в уравнении (41) становится больше $3/4$ и пробная частица удерживается. В качестве интересного следствия получаем, что скалярный потенциал играет важную роль в таком механизме конфайнмента. Хотя обычно считается, что конфайнмент является результатом только калибровочного взаимодействия, существуют феноменологические работы [40–42], в которых показано, что и эффективный скалярный потенциал участвует в механизме конфайнмента.

Чтобы более детально изучить решение уравнения (40), нужно выбрать специальные значения J и l (которые определяют постоянные D и F в (40)) и решить уравнение на собственные функции $f_{Jl}(x)$ и собственные значения $(E^2 - m^2)/C^2$. В принципе это следует делать численно [21, 20]. Однако благодаря своему ключевому свойству (т.е. сингулярностям при $x = 0$ и $x = 1$) эффективный одномерный потенциал (41) подобен потенциалу Пешля–Теллера [43]

$$V(x) = \frac{1}{2}V_0 \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2(\pi x/2)} + \frac{\beta(\beta-1)}{\cos^2(\pi x/2)} \right], \quad (42)$$

где α, β и V_0 – постоянные. При правильном выборе α, β и V_0 потенциал Пешля–Теллера можно привести к виду, аналогичному эффективному потенциалу (41). Тогда известные собственные функции и собственные значения потенциала Пешля–Теллера должны дать хорошую аппроксимацию для собственных значений и собственных функций потенциала (41). Собственные функции потенциала Пешля–Теллера имеют вид [43]

$$f_n(x) = K \sin^\alpha \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cos^\beta \left(\frac{\pi x}{2} \right), \quad {}_2F_1 \left(-n, \alpha + \beta + n, \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right), \quad (43)$$

где K – фиксированная нормировкой постоянная, n – радиальное квантовое число, принимающее значения $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, а ${}_2F_1(a, b, c; x)$ – гипергеометрическая функция. Собственные значения энергии потенциала Пешля–Теллера задаются [43] формулой

$$E_n = \frac{1}{2}V_0(\alpha + \beta + 2n)^2. \quad (44)$$

Из вида потенциала Пешля–Теллера и эффективного потенциала (41) следует, что именно такую зависимость следует ожидать для собственных значений энергии. При малых энергиях (т.е. при $\alpha + \beta > 2n$) оба потенциала аналогичны потенциалу гармонического осциллятора. Поэтому можно было бы ожидать, что главный член в E_n будет вести себя как $2V_0(\alpha + \beta)n \sim n$. Для больших энергий (т.е. при $2n > \alpha + \beta$) оба потенциала представляют собой бесконечные сферические колоды, поэтому можно ожидать, что главный член в E_n будет вести себя как $2V_0n^2 \sim n^2$. Рассмотрим в качестве простого примера случай $l = 0$ для потенциала (41). В этом случае $J = 1/2$, $D = 0$, $F = 0$ и потенциал (41) принимает вид

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{3 - 8x + 8x^2}{4x^2(1-x)^2}. \quad (45)$$

Это выражение стремится к $3/(4(1-x)^2)$ при $x \rightarrow 1$. Поэтому пробная частица как раз удерживается в пределах $0 < x < 1$. На этом интервале потенциал (45) принимает

свое минимальное значение, равное 4 при $x = 1/2$, причем потенциал симметричен относительно этой точки. Для того чтобы потенциал Пешля–Теллера также был симметричным относительно точки $x = 1/2$ и принимал бы в этой точке значение, равное 4, необходимо выбрать $V_0 = 1$ и $\alpha = \beta = 2$. Теперь, подставив эти значения в уравнение (44) и вспомнив, что полученные нами собственные значения уравнения (40) равны $(E^2 - m^2)/C^2$, найдем следующее приближенное выражение для энергии связанных состояний в случае $l = 0$:

$$E_n^2 = m^2 + C^2(2 + n)^2. \quad (46)$$

Заметим, что полученная энергия зависит от произвольной постоянной C , задающей радиус удерживающей сферы ($r = 1/C$). При увеличении C радиус сферической оболочки уменьшается, а энергия состояния, как это следует из уравнения (46), возрастает, что соответствует нашим ожиданиям. Хотя в случае $l = 0$ было особенно просто определить постоянные V_0 , α , β , выражение (46) для энергии связанного состояния сохраняет свой вид и в случае $l \neq 0$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В этой работе были предложены разнообразные решения полевых уравнений в теории Янга–Миллса. Хотя нахождение точных решений в нелинейных теориях поля представляет собой, вообще говоря, сложную задачу, многие из приведенных решений получены с использованием математической связи, существующей между теорией Янга–Миллса и общей теорией относительности. Поскольку общая теория относительности изучалась дольше теории Янга–Миллса, существует определенный набор известных решений, которые могут служить ориентирами при поиске решений уравнений Янга–Миллса или Янга–Миллса–Хиггса. Решение Шварцшильда в общей теории относительности как с учетом, так и без учета космологического члена, порождает решение (9) со сферической сингулярностью и линейно возрастающее решение (17). Хотя оба эти решения и обладают явным недостатком, заключающимся в том, что им соответствует бесконечная энергия поля, возможно, существует некоторая связь между ними и явлением конфайнмента. Линейное решение (17) имеет форму феноменологических потенциалов [27], часто используемых при изучении связанных состояний тяжелых кварков. Кроме того, с точки зрения решеточной калибровочной теории [28] предпочтительным является линейный вид удерживающего потенциала. Решение (9) шварцшильдовского типа имеет некоторые общие черты с моделью мешков для описания связанных состояний кварков. Мы также видели, что и в некоторых других решениях, таких как решения (10) и (12), появляются сферические сингулярности, аналогичные сингулярностям решений шварцшильдовского типа. В действительности решения (10) и (12) обладают бесконечным набором концентрических сфер, на которых калибровочное и скалярное поля обращаются в бесконечность. Таким образом, подобные сферические сингулярные поверхности могут достаточно часто встречаться в теориях Янга–Миллса. $SU(2)$ -решение шварцшильдовского типа легко обобщается до $SU(N)$ -решения [30] простым вложением $SU(2)$ -решения в калибровочную теорию $SU(N)$. Недавно было обнаружено [31], что можно построить истинные $SU(3)$ -решения (т.е. те, которые не являются просто вложениями $SU(2)$ -решений).

В разделе 4 изучалось поведение скалярной пробной частицы, помещенной в потенциал, определяемый решением шварцшильдовского типа. Для того чтобы потенциал

шварцшильдовского типа удерживал пробную частицу Φ^A , необходимо ввести взаимодействие между Φ^A и скалярной частью ϕ^a решения шварцшильдовского типа посредством преобразования $m^2 \rightarrow (m + \lambda \sigma^a \phi^a / 2)^2$, где λ – интенсивность взаимодействия между частицами Φ^A и ϕ^a . Было обнаружено, что даже при таком взаимодействии конфайнмент наблюдается при $\lambda \geq g$, тогда как при $\lambda < g$ имеется некоторая конечная вероятность того, что частица Φ^A протуннелирует наружу из сферического колодца. Хотя обычно считается, что явление конфайнмента – результат только калибровочных взаимодействий, тем не менее имеется ряд работ [40–42], посвященных изучению роли, которую может играть эффективное скалярное взаимодействие для полного объяснения конфайнмента.

Другой интересный аспект системы связанных состояний, изученной в предыдущем разделе, состоит в том, что полная система представляет собой фермион, хотя и включает только поля целочисленного спина. То, что система связанных состояний по своей природе является системой спина $1/2$, обусловлено явлением, происходящим при помещении пробной частицы Φ^A вблизи решения шварцшильдовского типа, когда равный $1/2$ изоспин пробной частицы конвертируется в спин $1/2$. Этот же результат можно получить и другим путем, заметив, что почти все представленные здесь решения несут топологический магнитный заряд. Таким образом, точно так же как стандартная система, состоящая из магнитного и электрического зарядов, несет в совместном электромагнитном поле этих зарядов момент импульса, равный $1/2$, в нашем случае комбинированная система, состоящая из зарядов решения шварцшильдовского типа и частицы Φ^A , несет в своих комбинированных неабелевых полях момент импульса, равный $1/2$. Если в реалистической модели адронных связанных состояний при построении этих состояний можно исходить из решений классической теории поля, то происхождение полного момента импульса этих состояний не из одних только составных частиц может дать описание ЕМС-эффекта [44], который показывает, что значительная часть полного спина протона не возникает из валентных кварков.

Для того чтобы найти другие решения теории Янга–Миллса, помимо рассмотренных нами решений шварцшильдовского типа, можно использовать и более сложные решения из общей теории относительности. В работе [45] для построения нового решения теории Янга–Миллса использовалось общерелятивистское решение Керра. Хотя окончательный вид этого решения не так прост, как вид решения шварцшильдовского типа, эти решения тем не менее имеют общие черты. Оба они обладают удерживающими поверхностями, на которых поля становятся сингулярными. Наконец, данный метод для нахождения решений нелинейных полевых уравнений можно также использовать в обратном направлении: исходя из известных решений уравнений Янга–Миллса можно получить решения общерелятивистских уравнений [46].

Список литературы

- [1] C. N. Yang, R. L. Mills. Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191.
- [2] J. D. Jackson. Classical Electrodynamics. 2nd Edition. New York: John Wiley & Sons, 1975.
- [3] G. 't Hooft. Nucl. Phys. B. 1974. V. 79. P. 276; A. M. Поляков. ЖЭТФ. 1975. Т. 68. № 6. С. 1975.
- [4] B. Julia, A. Zee. Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2227.
- [5] Е. Б. Богомоловый. ЯФ. 1976. Т. 24. С. 861.
- [6] M. K. Prasad, C. M. Sommerfield. Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 760.

- [7] *A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin.* Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 85.
- [8] *R. Utiyama.* Phys. Rev. 1956. V. 101. P. 1597.
- [9] *M. Carmeli.* Classical fields: General relativity and gauge theory. New York: Wiley, 1982.
- [10] *F. A. Lunev.* Phys. Lett. B. 1992. V. 295. P. 99; *Ф. А. Лунев.* ТМФ. 1993. Т. 94. С. 66.
- [11] *F. A. Lunev.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 5351.
- [12] *C. N. Yang, T. T. Wu.* Properties of Matter under Unusual Conditions. Eds H. Mark, S. Fernbach. New York: Interscience, 1968.
- [13] *E. Witten.* Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 121.
- [14] *G. Rosen.* J. Math. Phys. 1972. V. 13. P. 595.
- [15] *J. H. Swank, L. J. Swank, T. Dereli.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 1096.
- [16] *A. P. Protogenov.* Phys. Lett. B. 1977. V. 67. P. 62.
- [17] *S. M. Mahajan, P. M. Valanju.* Phys. Rev. D. 1987. V. 35. P. 2543; V. 36. P. 1500.
- [18] *F. A. Lunev.* Phys. Lett. B. 1993. V. 311. P. 273.
- [19] *D. Singleton.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 5911; Nuovo Cimento A. 1996. V. 109. P. 169.
- [20] *D. Singleton, A. Yoshida.* A general relativistic model for confinement in $SU(2)$ Yang–Mills theory. hep-th/9505160.
- [21] *F. A. Lunev, O. Pavlovsky.* Singular solutions of Yang–Mills equations and Bag model. hep-ph/9609452.
- [22] *V. De Alfaro, S. Fubini, G. Furlan.* Phys. Lett. B. 1976. V. 65. P. 163.
- [23] *J. P. Hsu, E. Mac.* J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 100.
- [24] *D. Singleton.* Int. J. Theor. Phys. 1997. V. 36. P. 1857.
- [25] *H. Ohanian.* Gravitation and Space-time. W.W. Norton & Company, 1976.
- [26] *D. Singleton, A. Yoshida.* Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 4823.
- [27] *E. Eichten et al.* Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 3090.
- [28] *K. Wilson.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445.
- [29] *D. Sivers, J. Ralston.* Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 953.
- [30] *D. Singleton.* Z. Phys. C. 1996. V. 72. P. 525.
- [31] *V. Dzhunushaliev.* Confining properties of the classical $SU(3)$ Yang–Mills theory. hep-th/9611096; A single classical quark. hep-th/9707039.
- [32] *A. C. T. Wu, T. T. Wu.* J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 53.
- [33] *W. J. Marciano, H. Pagels.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 1093.
- [34] *D. V. Gal'tsov, M. S. Volkov.* Phys. Lett. B. 1992. V. 274. P. 173.
- [35] *J. Arafune, P. G. O. Freund, C. J. Goebel.* J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 433.
- [36] *J. J. Thomson.* Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism. 3rd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1904.
- [37] *M. N. Saha.* Ind. J. Phys. 1936. V. 10. P. 145; Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 1968; *H. A. Wilson.* Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 309.
- [38] *R. Jackiw, C. Rebbi.* Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. P. 1116; *P. Hasenfratz, G. 't Hooft.* Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. P. 1119.
- [39] *J. Dittrich, P. Exner.* J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 2000; *В. Б. Гостев, А. Р. Френкин.* ТМФ. 1988. Т. 974. С. 247.
- [40] *C. Goebel, D. LaCourse, M. G. Olsson.* Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 2917.
- [41] *Y. Shibata, H. Tezuka.* Z. Phys. C. 1994. V. 62. P. 533.
- [42] *B. Ram.* Amer. J. Phys. 1982. V. 50. P. 549.
- [43] *З. Флюгге.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [44] *J. Ashman et al.* Phys. Lett. B. 1988. V. 206. P. 364; Nucl. Phys. B. 1989. V. 328. P. 1.
- [45] *D. Singleton.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4574.
- [46] *D. Singleton.* Phys. Lett. A. 1996. V. 223. P. 12.

Поступила в редакцию 14.IV.1998 г.