Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, О конструктивной теории рассеяния,
ТМФ, 2017, том 193, номер 1, 15–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 02:30:12

© 2017 г.

А. Б. Шабат*

О КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Рассматривается задача о факторизации матрицы рассеяния для уравнения Шредингера на вещественной оси. Найдены элементарные блоки факторизации в финитном и нефинитном случаях. Установлена связь с матричной задачей сопряжения. Указана общая схема построения широкого класса матриц рассеяния, допускающих квазирациональную факторизацию.

Ключевые слова: теория рассеяния, модельное уравнение, факторизация, квазирациональные решения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9336>

1. ВВЕДЕНИЕ

В пространстве функций *экспоненциального типа* рассматривается уравнение

$$a(k)a(-k) = 1 + b(k)b(-k), \quad (1)$$

которое в упрощенном варианте сводится к тригонометрическому: $a^2(k) - b^2(k) = 1$. В правой полуплоскости и в окрестности нуля на поведение решений уравнения (1) налагаются следующие нормировочные условия:

$$\begin{aligned} |2k(a(k) - 1)| &\leq \text{const}, & k &\in K_+; \\ \lim_{k \rightarrow 0} 2ka(k) &= - \lim_{k \rightarrow 0} 2kb(k) \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и ниже K_+ обозначает правую полуплоскость комплексного переменного k :

$$K_+ = \{k \in \mathbb{C}, \text{Re } k > 0\}. \quad (3)$$

Уравнение (1) и условия (2) связаны с теорией рассеяния для оператора Шредингера:

$$\psi_{xx} = U\psi, \quad U(x, k) = (q(x) + k^2) \quad (4)$$

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 15-11-20007).

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: shabatab@mail.ru

с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим *условию Повзнера* убывания при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|q(x)| dx < \infty. \quad (5)$$

В случае финитных потенциалов функции $2ka(k)$ и $2kb(k)$ – целые функции экспоненциального типа (см. [1]), в нефинитном случае у мероморфных решений (a, b) уравнения (1) кроме полюса в нуле могут появиться дополнительные полюсы. Заметим, что для вещественных потенциалов на вертикальной оси выполняются дополнительные *условия вещественности*:

$$k \in \partial K_+ \Rightarrow a(-k) = \bar{a}(k), \quad b(-k) = \bar{b}(k), \quad |a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2 > 0, \quad (6)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Отметим еще, что функция $b(-k) = -b(k)$ нечетна для четных потенциалов $q(-x) = q(x)$. Структура уравнения (1) при этом упрощается, так как

$$b(-k) = -b(k) \Rightarrow a(k)a(-k) = (1 - b(k))(1 + b(k)). \quad (7)$$

Мы будем сопоставлять решениям рассматриваемого уравнения (1) унимодулярные матрицы ¹⁾

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ b(-k) & a(-k) \end{pmatrix}, \quad \det A = a(k)a(-k) - b(k)b(-k) = 1. \quad (8)$$

Несложно проверить, что при перемножении матриц вида (8) порядок полюса в нуле не повышается. Более того, справедливо следующее предложение об инвариантности второго из условий (2) относительно групповых операций с унимодулярными матрицами.

ЛЕММА 1. *Перемножение и обращение унимодулярных матриц вида (8) не нарушают структуру полюса в нуле.*

Интересной задачей является выбор подходящих базисных решений обобщенного тригонометрического уравнения (1) и определение условий, достаточных для выполнения соотношений (2), при перемножении соответствующих матриц вида (8). В работах [1]–[3] был исследован случай базисных матриц $A = S_j(k)$ следующего вида:

$$S_j(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 + \hat{\gamma}_j & -e_j \hat{\gamma}_j \\ \tilde{e}_j \hat{\gamma}_j & 1 - \hat{\gamma}_j \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}_j = \frac{\gamma_j}{2k}, \quad \begin{cases} e_j = e^{2kx_j}, \\ \tilde{e}_j = e^{-2kx_j}. \end{cases} \quad (9)$$

Перемножение таких матриц приводит к решениям уравнения (1), для которых функции $2ka(k)$ и $2kb(k)$ являются *целыми функциями экспоненциального типа*. Условия вещественности (6) выполняются для любых произведений этих матриц при вещественных параметрах γ_j и x_j .

ПРИМЕР 1. *Дипольное решение* уравнения (1), которое получается при перемножении двух матриц (9), определяется следующими формулами, $S_1(k)S_2(k) = A(k)$:

$$-\tilde{e}_2 b(k) = \hat{\gamma}_2(1 + \hat{\gamma}_1) + e_1 \tilde{e}_2 \hat{\gamma}_1(1 - \hat{\gamma}_2), \quad a(k) = (1 + \hat{\gamma}_1)(1 + \hat{\gamma}_2) - e_1 \tilde{e}_2 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2.$$

¹⁾Для дифференциальных уравнений (4), (5) они играют роль матриц рассеяния.

Таким образом,

$$2k(a(k) - 1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \frac{1 - e^{2kx_{12}}}{2k} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2x_{21}, \quad \text{если } k = 0, \quad (10)$$

где $x_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} x_i - x_j$ и условия (2) выполняются при $x_2 > x_1$. При $x_2 = x_1$ в результате перемножения мы получаем снова матрицу (9) с $\gamma_j = \gamma_1 + \gamma_2$. Корни целой функции $2kb(k)$ экспоненциального типа находятся из простого уравнения

$$e_1\tilde{e}_2 = \frac{1 + 2k/\gamma_1}{1 - 2k/\gamma_2} = 1, \quad \text{если } \gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

и при $\gamma = \gamma_1h = -\gamma_2h$, $h = x_2 - x_1 = x_{21} > 0$ мы получаем

$$b(k) = \gamma \frac{2kh + \gamma}{2kh} e^{k(x_1+x_2)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k^2h^2}{n^2\pi^2}\right). \quad (11)$$

Обобщение формул (10) на случай произведения $N = 4$ матриц (9) приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} -\tilde{e}_4b(k) &= \hat{\gamma}_4 \prod (1 + \hat{\gamma}_j) + [e_{14}\hat{\gamma}_1(1 - \hat{\gamma}_2) + e_{24}\hat{\gamma}_2(1 + \hat{\gamma}_1)](1 - \hat{\gamma}_3)(1 - \hat{\gamma}_4) + \\ &+ e_{34}\hat{\gamma}_3[(1 + \hat{\gamma}_1)(1 + \hat{\gamma}_2) - e_{12}\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2](1 - \hat{\gamma}_4) + e_{12}\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_4(1 - \hat{\gamma}_3) - \\ &- e_{13}\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_4(1 - \hat{\gamma}_2) - e_{23}\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_4(1 + \hat{\gamma}_1), \\ 2k(a(k) - 1)|_{k=0} &= \sum_{j=1}^4 \gamma_j + \sum_{i>j} \gamma_i\gamma_jx_{ij} + \gamma_4\gamma_3x_{43}(\gamma_2x_{32} + \gamma_1x_{31}) + \\ &+ \gamma_2\gamma_1x_{21}(\gamma_3x_{32} + \gamma_4x_{42}) + x_{43}x_{32}x_{21} \prod_{j=1}^4 \gamma_j, \end{aligned}$$

где $e_{ij} \equiv e_i\tilde{e}_j$. Так как матрица (9) сводится к единичной при $\gamma_j = 0$, то указанная выше формула для $b(k)$ при $\gamma_4 = 0$ охватывает случай $N = 3$. Формула (10) для вычета $a(k)$ в нуле позволяет, как показано в [1], однозначно восстановить вид целой функции $2k(a(k) - 1)$ при $k \neq 0$. Обобщение этой интересной формулы (см. [3]) на произвольное N играет роль *теоремы сложения* для вычетов матриц (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При выполнении условий (2), (6) и при заданной функции $2kb(k)$, регулярной в правой полуплоскости (3) и не имеющей там нулей, функция $2ka(k)$ восстанавливается при помощи интеграла Пуассона:

$$\ln |a(k)| = \frac{\text{Re}(k)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + |b(k')|^2)}{|k - k'|^2} d\xi, \quad k' = i\xi. \quad (12)$$

С другой стороны, в случае $b(-k) = -b(k)$ уравнение (7) позволяет непосредственно выразить $b(k)$ через $a(k)$ (см. также [4], с. 55).

При сравнении целых функций, соответствующих различным решениям рассматриваемого уравнения (1), можно использовать как формулы, аналогичные (11):

$$2kb(k) = e^{2k\tau_0 + \tau_1} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k^2}{k_j^2}\right), \quad k_j \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

так и преобразование Фурье (см. формулу (14) ниже). В последнем случае норма целой функции $f(k)$, представимой в виде интеграла Фурье–Стилтьеса:

$$f(k) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{kx} dg(x), \quad \text{Var}_{[\alpha, \beta]}(g) < \infty, \quad \beta - \alpha = \sigma, \quad (14)$$

определяется через полную вариацию функции²⁾ $g(x)$.

2. СОЛИТНООБРАЗНЫЕ ФИНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Для обобщения описанного в разделе 1 класса квазирациональных решений уравнения (1) мы используем факторизацию матрицы рассеяния для уравнений Шредингера (4) с солитонными потенциалами $q(x)$ (см. [5], [6]). Эта факторизация возникает при разбиении вещественной оси узлами x_j на $N + 1$ промежутков:

$$I_j = [x_j, x_{j+1}], \quad I_0 = (-\infty, x_1], \quad I_N = [x_N, \infty), \quad (15)$$

и при введении в рассмотрение матриц рассеяния для каждого из этих промежутков I_j , включая I_0 и I_N .

Обозначим через $\psi_j(x, k) = \phi_j(x, k)e^{kx}$, $x \in \mathbb{R}$, решение задачи Коши для уравнения (4) с начальными данными

$$\psi_j(x, k) = e^{kx}, \quad \frac{d\psi_j}{dx}(x, k) = ke^{kx} \quad \text{при } x = x_j, \quad \text{Re } k \geq 0. \quad (16)$$

Известно, что для уравнения Шредингера с потенциалом $q(x)$ условие (5) гарантирует однозначную разрешимость следующего интегрального уравнения для решения $\psi(x, k) = \phi(x, k)e^{kx}$:

$$\begin{aligned} \phi(x, k) &= 1 + \int_{-\infty}^x R(x-s, k)\phi(s, k)q(s)ds, \\ R(x', k) &= \frac{1 - e^{-2kx'}}{2k}\theta(x') \Rightarrow |R(x', k)| \leq \int_0^{x'} |e^{-2ks}|ds \leq x', \quad \text{Re } k \geq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

которое соответствует задаче Коши (16) с заданным поведением при $x_j \rightarrow -\infty$. В теории рассеяния доказывается также, что для потенциала $q(x)$, удовлетворяющего условию (5), имеет место следующая асимптотическая формула для решения интегрального уравнения (17):

$$\phi(x, k) \approx a(k) + b(k)e^{-2kx}, \quad \text{Re } k = 0, \quad k \neq 0, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

Соответствующую матрицу вида (8)

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ b(-k) & a(-k) \end{pmatrix}, \quad \text{Re } k = 0, \quad k \neq 0, \quad \det T(k) = 1, \quad (19)$$

мы называем *матрицей рассеяния* на потенциале $q(x)$. Унимодулярность матрицы (19) следует из закона сохранения вронскиана:

$$\langle \psi, \tilde{\psi} \rangle = \psi \tilde{\psi}_x - \tilde{\psi} \psi_x = -2k, \quad \tilde{\psi}(x, k) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x, -k), \quad (20)$$

где $\tilde{\psi}$ и ψ удовлетворяют уравнению (4).

²⁾ Носитель $[\alpha, \beta]$ функции $g(x)$ можно сдвигать заменой $f(k) \rightarrow f(k)e^{2kh}$.

Разбиение (15) оси x на $N + 1$ интервалов порождает аналогичное разложение потенциала $q(x)$ в сумму $N + 1$ потенциалов:

$$q(x) = \sum_{i=0}^N q_i(x), \quad q_i(x) = q(x), \quad x \in I_i, \quad (21)$$

и, как будет показано ниже, следующую *факторизацию матрицы рассеяния* (19):

$$T = T_0 T_1 \cdots T_N, \quad T_0 = A_1, \quad T_i = A_i^{-1} A_{i+1}, \quad i \in [N-1], \quad T_N = A_N^{-1} T. \quad (22)$$

Здесь $A_j = A_j(k)$ – матрицы рассеяния для полубесконечных интервалов $(-\infty, x_j]$, $j \in [N]$:

$$A_j(k) = \begin{pmatrix} a_j(k) & b_j(k) \\ b_j(-k) & a_j(-k) \end{pmatrix}, \quad \det A_j = 1, \quad \operatorname{Re} k = 0, \quad (23)$$

а $N - 1$ матриц $T_i(k)$, $i \in [N - 1]$, являются матрицами рассеяния на финитных потенциалах рассматриваемого разбиения (21). Заметим предварительно, что решения задачи Коши (16) совпадают при $x > x_j$ с функциями $\psi_j(x, k) = \phi_j(x, k)e^{kx}$, где $\phi_j(x, k)$, $x \geq x_j$, $j = 1, \dots, N$, обозначает решение модифицированного интегрального уравнения (17) с нижним пределом x_j , и что при всех $j \in [N]$

$$\psi = a_j(k)\psi_j + b_j(k)\tilde{\psi}_j, \quad \tilde{\psi}_j(x, k) = \psi_j(x, -k). \quad (24)$$

Для вывода формул (22) мы используем инволюцию $k \leftrightarrow -k$, допускаемую дифференциальным уравнением (4). Определив при $\operatorname{Re} k = 0$ вектор-функции ψ_j , $j = 0, 1, \dots, N$:

$$\vec{\psi}_0(x, k) \equiv \begin{pmatrix} \psi(x, k) \\ \psi(x, -k) \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_j(x, k) \equiv \begin{pmatrix} \psi_j(x, k) \\ \psi_j(x, -k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{kx_j} \\ e^{-kx_j} \end{pmatrix} \quad \text{при } x = x_j,$$

мы переписываем разложение (24) решения Йоста по базисам $\psi_j, \tilde{\psi}_j$, $j \in [N]$, в матричном виде³⁾:

$$A_i \vec{\psi}_i = \vec{\psi}_0 \Rightarrow \vec{\psi}_0 = A_1 \vec{\psi}_i, \quad \vec{\psi}_i = A_i^{-1} A_{i+1} \vec{\psi}_{i+1}, \quad i \in [N-1].$$

Легко убедиться, что полученные соотношения эквивалентны факторизации (23).

Найдем теперь формулы, связывающие элементы матриц (22) с решением $\phi = \phi(x, k)$ основного интегрального уравнения (17). Учитывая начальные условия (16) и уравнения (24), получаем

$$\begin{aligned} \phi(x_j, k) &= a_j(k) + b_j(k)e^{-2kx_j}, \quad \left[\frac{1}{k} \phi_x + \phi \right](x_j, k) = a_j(k) - e^{-2kx_j}, \\ b_j(k)e^{-2kx_j} &= -\frac{1}{2k} \phi_x(x_j, k) = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{x_j} \phi(s, k) q(s) ds, \quad \operatorname{Re} k \geq 0, \\ a_j(k) &= \phi_j(k) - b_j(k)e^{-2kx_j}, \quad \phi_j(k) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x_j, k). \end{aligned} \quad (25)$$

³⁾Заметим, что $\langle \psi_j, \tilde{\psi}_j \rangle = \langle \psi, \tilde{\psi} \rangle = -2k \neq 0$, $k \neq 0$.

ПРИМЕР 2. Для солитонного потенциала $q(x)$ решение Йоста ψ определяется формулами

$$\psi(x, k) = \frac{k - f}{k + k_1} e^{kx}, \quad f = k_1 \operatorname{th}[k_1(x - x_0)], \quad q = -2f' \leq 0,$$

связанными с преобразованием Дарбу:

$$f' + f^2 = k_1^2, \quad (f(x) - D) \circ D^2 = (D^2 - q(x)) \circ (f(x) - D), \quad D \equiv \frac{d}{dx}. \quad (26)$$

Формулы (25), (23) дают в случае солитонного потенциала (ср. (9))

$$\begin{aligned} A_j(k) &= K_1^{-1} \begin{pmatrix} k - \alpha_j - \hat{\beta}_j & \hat{\beta}_j e_j \\ \hat{\beta}_j \tilde{e}_j & k + \alpha_j - \hat{\beta}_j \end{pmatrix}, \\ K_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} k + k_1 & 0 \\ 0 & k - k_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\beta_j}{2k}, \\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 &= k_1^2 \Leftrightarrow \det A_j = 1; \quad e_j = e^{2kx_j}, \quad \tilde{e}_j = e^{-2kx_j}. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как $\alpha_j = f(x_j)$, $\beta_j = f'(x_j)$ (см. (25)), то унимодулярность матриц A_j гарантирует выполнение дифференциального уравнения $f' + f^2 = k_1^2$, связанного с преобразованием Дарбу (26).

Матрицы $T_j(k)$, $j \in [N - 1]$, рассеяния на финитных потенциалах рассматриваемого разбиения (21) определяются формулами (22). Решения задачи Коши (16) являются целыми функциями от параметра k , и, соответственно, полюсы при $k = \pm k_1$, связанные с множителем $K_1(k)$ в формуле (27), сокращаются, и мы получаем

$$\begin{aligned} T_j &= \begin{pmatrix} k + \alpha_j - \hat{\beta}_j & -\hat{\beta}_j e_j \\ -\hat{\beta}_j \tilde{e}_j & k - \alpha_j - \hat{\beta}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - \alpha_{j+1} - \hat{\beta}_{j+1} & \hat{\beta}_{j+1} e_{j+1} \\ \hat{\beta}_{j+1} \tilde{e}_{j+1} & k + \alpha_{j+1} - \hat{\beta}_{j+1} \end{pmatrix}, \quad j \geq 1, \\ (T_j)_{12} &= e_{j+1} \frac{\beta_{j+1}}{2k} (k + \alpha_j) - e_j \frac{\beta_j}{2k} (k + \alpha_{j+1}) + \frac{\beta_j \beta_{j+1}}{2k} \frac{e_j - e_{j+1}}{2k}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для симметричного относительно центра солитона потенциала q_j

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} = 0, \quad \beta_j = \beta_{j+1}, \quad e_{j+1} = \tilde{e}_j,$$

и было бы интересно сравнить нули указанной целой функции $2k(T_j)_{12}$ с нулями $2kb(k)$ в случае диполя (11) (см. [7]).

В общем случае формулы (25) позволяют выразить в терминах решения $\phi(x, k)$ интегрального уравнения (17) все элементы матриц рассеяния $T_i(k)$, $i \in [N - 1]$, на финитных потенциалах разбиения (21), так как

$$T_i = A_i^{-1} A_{i+1} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_i a_{i+1} - b_i \tilde{b}_{i+1} & \tilde{a}_i b_{i+1} - b_i \tilde{a}_{i+1} \\ a_i \tilde{b}_{i+1} - \tilde{b}_i a_{i+1} & a_i \tilde{a}_{i+1} - \tilde{b}_i b_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Здесь, как и выше, тильда обозначает инволюцию $k \leftrightarrow -k$, допускаемую дифференциальным уравнением (4) и интегральным уравнением (17) при $\operatorname{Re} k = 0$. В отличие от рассмотренных выше примеров, связанных с произведениями матриц (9), (27) и обратных к ним, матрица рассеяния произвольного финитного потенциала не является, очевидно, квазирациональной функцией k .

ПРИМЕР 3. При $k \neq 0$ функция Йоста $\psi(x, k)$ имеет в случае прямоугольной ямы $q(x) = q_0$ на отрезке $x_1 \leq x \leq 0$ следующий вид:

$$\psi(x, k) = e^{kx_1} \left\{ \operatorname{ch}[z(x - x_1)] + \frac{k}{z} \operatorname{sh}[z(x - x_1)] \right\}, \quad z^2 = k^2 + q_0, \quad x_1 \leq x \leq 0. \quad (30)$$

Таким образом,

$$b(k) = x_1 q_0 \frac{e^{kx_1}}{2k} \frac{\operatorname{sh} x_1 z}{x_1 z}, \quad z = z(k) = \pm \sqrt{k^2 + q_0}. \quad (31)$$

Функция $z(k) > 0$, $k > \beta$, $\beta = \sqrt{|q_0|}$, определена здесь на комплексной k -плоскости с разрезом вдоль отрезка с концами $k = \pm \sqrt{-q_0}$ в точках ветвления. Тем не менее функция $b(k)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость и является целой функцией экспоненциального типа и допускает представление вида (13). Из формулы (31) следует, что нули $b(k) = 0$ в случае прямоугольной ямы определяются следующими уравнениями:

$$e^{2x_1 z(k)} = 1, \quad z(k) = \pm i \frac{\pi}{x_1} j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Таким образом, при $q_0 > 0$ все нули функции $b(k)$ располагаются на вертикальной оси вне разреза с концами $k = \pm i\beta$. С другой стороны, при $q_0 = -\beta^2 < 0$ и $|x_1\beta| > \pi$ функция $b(k)$ имеет вещественные нули, располагающиеся на разрезе $-\beta \leq k \leq \beta$. Отметим, что в этом случае функция $a(k)$ имеет нули в правой полуплоскости K^+ , так как при $|x_1\beta| > \pi$ имеется перемена знака у предельной функции Йоста $\psi(x) = \psi(x, k)|_{k=0}$:

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos[\beta(x - x_1)], & x_1 \leq x \leq 0, \\ \cos(x_1\beta) + x\beta \sin(x_1\beta), & x > 0. \end{cases} \quad (32)$$

Отметим, что в случае произведений матриц (9) график предельной функции Йоста задается в виде произвольной ломаной (см. [3]), которую можно выбрать близкой к графику рассматриваемой функции (32).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотренные в разделе 1 произведения матриц (9) описывают специальный частный случай рассеяния на дельтаобразных потенциалах вида

$$q = \sum_{j=1}^N q_j, \quad q_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_j \delta(x - x_j), \quad (33)$$

с узлами в концах отрезков (15). Условие (5), обеспечивающее однозначную разрешимость интегрального уравнения (17), заменяется для таких потенциалов (конечные меры Бореля) условием, что $q = p'$, где $p(x)$ – функция ограниченной вариации (см. [8]). Помимо ступенчатых функций $p(x)$, приводящих к дельтаобразным потенциалам, в классе функций ограниченной вариации содержатся обобщенные функции Кантора–Лебега, обладающие своеобразной автомодельностью. Преобразование Фурье–Стилтьеса этих функций удовлетворяет разностным уравнениям (см. [9]), и задача о построении специальных решений уравнения (1), связанных с этими разностными уравнениями, представляется интересной.

3. ЗАДАЧА МАТРИЧНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

При построении факторизации (22) в качестве базиса для дифференциального уравнения (4) помимо решения $\phi(x, k)$ интегрального уравнения (17) использовалась функция $\phi(x, -k)$. Вместо этого в теории рассеяния используется решение другого интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \phi^-(x, k) &= 1 + \int_x^\infty R(s - x, k) \phi^-(s, k) q(s) ds, \\ \phi^-(x, k) &\approx a(k) - b(-k) e^{2kx}, \quad \operatorname{Re} k = 0, \quad k \neq 0, \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (34)$$

двойственного (17) при замене $x \leftrightarrow -x$. Ядро R в интегральном уравнении (34) то же, что и в (17), поэтому у дополнительной функции Йоста $\psi^-(x, k) = \phi^-(x, k) e^{-kx}$ не возникает особенностей при продолжении с мнимой оси в правую полуплоскость K^+ . Отметим в этой связи, что в терминах исходного уравнения (1) замена $x \leftrightarrow -x$ эквивалентна замене

$$(a(k), b(k)) \leftrightarrow (a(k), -b(-k)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матричным решением задачи рассеяния мы называем матрицу Вронского $\Psi(x, k)$, $\operatorname{Re} k \geq 0$, функций Йоста $\psi(x, k) = \phi(x, k) e^{-kx}$ и $\psi^-(x, k) = \phi^-(x, k) e^{-kx}$, где ϕ и ϕ^- – решения интегральных уравнений (17) и (34) соответственно:

$$\Psi(x, k) = \begin{pmatrix} \psi(x, k) & \psi^-(x, k) \\ \psi_x(x, k) & \psi_x^-(x, k) \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} k \geq 0. \quad (35)$$

Из уравнений (17) и (34) выводится матричное уравнение

$$\Psi(x, -k) \sigma = \Psi(x, k) \times \frac{1}{a(k)} \begin{pmatrix} 1 & b(-k) \\ -b(k) & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} k = 0, \quad (36)$$

которое является основой обратной задачи рассеяния. Отметим, что матрица Вронского

$$\tilde{\Psi}(x, k) = \Psi(x, -k) \sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}^-(x, k) & \tilde{\psi}^+(x, k) \\ \tilde{\psi}_x^-(x, k) & \tilde{\psi}_x^+(x, k) \end{pmatrix}$$

в левой части уравнения (36) построена по решениям Йоста при помощи замены $k \rightarrow -k$. Поэтому свойства матричной функции $\tilde{\Psi}(x, k)$ в левой полуплоскости спектрального параметра k аналогичны свойствам $\Psi(x, k)$ в правой полуплоскости (3). При этом вертикальная прямая $k = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, играет в уравнении (36) роль линии сопряжения. Как показано в нашей работе [3], при минимальных требованиях на гладкость потенциала асимптотика $\Psi(x, k)$ в правой полуплоскости K_+ имеет при фиксированном x следующий вид:

$$\Psi(x, k) \times \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{kx} & 0 \\ 0 & e^{-kx} \end{pmatrix} \right]^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(x) & 1 \end{pmatrix}, \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} k \geq 0. \quad (37)$$

Это условие задает нормировку в рассматриваемой задаче о матричном сопряжении (36)⁴⁾ и, если $\det \Psi \neq 0$ в K_+ , обеспечивает единственность решения задачи (36), (37) при заданном $p(x)$ (см. [10]).

⁴⁾Переменные x и k меняются ролями в прямой и обратной задачах рассеяния.

Рассматриваемое уравнение (1) является следствием уравнения (36). Действительно, не сложно проверить, что

$$\det \Psi(x, k) = -2ka(k), \quad \det \tilde{\Psi}(x, k) = -2ka(-k). \quad (38)$$

Переписав матричное уравнение (36) в терминах определителей и используя равенства (38), мы приходим к требуемому соотношению (1). Отметим еще, что в финитном случае с носителем потенциала на отрезке $[x_1, x_N]$ пара целых функций $2ka(k)$, $2kb(k)$, удовлетворяющих уравнению (1), позволяет выписать решение $\Psi(x, k)$ матричной задачи сопряжения в явном виде при $x < x_1$ и $x > x_N$. Концы отрезка $[x_1, x_N]$ определяются при этом из соотношений (ср. (14))

$$2kb(k) = \int_{x_1}^{x_N} e^{2kt} dg(t), \quad \limsup \frac{|\ln |b(k)||}{2k} = \begin{cases} x_1, & k \rightarrow -\infty, \\ x_N, & k \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (39)$$

Вопрос о возможности продолжения внутрь отрезка $x_1 < x < x_N$ построенной таким образом функции $\Psi(x, k)$ требует выяснения достаточных условий разрешимости матричной задачи сопряжения (36) (задачи Римана) в рассматриваемом классе квазирациональных матричных функций от спектрального параметра k .

Для того чтобы уточнить свойства решений Йоста, обычно используют уравнение Риккати $f_x + f^2 = U$, $f = \psi_x/\psi$, которое позволяет отделить быстро меняющуюся по x фазу в дифференциальном уравнении второго порядка (4) от амплитуды. В случае задачи на всей оси наряду с уравнением Риккати можно изучать следующую краевую задачу:

$$A_{xxx} = 4UA_x + 2U_xA, \quad A(x, k) \rightarrow a(k), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad k \in K_+. \quad (40)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $k \in K_+$, $a(k) \neq 0$ и выполнено условие (5). Тогда решение задачи (40) существует и единственно.

Аналогичное решение $\tilde{A}(x, k)$ уравнения третьего порядка определяется в левой полуплоскости $\operatorname{Re} k < 0$ формулой $\tilde{A}(x, k) = A(x, -k)$. Ясно, что

$$A(x, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(x, i\xi)}{i\xi - k} d\xi, \quad \chi(x, i\xi) = A(x, i\xi) - A(x, -i\xi). \quad (41)$$

Для вещественных потенциалов разность этих двух решений краевой задачи (40) является чисто мнимой функцией на вертикальной оси. Очевидно, что в силу своего определения функция $\chi(x, k) = A(x, k) - A(x, -k)$ – нечетная функция спектрального параметра k .

Полиномиальные по k решения рассматриваемого уравнения третьего порядка, известного своими приложениями в теории интегрируемости, соответствуют дополнительным симметриям уравнения Шредингера (4). Можно надеяться, что построенные в данной работе новые примеры решений $A(x, k)$ краевой задачи (40) позволят уточнить условия разрешимости матричной задачи Римана (36) и связанной с ней обратной задачи рассеяния с априори заданными вронскианами $a(k)$ и $b(k)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о разложении (22) заданной матрицы рассеяния в произведение элементарных квазирациональных решений уравнения (1) позволяет построить приближенное решение соответствующей матричной задачи сопряжения (36). В общем нефинитном случае, удовлетворяющем условию (5), матрицу рассеяния $A_1(k)$ на потенциале q_0 можно приблизить тривиальной за счет выбора узла x_1 в разбиении (21). После этого формулы типа солитонной (28) или дипольной, рассмотренной в примере 1, сводят дело к сращиванию их друг с другом при помощи факторизации (22) матрицы рассеяния на потенциале $q = \sum q_i$.

Список литературы

- [1] А. Б. Шабат, “Разностное уравнение Шредингера и квазисимметрические многочлены”, *ТМФ*, **184**:2 (2015), 200–211.
- [2] А. Б. Шабат, “Теория рассеяния для дельтаобразных потенциалов”, *ТМФ*, **183**:1 (2015), 105–119.
- [3] А. Б. Шабат, “Обратная спектральная задача для дельтаобразных потенциалов”, *Письма в ЖЭТФ*, **102**:9 (2015), 705–708.
- [4] P. Koosis, *The Logarithmic Integral. I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **12**, Cambridge, 1997.
- [5] V. Bargman, “Remarks on the determination of a central field of force from the elastic scattering phase shifts”, *Phys. Rev.*, **75**:2 (1949), 301–303.
- [6] А. Б. Шабат, “Рациональная интерполяция и солитоны”, *ТМФ*, **179**:3 (2014), 303–316.
- [7] М. Ш. Бадахов, А. Б. Шабат, “О преобразованиях Дарбу в обратной задаче рассеяния”, *Уфимск. матем. журн.*, **8**:4 (2016), 43–52.
- [8] Р. Ч. Кулаев, А. Б. Шабат, *Обратная задача рассеяния для финитных потенциалов в пространстве мер Бореля*, ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, 2016.
- [9] А. Б. Шабат, “Функциональное уравнение Кантора”, *ТМФ*, **189**:3 (2016), 355–361.
- [10] А. Б. Шабат, “Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 75–78.

Поступила в редакцию 16.01.2017