Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Гуревич, П. А. Салонов, Обобщенные янгианы
и их пуассонова структура, *ТМФ*, 2017, том 192, но-
мер 3, 351–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:33:57

© 2017 г.

Д. И. Гуревич*, П. А. Сапонов^{†‡}

ОБОБЩЕННЫЕ ЯНГИАНЫ И ИХ ПУАССОНОВА СТРУКТУРА

Под обобщенными янгианами подразумеваются близкие к янгианам алгебры двух различных классов. Один из этих классов содержит семейство так называемых брейдинговых янгианов, введенных ранее. В некоторых отношениях брейдинговый янгиан близок по свойствам к алгебре уравнения отражений. Обобщенные янгианы второго класса – янгианы RTT -типа – задаются теми же формулами, что и обычный янгиан, но с другими квантовыми R -матрицами. Если такая R -матрица является простейшей тригонометрической R -матрицей, то соответствующий янгиан RTT -типа называется q -янгианом. Утверждается, что всякий обобщенный янгиан есть деформация коммутативной алгебры $\text{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$, если определяющая его R -матрица представляет собой деформацию оператора перестановки. Приведен явный вид соответствующих скобок Пуассона.

Ключевые слова: токовая R -матрица, брейдинговый янгиан, квантовые симметрические полиномы, квантовый детерминант, пуассонова структура, деформационное свойство.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9339>

Посвящается памяти П. П. Кулиша

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было определено понятие брейдингового янгиана (это название происходит от английского словосочетания braided Yangian), связанного с широким классом рациональных и тригонометрических R -матриц. Фактически это новое обобщение янгиана $\mathbf{Y}(gl(m))$, введенного Дринфельдом в работе [2]. Согласно одному

Работа П. А. Сапонова финансировалась в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации “5-100”, а также частично поддержана РФФИ (грант № 16-01-00562).

*Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Valenciennes, Université de Valenciennes, Valenciennes, France. E-mail: gurevich@ihes.fr

[†]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

[‡]Институт физики высоких энергий, Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: Pavel.Saponov@ihep.ru

из определений янгиан $\mathbf{Y}(gl(m))$ является алгеброй, порожденной коэффициентами матричнозначной функции

$$L(u) = \sum_{k \geq 0} L[k] u^{-k}. \quad (1.1)$$

Коэффициенты Лорана $L[k]$ представляют собой конечные $(m \times m)$ -матрицы, причем $L[0] = I$ – единичная матрица. Матричные элементы $L(u)$ удовлетворяют системе соотношений

$$R(u, v) L_1(u) L_2(v) - L_1(v) L_2(u) R(u, v) = 0, \quad (1.2)$$

где $R(u, v) = P - aI/(u - v)$ – известная R -матрица Янга¹⁾, I – единичная матрица, P – оператор перестановки или его матрица. Матрица $L(u)$ (и аналогичные матрицы, рассматриваемые ниже) называется *производящей матрицей*.

Упомянутая выше R -матрица Янга – простейший пример токовой (т. е. зависящей от спектрального параметра) матрицы, которая является одним из решений квантового уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}(u, v) R_{23}(u, w) R_{12}(v, w) = R_{23}(v, w) R_{12}(u, w) R_{23}(u, v). \quad (1.3)$$

Если в равенстве (1.2) заменить R -матрицу Янга на другую токовую матрицу $R(u, v)$, мы придем к классу янгианоподобных алгебр. Самый известный пример – так называемый q -янгиан, который отвечает простейшей тригонометрической R -матрице, происходящей из квантовой группы $U_q(\widehat{sl(m)})$. Ниже все объекты и структуры, связанные с алгебрами $U_q(\widehat{sl(m)})$ или $U_q(sl(m))$, называются *стандартными*.

Помимо стандартной R -матрицы существует большое семейство рациональных и тригонометрических токовых R -матриц, которые строятся соответственно из инволютивных и геккевских постоянных R -матриц с помощью процедуры бакстеризации (точные определения даны в разделе 2). Соответствующие алгебры с соотношениями (1.2) будем называть *янгианами RTT -типа* и обозначать символом $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$. При этом, в отличие от обычного янгиана, мы не будем налагать условие $L[0] = I$.

Другой класс алгебр – брейдинговые янгианы – был введен в работе [1]. Генерирующая матрица каждой такой алгебры удовлетворяет следующему соотношению:

$$R(u, v) L_1(u) R L_1(v) - L_1(v) R L_1(u) R(u, v) = 0, \quad (1.4)$$

где $R(u, v)$ – упомянутая выше токовая R -матрица, полученная процедурой бакстеризации из постоянной инволютивной или геккевской R -матрицы. Генерирующая матрица $L(u)$ также представляет собой формальный ряд, определенный в формуле (1.1), с дополнительным условием $L[0] = I$. Брейдинговый янгиан будем обозначать символом $\mathbf{Y}(R)$.

Определенные выше янгианоподобные алгебры будем называть *обобщенными янгианами*.

Отметим, что свойства обобщенных янгианов $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$ и $\mathbf{Y}(R)$ существенно различаются. В частности, они имеют разную структуру биабелы. Связь операций

¹⁾ Отметим, что часто используется другая форма этой R -матрицы: $\mathcal{R}(u, v) = PR(u, v)$.

коумножения и умножения в тензорном квадрате в янгианах RTT -типа обычная, тогда как в брейдинговых янгианах она более сложная и напоминает ситуацию в супералгебрах, только роль суперперестановки берут на себя более сложные операторы, строящиеся из определяющей R -матрицы. Кроме того, в двух классах обобщенных янгианов совершенно разные *вычисляющие отображения*²⁾, что приводит к большому различиям в теории представлений этих алгебр.

Вычисляющее отображение для брейдинговых янгианов сходно с подобным отображением в классическом случае. Образ этого отображения содержится в алгебре уравнения отражений, определяемой исходной R -матрицей R . Модифицированная алгебра уравнения отражений (отличается от обычной линейным сдвигом некоторых генераторов на единичный элемент) может быть интерпретирована как твистованный аналог алгебры $U(gl(m))$. В частности, категории конечномерных представлений $U(gl(m))$ и модифицированной алгебры уравнения отражений во многом похожи [3]. Вычисляющее отображение позволяет, таким образом, построить большой набор нетривиальных представлений брейдинговых янгианов.

В случае янгианов RTT -типа вычисляющее отображение менее интересно, поскольку его образы лежат в алгебрах, теория представлений которых в общем случае неизвестна. Пример q -янгиана RTT -типа, связанного со стандартной тригонометрической R -матрицей, приведен в монографии [4].

Основная цель настоящей статьи заключается в исследовании *деформационных свойств* обобщенных янгианов обоих классов³⁾. Мы будем говорить, что ассоциативная алгебра A_h , зависящая от некоторого параметра h , имеет деформационное свойство, если при $h = 0$ она превращается в коммутативную алгебру $A = A_0$ и в этой коммутативной алгебре можно задать новое произведение $\star_h$, индуцированное алгеброй A_h и гладко зависящее от параметра h . Это, в свою очередь, означает, что для значений параметра в общем положении существуют изоморфизмы линейных пространств $\alpha_h: A \rightarrow A_h$, гладко зависящие от h и являющиеся тождественными отображениями при нулевом параметре: $\alpha_0 = \text{Id}$. Тогда индуцированное произведение в алгебре A задается правилом

$$f \star_h g = \alpha_h^{-1}(\alpha_h(f) \circ \alpha_h(g)),$$

где символ $\circ$ обозначает умножение в алгебре A_h . Отображения α_h обычно строятся с использованием специального базиса (иногда называемого базисом Пуанкаре–Биркгофа–Витта) в алгебре A_h . В дальнейшем мы покажем, что каждый обобщенный янгиан представляет собой деформацию коммутативной алгебры $\text{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$ при дополнительном условии, что R есть деформация оператора перестановки.

Если алгебра A_h обладает деформационным свойством, тогда произведение $\star_h$ можно разложить в ряд по параметру:

$$f \star_h g = f \cdot g + hc_1(f, g) + h^2 c_2(f, g) + \dots,$$

²⁾От английского термина “evaluation map” – отображение в некоторую *конечнопорожденную* алгебру как один из шагов построения представлений янгиана.

³⁾Все алгебры, которые мы рассматриваем, определяются посредством генераторов и соотношений для них. Параметры, входящие в соотношения, не формальны и могут быть заданы.

где $\cdot$ обозначает коммутативное произведение в алгебре A . В этом случае на алгебре A существует скобка Пуассона, задаваемая антисимметризацией слагаемого c_1 :

$$A^{\otimes 2} \ni f \otimes g \mapsto \{f, g\} = \frac{1}{2}(c_1(f, g) - c_1(g, f)) \in A.$$

Второй целью нашей работы является явное вычисление пуассоновых структур, отвечающих янгианам обоих классов. Мы выписываем квадратичные скобки Пуассона и их линеаризацию для обоих классов янгианов.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 напоминаются определения RTT - и RE -алгебр, приводится конструкция янгианов обоих классов и описываются некоторые их свойства. Прежде всего мы рассматриваем так называемую процедуру бакстеризации, которая позволяет конструировать токовые R -матрицы из инволютивных или геккевских R -матриц. Затем описываются целевые алгебры для вычисляющего отображения соответствующих брейдинговых янгианов и строятся квантовые аналоги некоторых симметрических полиномов. Наконец, приводится вид матричного тождества Гамильтона–Кэли для производящей матрицы брейдингового янгиана.

Раздел 3 посвящен вопросу о деформационных свойствах обобщенных янгианов. Мы приводим аргументы в пользу утверждения о том, что обобщенные янгианы являются деформациями коммутативной алгебры $\text{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$ в случае, если исходная матрица R представляет собой деформацию оператора перестановки. Затем вычисляются квадратичные скобки Пуассона, отвечающие этой деформации.

Раздел 4 посвящен линеаризации квадратичных скобок Пуассона. В случае малых размерностей приведены два явных примера таких скобок.

Основное числовое поле $\mathbb{K}$ является полем комплексных ($\mathbb{C}$) или вещественных ($\mathbb{R}$) чисел.

В заключение подчеркнем еще раз, что свойства брейдинговых янгианов (и, в частности, их пуассонова структура) весьма схожи со свойствами обычных янгианов. Пользуясь этим сходством, можно обобщить метод квантования рациональной модели Годена, предложенный Талалаевым [5], на тригонометрический случай. Мы планируем осветить эти вопросы в наших следующих публикациях.

2. КВАНТОВЫЕ МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ЯНГИАНЫ

Начнем с рассмотрения квантовых матричных алгебр, аналогичных янгианам обоих классов, но связанных с *постоянными* R -матрицами. Напомним, что оператор $R: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$, где V – некоторое конечномерное линейное пространство ($\dim V = m$), называется *твистом*, если он удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера (1.3), в котором следует опустить зависимость от параметров. Твист R будем называть *симметрией Гекке* или *инволютивной симметрией*, если он дополнительно подчиняется соотношению

$$(qI - R)(q^{-1}I + R) = 0, \quad (2.1)$$

где ненулевой числовой параметр q удовлетворяет условию $q^2 \neq 1$ или $q^2 = 1$ соответственно. Ниже мы будем полагать, что если $q \neq 1$, то значения q выбираются в *общем положении*, т. е. $q^n \neq 1$ для любого целого n .

Ассоциативная алгебра, порожденная матричными элементами матрицы $L = \|l_i^j\|_{1 \leq i, j \leq m}$, которая удовлетворяет матричному соотношению

$$RL_1RL_1 - L_1RL_1R = h(RL_1 - L_1R), \quad (2.2)$$

называется *модифицированной алгеброй уравнения отражений*, если $h \neq 0$. В случае $h = 0$ мы будем опускать определение “модифицированная”. Алгебра (2.2) будет обозначаться символом $\mathcal{L}(R, h)$ для ненулевых значений параметра и символом $\mathcal{L}(R)$ при $h = 0$. Как обычно, нижние индексы матриц и операторов (например, L_i , R_{ij} и т. д.) указывает позицию сомножителя (или сомножителей) V в произведении $V^{\otimes n}$, в котором действует данный оператор. Кроме того, для оператора R_{ii+1} выберем краткое обозначение R_i .

Также введем в рассмотрение так называемую *RTT-алгебру*, связанную с твистом R и определяемую следующей системой соотношений на матричные элементы производящей матрицы:

$$RT_1T_2 - T_1T_2R = 0, \quad T = \|t_i^j\|_{1 \leq i, j \leq m}. \quad (2.3)$$

Эту алгебру будем обозначать как $\mathcal{T}(R)$.

Алгебры $\mathcal{L}(R)$ и $\mathcal{T}(R)$ представляют собой примеры квантовых матричных алгебр, которые в общем случае задаются парой согласованных твистов [6].

Твист R называется *косообратимым*, если существует оператор $\Psi: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ такой, что

$$\text{Tr}_2 R_{12} \Psi_{23} = P_{13} \Leftrightarrow R_{ij}^{kl} \Psi_{lp}^{jq} = \delta_i^q \delta_p^k. \quad (2.4)$$

Все твисты R , с которыми мы будем иметь дело в настоящей работе, предполагаются косообратимыми инволютивными или симметриями Гекке.

Для всякого косообратимого твиста R можно определить так называемый R -след $\text{Tr}_R A$, где A – произвольная матрица размера $m \times m$. Эта операция обладает рядом полезных свойств и приложений. Например, R -след входит в конструкцию *квантовых симметрических полиномов* в алгебрах $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$, а также в обобщенных янгианах обоих классов. Явный вид этой операции выписан ниже для обобщенного янгиана. Отметим, что упомянутые квантовые симметрические полиномы генерируют так называемые характеристические подалгебры $Ch(\mathcal{T}(R))$ и $Ch(\mathcal{L}(R))$ в алгебрах $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$ соответственно. Свойства подалгебр $Ch(\mathcal{T}(R))$ и $Ch(\mathcal{L}(R))$ сильно отличаются друг от друга: последняя подалгебра центральна в RE-алгебре, тогда как подалгебра $Ch(\mathcal{T}(R))$ коммутативна, но не центральна. Более подробное изложение можно найти в работах [6], [7].

Обратимся теперь к обобщенным янгианам. Для этого нам прежде всего потребуется указать явный вид токовых R -матриц, входящих в формулы (1.2) и (1.4). В статье [1] было доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Рассмотрим сумму*

$$R(u, v) = R + g(u, v)I, \quad (2.5)$$

где R представляет собой некоторый твист, $g(u, v) = f(u - v)$, а $f(z)$ – непостоянная мероморфная функция.

Если R – инволютивная симметрия, то матрица $R(u, v)$ является токовой R -матрицей в том и только том случае, когда

$$g(u, v) = \frac{a}{u - v}. \quad (2.6)$$

Если же $R = R_q$ – симметрия Гекке, тогда $R(u, v)$ является токовой R -матрицей в том и только том случае, если

$$g(u, v) = \frac{q - q^{-1}}{b^{u-v} - 1}. \quad (2.7)$$

Здесь a и $b \neq 1$ – произвольные ненулевые комплексные числа.

Полагая, в частности, $b = q^{-2/a}$, мы получим следующее выражение:

$$R(u, v) = R_q - \frac{q^{(u-v)/a}}{((u-v)/a)_q} I. \quad (2.8)$$

В пределе $q \rightarrow 1$ эта R -матрица стремится к

$$R_1 - \frac{a}{u - v} I \quad (2.9)$$

при условии, что симметрия Гекке R_q стремится к инволютивной матрице R_1 .

Сделав замену переменных $b^{-u} \rightarrow u$, $b^{-v} \rightarrow v$ в (2.7), мы приходим к следующему виду тригонометрической токовой R -матрицы:

$$R(u, v) = R - \frac{u(q - q^{-1})}{u - v} I. \quad (2.10)$$

Очевидно, она зависит только от отношения $x = v/u$.

Далее мы будем рассматривать янгианы RTT -типа $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$ и брейдинговые янгианы $\mathbf{Y}(R)$, определяемые соответственно формулами (1.2) и (1.4), где $R(u, v)$ представляют собой токовые R -матрицы (2.9) или (2.10), тогда как средние множители R в (1.4) являются исходными симметриями.

Как отмечалось выше, янгианы обоих классов обладают структурой биалгебры, но в $\mathbf{Y}(R)$ эта структура твистованная. Подробности можно найти в работе [1].

Рассмотрим теперь вычисляющее отображение для брейдингового янгиана. Для данного янгиана $\mathbf{Y}(R)$ вычисляющее отображение определяется формулой

$$L(u) \mapsto I + \frac{M}{u}, \quad (2.11)$$

где M является производящей матрицей целевой алгебры. Конкретная структура этой алгебры зависит от исходной симметрии R . А именно, имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [1]. 1. Если твист R является инволютивной симметрией, то отображение (2.11) задает сюръективный морфизм $\mathbf{Y}(R) \rightarrow \mathcal{L}(R, 1)$. Кроме того, отображение $M \mapsto L[1]$ определяет инъективный морфизм $\mathcal{L}(R, 1) \rightarrow \mathbf{Y}(R)$.

2. Если твист R является симметрией Гекке, то отображение (2.11) задает морфизм $\mathbf{Y}(R) \rightarrow \mathcal{L}(R)$.

Таким образом, в первом случае целевой алгеброй является $\mathcal{L}(R, 1)$, а во втором – $\mathcal{L}(R)$.

Предложение 2 позволяет построить категорию конечномерных представлений брейдингового янгиана на основе результатов статьи [3], в которой такая категория была построена для алгебры $\mathcal{L}(R, 1)$. Таким образом, если R является инволютивной симметрией, вычисляющее отображение превращает любой $\mathcal{L}(R, 1)$ -модуль в модуль над $\mathbf{Y}(R)$. Если же R – симметрия Гекке, тогда вначале мы превращаем данный $\mathcal{L}(R, 1)$ -модуль в модуль над алгеброй $\mathcal{L}(R)$, а затем реализуем в нем представление янгиана $\mathbf{Y}(R)$. Это всегда возможно, поскольку алгебры $\mathcal{L}(R)$ и $\mathcal{L}(R, 1)$ изоморфны. Их изоморфизм дается следующим отображением:

$$\mathcal{L}(R) \rightarrow \mathcal{L}(R, 1), \quad L \mapsto L - \frac{1}{q - q^{-1}} I, \quad q^2 \neq 1.$$

Вычисляющее отображение для янгианов RTT -типа имеет следующий вид:

$$L(u) \mapsto T_0 + \frac{T_1}{u}. \quad (2.12)$$

Если твист R – симметрия Гекке, тогда отображение (2.12) переводит янгиан в целевую алгебру, которая сходна с квантовой алгеброй $U_q(\mathfrak{gl}(m))$. Явная форма этой алгебры приведена, например, в [4], [8]. Если R – инволютивная симметрия, то целевая алгебра – новый объект, и ее свойства не изучены. Заметим, что если наложить условие $T_0 = I$, то возникнет противоречие в перестановочных соотношениях целевой алгебры. Именно по этой причине в янгианах RTT -типа не налагается условие $T[0] = I$ на коэффициенты Лорана производящей матрицы.

Приступим теперь к построению *квантовых симметрических полиномов* в брейдинговых янгианах. Кроме того, мы выпишем семейство матричных тождеств Гамильтона–Кэли–Ньютона, аналогичных тождествам, найденным в [6] для квантовых матричных алгебр.

С этой целью определим вначале квантовые аналоги матричных степеней производящей матрицы. Мы будем работать с тригонометрическими R -матрицами (2.8), где положим $a = 1$. Формулы для рациональных R -матриц (2.9) могут быть получены предельным переходом $q \rightarrow 1$ в форме (2.8).

Определим *квантовые косые степени* матрицы $L(u)$ следующим образом:

$$L^{\wedge k}(x) = \text{Tr}_{R(2 \dots k)}(\mathcal{P}_{12 \dots k}^{(k)} L_{\bar{1}}(x) L_{\bar{2}}(x - 1) \dots L_{\bar{k}}(x - k + 1)), \quad k \geq 2, \quad (2.13)$$

где

$$\mathcal{P}_{12 \dots k+1}^{(k+1)} = \frac{(-1)^k}{(k+1)_q} R_1(1) R_2(2) \dots R_k(k) \mathcal{P}_{12 \dots k}^{(k)} \quad (2.14)$$

есть q -антисимметризатор в пространстве $V^{\otimes(k+1)}$, построенный по симметрии Гекке R . По определению будем считать $L^{\wedge 1}(x) = L(x)$. Заметим, что если симметрия Гекке R является деформацией обычной перестановки P , тогда $L^{\wedge k}(x) \equiv 0$ для всех $k > m$.

Определим также *квантовые матричные степени* производящей матрицы:

$$L^k(x) = \text{Tr}_{R(2 \dots k)}(R_1 R_2 \dots R_{k-1} L_{\bar{1}}(x) L_{\bar{2}}(x - 1) \dots L_{\bar{k}}(x - k + 1)), \quad k \geq 1. \quad (2.15)$$

Теперь *квантовые элементарные симметрические полиномы* и *квантовые степенные суммы* определяются соответственно следующими выражениями:

$$e_k(x) = \text{Tr}_R(L^{\wedge k}(x)), \quad s_k(x) = \text{Tr}_R(L^k(x)). \quad (2.16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Квантовые косые степени и матричные степени матрицы $L(u)$ связаны системой тождеств Гамильтона–Кэли–Ньютона*

$$(-1)^{k+1} k_q L^{\wedge k}(x) = \sum_{p=1}^k (-q)^{k-p} L^p(x) e_{k-p}(x-p), \quad k \geq 1. \quad (2.17)$$

Если R есть деформация перестановки P , тогда последнее нетривиальное тождество Гамильтона–Кэли–Ньютона превращается в квантовый аналог классического тождества Гамильтона–Кэли. В этом случае старший нетривиальный симметрический полином $e_m(x)$ называется *квантовым детерминантом*.

Вычисляя R -след от соотношения (2.17), мы приходим к связи квантовых степенных сумм и элементарных симметрических полиномов.

В янгианах RTT -типа все эти объекты (квантовые матричные степени, косые степени, степенные суммы и элементарные симметрические полиномы) также хорошо определены. Заметим, что элементарные симметрические полиномы и степенные суммы в янгианах обоих классов порождают коммутативные подалгебры. Однако, в отличие от алгебры уравнения отражений, эти коммутативные подалгебры не центральны. Единственный нетривиальный квантовый симметрический полином, который централен в брейдинговом янгиане $\mathbf{Y}(R)$, – это квантовый детерминант. Говоря точнее, все коэффициенты разложения детерминанта в ряд по спектральному параметру являются элементами центра. В янгиане $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$ квантовый детерминант централен тогда и только тогда, когда он централен в соответствующей RTT -алгебре. Таким образом, центральность квантового детерминанта полностью определяется свойствами исходного твиста R .

В разделе 4 мы приводим пример RTT -алгебры и, следовательно, янгиана $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$ с нецентральным квантовым детерминантом.

3. ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЯНГИАНОВ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПУАССОНОВЫ СТРУКТУРЫ

Все янгианы, которые рассматриваются в данной статье, вводятся через генераторы и соотношения на них. Поэтому необходимо проверить деформационные свойства получающихся алгебр, предполагая, что инволютивный или геккеский твист R является деформацией оператора перестановки. Ниже приводятся аргументы в пользу хороших деформационных свойств обобщенных янгианов. Кроме того, мы выпишем явные формулы для их пуассоновой структуры.

Но сначала мы сравним деформационные свойства квантовых матричных алгебр $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$. С этой целью введем следующие обозначения:

$$L_{\bar{1}} = L_1, \quad L_{\bar{k}} = R_{k-1} L_{\overline{k-1}} R_{k-1}^{-1} \quad \forall k \geq 2.$$

Для $h = 0$ соотношения (2.2) могут быть записаны в форме, аналогичной соотношениям в RTT -алгебре:

$$R L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} = L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} R.$$

Эти обозначения полезны также и для установления некоторых изоморфизмов линейных пространств $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$. Обозначим символами

$$\mathbf{T} = \text{span}_{\mathbb{K}}(t_i^j), \quad \mathbf{L} = \text{span}_{\mathbb{K}}(l_i^j)$$

векторные пространства, порождаемые соответственно генераторами t_i^j RTT -алгебры $\mathcal{T}(R)$ и генераторами l_i^j алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$, связанных с твистом R . Для любого положительного целого k рассмотрим линейное отображение $\pi_k: \mathbf{T}^{\otimes k} \rightarrow \mathbf{L}^{\otimes k}$ тензорных степеней пространств, которое на базисных элементах задается правилом

$$\pi_k(T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_k) = L_{\bar{1}} \otimes L_{\bar{2}} \otimes \cdots \otimes L_{\bar{k}}, \quad k \geq 1.$$

Ниже мы будем опускать знак тензорного произведения $\otimes$ для упрощения записи формул.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \pi_k(T_1 \dots T_{i-1}(R_i T_i T_{i+1} - T_i T_{i+1} R_i) T_{i+1} \dots T_k) = \\ = L_{\bar{1}} \dots L_{\bar{i-1}}(R_i L_{\bar{i}} L_{\bar{i+1}} - L_{\bar{i}} L_{\bar{i+1}} R_i) L_{\bar{i+1}} \dots L_{\bar{k}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

для всех $k \geq 2$, $1 \leq i \leq k-1$. Все матрицы, входящие в эти формулы, имеют размер $m^k \times m^k$.

Однородная компонента $\mathcal{L}(R)^{(k)} \subset \mathcal{L}(R)$ степени $k \geq 2$ есть фактор пространства $\mathbf{L}^{\otimes k}$ по идеалу, порожденному правыми частями соотношений (3.1) для всех $1 \leq i \leq k-1$.

Поскольку все отображения π_k обратимы, сформулированное предложение позволяет утверждать, что любой базисный набор однородной компоненты $\mathcal{T}(R)^{(k)} \subset \mathcal{T}(R)$ переводится в базисный набор компоненты $\mathcal{L}(R)^{(k)} \subset \mathcal{L}(R)$. Это, в свою очередь, дает возможность выводить деформационные свойства алгебры $\mathcal{L}(R)$ из свойств $\mathcal{T}(R)$.

Эта конструкция близка к отображению трансмутации, введенному в работе [9], а также к формулам статьи [6], использовавшимся для определения квантовых матричных алгебр, связанных с парами согласованных твистов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если исходный твист R инволютивен, то это свойство сохранится и для твистов, действующих в пространствах $\mathbf{T}^{\otimes 2}$ и $\mathbf{L}^{\otimes 2}$:

$$T_1 \otimes T_2 \mapsto R^{-1} T_1 \otimes T_2 R, \quad L_{\bar{1}} \otimes L_{\bar{2}} \mapsto R^{-1} L_{\bar{1}} \otimes L_{\bar{2}} R. \quad (3.2)$$

Опираясь на этот факт, легко построить некоторые симметризаторы (проекторы симметризации) в пространствах $\mathbf{T}^{(k)}$ и $\mathbf{L}^{(k)}$ для любого $k \geq 2$. Заметим, что в этой конструкции используются отображения π_k . Отсюда следует, что размерности однородных компонент $\mathcal{T}(R)^{(k)}$ и $\mathcal{L}(R)^{(k)}$ для всех $k \geq 2$ равны размерностям соответствующих компонент $\text{Sym}(\text{gl}(m))^{(k)}$ коммутативной алгебры $\text{Sym}(\text{gl}(m))$. Соответственно, алгебры $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$ обладают деформационным свойством.

Если твист R геккевский, то твисты (3.2), действующие в пространствах $\mathbf{T}^{\otimes 2}$ и $\mathbf{L}^{\otimes 2}$, имеют три собственных значения и вообще не являются симметриями. Следовательно, метод доказательства деформационного свойства должен быть модифицирован. В работе [3] были построены симметризаторы в компонентах $\mathbf{T}^{(k)}$ и $\mathbf{L}^{(k)}$ для $k = 2, 3$. С использованием этих симметризаторов удастся показать, что размерности однородных компонент $\mathcal{T}(R)^{(k)}$ и $\mathcal{L}(R)^{(k)}$ при $k = 2, 3$ равны размерностям соответствующих компонент алгебры $\text{Sym}(\text{gl}(m))$, если разность $q-1$ достаточно мала. Несмотря на то что аналогичные симметризаторы в старших компонентах этих

квантовых матричных алгебр не построены, использование результатов работы [10] (см. также [11]) позволяет заключить, что для значений q в общем положении размерности старших компонент $\mathcal{T}(R)^{(k)}$, $\mathcal{L}(R)^{(k)}$ при $k \geq 4$ равны размерностям соответствующих компонент алгебры $\text{Sym}(gl(m))$. Это обеспечивает деформационное свойство квантовых матричных алгебр, связанных с симметриями Гекке.

Перейдем теперь к описанию пуассоновых структур, отвечающих квантовым матричным алгебрам. Мы будем пользоваться обозначениями $\{L_1, L_2\}$ для $(m^2 \times m^2)$ -матрицы $L_1 L_2$, где каждый матричный элемент $l_i^j \otimes l_k^l$ заменен выражением $\{l_i^j, l_k^l\}$.

Пусть твист R является деформацией перестановки P . Тогда $\mathcal{R} = PR$ есть деформация единичной матрицы:

$$\mathcal{R} = I - hr + O(h^2), \quad (3.3)$$

где h – параметр деформации, а r – соответствующая классическая r -матрица, являющаяся решением классического уравнения Янга–Бакстера

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

Если твист R – симметрия Гекке, положим дополнительно $q = e^{-h}$.

Если R представляет собой инволютивную симметрию или симметрию Гекке, тогда r удовлетворяет соответственно соотношениям

$$r_{21} = -r_{12} \quad \text{или} \quad r_{12} + r_{21} = 2P. \quad (3.4)$$

В последнем случае представим r в виде суммы $r = r_- + r_+$, где

$$r_- = \frac{r_{12} - r_{21}}{2}, \quad r_+ = \frac{r_{12} + r_{21}}{2}$$

– соответственно кососимметрическая и симметрическая компоненты матрицы r . Тогда второе соотношение в (3.4) означает, что $r_+ = P$. Этот факт хорошо известен для стандартных симметрий Гекке, но он имеет место и для любых других геккевских твистов.

Пуассонова структура, отвечающая RTT -алгебре, задается скобками Пуассона генераторов

$$\{T_1, T_2\} = rT_1T_2 - T_2T_1r = rT_1T_2 - T_1T_2r. \quad (3.5)$$

Отметим, что в этом выражении мы считаем $T_1T_2 = T_2T_1$ (и аналогично для матрицы L), поскольку скобка Пуассона определяется в коммутативной алгебре $\text{Sym}(gl(m))$.

Если r проистекает из инволютивной симметрии, то кососимметричность правой части выражения (3.5) очевидна. Если же r возникает из симметрии Гекке, то это свойство также выполнено, если учесть соотношение $r_+ = P$. Более того, матрицу r в скобке (3.5) можно заменить на r_- .

Представляя классическую r -матрицу r как элемент пространства $gl(m)^{\otimes 2}$, мы можем записать скобку (3.5) в следующем виде:

$$\{f, g\} = \cdot (\rho_l(r)^{\otimes 2}(f \otimes g) - \rho_r(r)^{\otimes 2}(g \otimes f)). \quad (3.6)$$

Здесь ρ_l и ρ_r – представления алгебры $\mathfrak{g}$ соответственно левыми и правыми векторными полями, действующими на алгебре $\text{Sym}(gl(m))$. Символ $\cdot$ обозначает коммутативное произведение в этой алгебре.

Рассмотрим теперь пуассонову структуру, возникающую в квазиклассическом пределе алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$, связанной с инволютивной симметрией или симметрией Гекке R .

Прежде всего перепишем определяющие соотношения в алгебре $\mathcal{L}(R)$ в несколько ином виде (напомним, что $\mathcal{R} = PR$):

$$\mathcal{R}_{12}L_1\mathcal{R}_{21}L_2 - L_2\mathcal{R}_{12}L_1\mathcal{R}_{21} = 0.$$

Производя в левой части разложение (3.3), мы получим следующие скобки Пуассона:

$$\{L_1, L_2\} = r_{12}L_1L_2 - L_1L_2r_{21} + L_1r_{21}L_2 - L_2r_{12}L_1. \quad (3.7)$$

Если r происходит из инволютивной симметрии, эти скобки можно переписать в виде

$$\{f, g\} = \cdot \rho_{\text{ad}}(r)^{\otimes 2}(f \otimes g), \quad f, g \in \text{Sym}(gl(m)). \quad (3.8)$$

Здесь ρ_{ad} обозначает присоединенное действие алгебры $gl(m)$, распространенное на всю симметрическую алгебру $\text{Sym}(gl(m))$ с помощью правила Лейбница. Таким образом, $\rho_{\text{ad}}^{\otimes 2}(r)$ есть кососимметрическое бивекторное поле.

Если же r возникает из симметрии Гекке, аналогичная формула для скобок приобретает дополнительные слагаемые:

$$\{f, g\} = \cdot (\rho_{\text{ad}}^{\otimes 2}(r_-) + (\rho_r \otimes \rho_l - \rho_l \otimes \rho_r)(r_+))(f \otimes g). \quad (3.9)$$

Кососимметричность правой части скобок (3.9) очевидна. Однако прямая проверка выполнения тождества Якоби достаточно трудоемка. Тем не менее справедливость тождества Якоби для этой скобки следует из деформационного свойства алгебры уравнения отражений.

Скобки (3.7) совместны с линейными $gl(m)$ -скобками Пуассона–Ли. Иными словами, эти две скобки образуют пуассонов пучок. Данное утверждение можно легко проверить с помощью процедуры линеаризации скобок (3.9) (см. раздел 4). Подчеркнем, что модифицированная алгебра уравнения отражений $\mathcal{L}(R, h)$ является квантованием данного пуассонова пучка.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть простая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ принадлежит одной из классических серий алгебр Ли B_m , C_m или D_m , а R представляет собой твист, связанный с соответствующей квантовой универсальной обертывающей алгеброй $U_q(\mathfrak{g})$. В этом случае соответствующие RTT - и RE -алгебры не являются деформациями коммутативной алгебры $\text{Sym}(\mathfrak{g})$. Обе скобки (3.5) и (3.7) являются пуассоновыми только на соответствующих группах Ли G и называются соответственно скобками Складина или Семенова-Тян-Шанского. Кроме того, они остаются скобками Пуассона на некоторых многообразиях в $\mathfrak{g}^*$. Подробности и явное описание этих многообразий можно найти в работах [12], [13].

Обратимся теперь к случаю янгианов. Аналогично рассмотренным выше конструкциям введем следующие линейные пространства:

$$\mathbf{T} = \text{span}_{\mathbb{K}}(t_i^j[k]) \quad \text{и} \quad \mathbf{L} = \text{span}_{\mathbb{K}}(l_i^j[k]),$$

содержащие соответственно все конечные линейные комбинации генераторов $t_i^j[k]$ янгианов RTT -типа и генераторов $l_i^j[k]$ брейдингового янгиана, связанных с некоторой R -матрицей вида (2.9) или (2.10). Обозначим символами $\mathbf{T}^{\otimes k}$ и $\mathbf{L}^{\otimes k}$ подпространства, состоящие из всех однородных тензорных полиномов степени k от соответствующих генераторов.

Определим также отображения, аналогичные отображениям (3.1):

$$\pi_k(T_1(u_1) \otimes T_2(u_2) \otimes \cdots \otimes T_k(u_k)) = L_{\bar{1}}(u_1) \otimes L_{\bar{2}}(u_2) \otimes \cdots \otimes L_{\bar{k}}(u_k), \quad (3.10)$$

где, как и выше, мы полагаем

$$L_{\bar{1}}(u) = L_1(u), \quad L_{\bar{k}}(u) = R_{k-1} L_{\overline{k-1}}(u) R_{k-1}^{-1}, \quad k \geq 2.$$

В приведенных выше формулах отображения π_k записаны через токовые матрицы $T(u)$ и $L(u)$. Их запись в терминах коэффициентов $T[s]$ и $L[s]$ имеет тот же вид.

Имеет место утверждение, аналогичное предложению 4, т. е. отображения (3.10) устанавливают изоморфизм линейных пространств между однородными компонентами алгебр $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$ и $\mathbf{Y}(R)$. Как следствие, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если янгиан RTT -типа обладает деформационным свойством, то таким же свойством обладает и соответствующий брейдинговый янгиан.*

Упомянутый в замечании 1 метод статьи [3] позволяет доказать справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Любой обобщенный янгиан представляет собой деформацию алгебры $\text{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$ при условии, что исходный твист R является деформацией оператора перестановки.*

Детальное доказательство этого утверждения будет приведено в наших последующих публикациях. В настоящей работе мы ограничимся представлением некоторых аргументов в пользу его справедливости. В силу предложения 5 мы можем рассматривать только янгианы RTT -типа.

Заметим прежде всего, что отображение

$$\rho: T_1(u) \otimes T_2(v) \mapsto R(u, v)^{-1} T_1(v) \otimes T_2(u) R(u, v) \quad (3.11)$$

является инволютивным. Действительно, $R(u, v)R(v, u) = \varphi(u, v)I$, где $\varphi(u, v)$ — рациональная функция, вид которой зависит от исходной инволютивной симметрии или симметрии Гекке R .

Дважды применяя отображение ρ , мы получим тождественное отображение. Поэтому ρ имеет только два собственных значения: 1 или -1 . Двусторонний идеал, который входит в определение янгиана $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$, порождается подпространством $I_- = \text{Im}(I - \rho)$. Рассмотрим дополнительное пространство $I_+ = \text{Im}(I + \rho)$. Определяющие соотношения этого пространства можно записать в следующем виде:

$$R(u, v)T_1(u) \otimes T_2(v) = -T_1(u) \otimes T_2(v)R(u, v).$$

Разлагая производящую матрицу $T(u)$ в ряд по обратным степеням u и пользуясь соотношением

$$\frac{1}{u-v} = \sum_{k \geq 0} v^k u^{-k-1},$$

мы получим явное описание пространства I_+ в терминах матричных элементов матриц $T[k]$. Отметим, что это пространство бесконечномерно и порождается всевозможными конечными квадратичными полиномами от счетного набора переменных $t_i^j[r]$.

Рассмотрим зависимость подпространств $I_{\pm}(h)$ от параметра деформации h . При $h = 0$ подпространства $I_{\pm}(0) \subset \mathbf{T}^{\otimes 2}$ порождаются элементами

$$t_j^c[r]t_i^d[s] \pm t_i^d[s]t_j^c[r]. \quad (3.12)$$

Производящая функция этих элементов имеет следующую матричную форму:

$$T_1(u)T_2(v) \pm T_2(v)T_1(u).$$

Подпространство $I_+(h)$ генерируется элементами $E_{ij}^{cd}[k, l]$, которые являются коэффициентами при мономе $u^{-k}v^{-l}$ производящего ряда:

$$E_{ij}^{cd}(u, v) = R_{ij}^{ab}(u, v)T_a^c(u)T_b^d(v) + T_i^a(v)T_j^b(u)R_{ab}^{cd}(u, v). \quad (3.13)$$

Заметим, что при $h = 0$ элементы $E_{ij}^{cd}[k, l]$ совпадают с симметрическими комбинациями генераторов (3.12). Подмножество элементов $E_{ij}^{cd}[k, l]$ таких, что тройка чисел (k, i, c) предшествует тройке (l, j, d) в смысле лексикографического упорядочения, образуют базис пространства $I_+(0)$. Более того, линейная оболочка элементов $E_{ij}^{cd}[k, l]$ таких, что $k + l \leq p$, является конечномерной.

Следовательно, элементы $E_{ij}^{cd}[k, l]$ такие, что $k + l \leq p$, линейно независимы в янгиане $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$, если значение h достаточно мало. Поэтому, отображая элементы $E_{ij}^{cd}[k, l] \in I_+(0)$ в их аналоги в $I_+(h)$, мы строим отображение α_h (см. раздел 1) на квадратичном уровне. Аналогичным методом мы можем построить отображения α_h для высших однородных компонент янгиана $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$ и посредством этого доказать, что этот янгиан обладает деформационным свойством в случае, когда твист R есть деформация перестановки P .

Перейдем теперь к вычислению пуассоновых структур, отвечающих обобщенным янгианам. Мы начнем с разложения $\mathcal{R}(u, v) = PR(u, v) = I - hr(u, v) + O(h^2)$ в ряд по параметру h , где мы полагаем $h = -a$ в (2.9) и $h = -\ln q$ в (2.10). Это дает следующие выражения для классических токовых r -матриц:

$$r(u, v) = r - \frac{1}{u-v}P, \quad r(u, v) = r - \frac{2u}{u-v}P. \quad (3.14)$$

Здесь постоянная матрица r в первой формуле соответствует инволютивной симметрии R и является кососимметрической: $r_+ = 0$. Матрица r во второй формуле происходит из симметрии Гекке и, как следствие, $r_+ = P$.

Подчеркнем, что обе токовые матрицы $r(u, v)$ являются кососимметрическими. Проверим это для второй матрицы в (3.14):

$$r_{12}(u, v) + r_{21}(v, u) = r_{12} + r_{21} - \frac{2u}{u-v}P - \frac{2v}{v-u}P = 2r_+ - 2P = 0.$$

В дальнейшем символ $r_{21}(u, v)$ будет означать, что мы переставили элементы в тензорном квадрате $gl(m)^{\otimes 2}$, оставив без изменения параметры u и v .

Скобки, соответствующие янгианам $\mathbf{Y}(R)$ и $\mathbf{Y}_{RTT}(R)$, имеют вид, аналогичный выражениям (3.5) и (3.7):

$$\{T_1(u), T_2(v)\} = r(u, v)T_1(u)T_2(v) - T_1(u)T_2(v)r(u, v), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \{L_1(u), L_2(v)\} = & r_{12}(u, v)L_1(u)L_2(v) + L_1(u)r_{21}L_2(v) - \\ & - L_2(v)r_{12}L_1(u) - L_1(u)L_2(v)r_{21}(u, v). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Заметим, что r -матрицы, которые стоят в формуле (3.16) между производящими матрицами $L_1(u)$ и $L_2(v)$, постоянны, тогда как матрицы в крайних положениях определяются одной из формул (3.14). И, наконец, в формулах (3.15) и (3.16) учтено, что пуассонова структура задается в коммутативной алгебре, в которой выполнены соотношения

$$T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u), \quad L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Подчеркнем, что аналогичные скобки, связанные с алгебрами Ли классических серий B_m , C_m и D_m , являются скобками Пуассона только на соответствующих группах.

Все скобки, с которыми мы имеем дело в этой статье, локальны, т. е. не имеют сингулярности в пределе $u - v \rightarrow 0$. Иными словами, если положить $u - v = \nu$ и разложить $L(u) = L(v + \nu)$ в ряд по параметру ν , то можно заменить приведенные выше скобки Пуассона счетным набором скобок, в которых фигурируют производящие матрицы и их производные, взятые при одном значении параметра (т. е. в точке $u = v$). Квантовый вариант этой процедуры представлен в работе [1].

4. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ СКОБОК ПУАССОНА

Представляют интерес линейные скобки Пуассона, возникающие из приведенных в предыдущем разделе квадратичных скобок с помощью процедуры линеаризации. Производя линеаризацию, получаем следующие линейные скобки, отвечающие скобкам (3.15) в тригонометрическом случае:

$$\begin{aligned} \{T_1(u), T_2(v)\} = & r(u, v)(T_1(u) + T_2(v)) - (T_2(v) + T_1(u))r(u, v) = \\ = & \left[r - \frac{2u}{u-v}P, T_1(u) + T_2(v) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для рационального случая имеем

$$\{T_1(u), T_2(v)\} = \left[r - \frac{1}{u-v}P, T_1(u) + T_2(v) \right]. \quad (4.2)$$

Линеаризация (3.16) в тригонометрическом случае приводит к скобке вида

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = - \left[2P, \frac{uL_1(u) - vL_1(v)}{u - v} \right]. \quad (4.3)$$

И, наконец, в рациональном случае получаем следующее выражение:

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = - \left[P, \frac{L_1(u) - L_1(v)}{u - v} \right]. \quad (4.4)$$

Скобка (4.3) не содержит компоненты r_- , поскольку первое слагаемое в (3.9) исчезает в процессе линеаризации. По этой же причине постоянная матрица r не входит в выражение (4.4). Таким образом, эти формулы не зависят от r , в отличие от скобок (4.1) и (4.2).

Заметим, что скобки (4.2) и (4.4) совпадают, если мы положим $r = 0$ в (4.2). В то же время скобки (4.1) и (4.3) существенно различны.

Из самого метода построения приведенных выше линейных скобок непосредственно следует заключение, что они совместны с соответствующими квадратичными скобками, т. е. эта пара (линейные и квадратичные скобки) порождает пуассонов пучок. Квантовая алгебра, отвечающая этому пучку, может быть получена линеаризацией соответствующего янгиана.

Рассмотрим теперь два примера. Введем следующие симметрии:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a & ab \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Первая из этих симметрий инволютивна для любых значений числовых параметров $a, b \in \mathbb{K}$. Отметим, что данная R -матрица была построена в работе [14].

Вторая симметрия является симметрией Гекке и происходит из квантовой группы $U_q(sl(2))$. Аналоги этой симметрии Гекке в более высоких размерностях связаны с квантовыми группами $U_q(sl(m))$, $m > 2$. Для всех упомянутых симметрий Гекке квантовые детерминанты соответствующих RTT -алгебр являются центральными.

Для RTT -алгебры, построенной по первой симметрии в (4.5), квантовый детерминант оказывается центральным в том и только том случае, если $a = b$. Следовательно, необходимое и достаточное условие центральности квантового детерминанта в соответствующем янгиане RTT -типа также дается равенством $a = b$.

Токовые R -матрицы, отвечающие постоянным матрицам (4.5), имеют вид

$$\hat{R}(u, v) = \hat{R} - \frac{1}{u - v} I = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{u - v} & a & -a & ab \\ 0 & -\frac{1}{u - v} & 1 & -b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{u - v} & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{u - v} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$R(u, v) = R - \frac{(q - q^{-1})u}{u - v} I =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-qv + q^{-1}u}{u - v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-q + q^{-1})v}{u - v} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(-q + q^{-1})u}{u - v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-qv + q^{-1}u}{u - v} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Янгиан RTT -типа, связанный с симметрией (4.7), – пример упоминавшегося выше q -янгиана. Структура базиса типа Пуанкаре–Биркгофа–Витта может быть извлечена из работы [8]. Для этого необходимо рассматривать “половины” квантовой алгебры $U_q(\widehat{gl(m)})$ (см. [8]).

Получим теперь соответствующие классические r -матрицы. Для этого в матрице $\widehat{R}$ в (4.5) положим $a = -h\alpha$, $b = -h\beta$, а в матрице R – соответственно $q = e^{-h}$. Разлагая R -матрицы $\mathcal{R} = PR$ в ряд по h , в первом порядке разложения получим классические r -матрицы:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \alpha(e_{11} \otimes e_{12} - e_{12} \otimes e_{11}) + \beta(e_{12} \otimes e_{22} - e_{22} \otimes e_{12}), \\ r &= e_{11} \otimes e_{11} + e_{22} \otimes e_{22} + 2e_{21} \otimes e_{12}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где e_{ij} – элементы стандартного базиса алгебры Ли $gl(2)$.

Матрица $\hat{r}$ в (4.8) является кососимметрической. Если $\alpha = \beta$ (т. е. $a = b$ в матрице $\widehat{R}$ в (4.5)), она лежит во внешней степени $sl(2)^{\wedge 2}$. В противном случае матрица $\hat{r}$ есть элемент $gl(2)^{\wedge 2}$. Вторая r -матрица не кососимметрическая, ее кососимметрическая компонента имеет вид $r_- = e_{21} \otimes e_{12} - e_{12} \otimes e_{21}$.

Классические r -матрицы, соответствующие симметриям (4.6) и (4.7), имеют вид соответственно

$$\hat{r}(u, v) = \hat{r} - \frac{1}{u - v} P, \quad r(u, v) = r - \frac{2u}{u - v} P. \quad (4.9)$$

Наконец, выпишем явные формулы для линейных скобок Пуассона, отвечающих янгиану RTT -типа, связанному с инволютивной симметрией $\widehat{R}$, и брейдинговому янгиану, связанному с симметрией Гекке R . Обозначим матричные элементы производящей матрицы $T(u)$ следующим образом:

$$T(u) = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix}.$$

Тогда из (4.2) получим ответ:

$$\begin{aligned} \{a(u), a(v)\} &= \alpha(c(v) - c(u)), & \{a(u), b(v)\} &= \alpha(d(v) - a(v)) + \frac{b(u) - b(v)}{u - v}, \\ \{a(u), c(v)\} &= \frac{c(v) - c(u)}{u - v}, & \{a(u), d(v)\} &= \beta c(u) - \alpha c(v), \\ \{b(u), b(v)\} &= (\alpha + \beta)(b(u) - b(v)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{b(u), c(v)\} &= (\alpha + \beta)c(v) + \frac{a(u) - a(v) + d(v) - d(u)}{u - v}, \\ \{b(u), d(v)\} &= \beta(d(u) - a(u)) + \frac{b(u) - b(v)}{u - v}, \\ \{c(u), c(v)\} &= 0, \quad \{c(u), d(v)\} = \frac{c(v) - c(u)}{u - v}, \\ \{d(u), d(v)\} &= \beta(c(v) - c(u)).\end{aligned}$$

Пользуясь теми же обозначениями для матричных элементов производящей матрицы брейдингового янгиана $\mathbf{Y}(R)$

$$L(u) = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix},$$

получим из (4.3) следующие выражения для линейных скобок:

$$\begin{aligned}\{a(u), a(v)\} &= 0, \quad \{a(u), b(v)\} = \frac{2}{u - v}(ub(u) - vb(v)), \\ \{a(u), c(v)\} &= \frac{2}{u - v}(vc(v) - uc(u)), \quad \{a(u), d(v)\} = 0, \\ \{b(u), b(v)\} &= 0, \quad \{b(u), c(v)\} = \frac{2}{u - v}(ua(u) - va(v) + vd(v) - ud(u)), \\ \{b(u), d(v)\} &= \frac{2}{u - v}(ub(u) - vb(v)), \\ \{c(u), c(v)\} &= 0, \quad \{c(u), d(v)\} = \frac{2}{u - v}(vc(v) - uc(u)), \\ \{d(u), d(v)\} &= 0.\end{aligned}$$

Пуассонова структура (4.4) для случая рациональной токовой R -матрицы $\widehat{R}(u, v)$ легко получается из приведенных выше формул для скобок между элементами $T(u)$ простой фиксации значений параметров $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Конструкция аффинной квантовой алгебры $U_q(\widehat{gl(m)})$, приведенная в работе [8], легко обобщается на другие токовые R -матрицы. Эта конструкция базируется на выборе некоторых перестановочных соотношений между двумя янгианоподобными алгебрами. Похожий метод можно применить для построения “твистованной версии” этой алгебры, взяв за основу два брейдинговых янгиана и написав соответствующие перестановочные соотношения для них. Вопрос о структуре центра такой алгебры остается открытым.

Благодарности. Д. И. Гуревич благодарит центр SISSA (Италия), в котором началась работа над этой статьей, а также выражает благодарность В. Рубцову за плодотворные обсуждения и дискуссии.

П. А. Сапонов выражает благодарность администрации и научным сотрудникам IHES (Франция) за прекрасные условия для работы и общения с коллегами, предоставленные ему во время научного визита в институт, в течение которого данная статья была закончена.

Список литературы

- [1] D. Gurevich, P. Saponov, *Braided Yangians*, arXiv: 1612.05929.
- [2] V. Drinfeld, “Quantum groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 2 (Berkeley, CA, August 3–11, 1986), ed. A. M. Gleason, AMS, Providence, RI, 1987, 798–820.
- [3] Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, “Теория представлений алгебры (модифицированного) уравнения отражений $GL(m|n)$ типа”, *Алгебра и анализ*, **20**:2 (2008), 70–133.
- [4] A. Molev, *Yangians and Classical Lie Algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, **143**, AMS, Providence, RI, 2007.
- [5] Д. В. Талалаев, “Квантовая система Годена”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:1 (2006), 86–91.
- [6] A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov, “On quantum matrix algebras satisfying the Cayley–Hamilton–Newton identities”, *J. Phys. A*, **32**:9 (1999), L115–L121.
- [7] A. P. Isaev, P. Pyatov, “Spectral extension of the quantum group cotangent bundle”, *Comm. Math. Phys.*, **288**:3 (2009), 1137–1179.
- [8] L. Frappat, N. Jing, A. Molev, E. Ragoucy, “Higher Sugawara operators for the quantum affine algebras of type A ”, *Commun. Math. Phys.*, **345**:2 (2016), 631–657, arXiv: 1505.03667.
- [9] Sh. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [10] В. Г. Дринфельд, “О квадратичных коммутационных соотношениях в квазиклассическом случае”, *Математическая физика, функциональный анализ*, Наукова думка, Киев, 1986, 24–34.
- [11] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic Algebras*, University Lecture Series, **37**, AMS, Providence, RI, 2005.
- [12] J. Donin, D. Gurevich, S. Shnider, “Double quantization on some orbits in the coadjoint representations of simple Lie groups”, *Comm. Math. Phys.*, **204**:1 (1999), 39–60.
- [13] J. Donin, *Double quantization on coadjoint representations of semisimple Lie groups and their orbits*, arXiv: math/9909160.
- [14] Д. И. Гуревич, “Алгебраические аспекты квантового уравнения Янга–Бакстера”, *Алгебра и анализ*, **2**:4 (1990), 119–148.