Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Котиков, С. Тебер, Новые результаты для двухпетлевой безмассовой диаграммы Фейнмана пропагаторного типа, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 2, 331–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:25:05

© 2018 г.

А.В. Котиков*, С. Тебер^{†‡}

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ДВУХПЕТЛЕВОЙ БЕЗМАССОВОЙ ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА ПРОПАГАТОРНОГО ТИПА

Рассмотрена двухпетлевая безмассовая диаграмма Фейнмана пропагаторного типа с произвольным (нецелым) индексом на центральной линии. Аналитически показано совпадение двух хорошо известных в литературе результатов, позволяющих выразить эту диаграмму в терминах гипергеометрических функций ${}_3F_2$ с аргументами -1 и 1 . Также получены новые представления этой диаграммы, которые могут быть полезными при практических вычислениях.

Ключевые слова: диаграммы Фейнмана, многопетлевые вычисления, гипергеометрические функции.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9340>

1. ВВЕДЕНИЕ

Точный расчёт двухпетлевой безмассовой диаграммы Фейнмана пропагаторного типа является предметом интенсивных исследований в течение последних десятилетий (см., например, исторический обзор [1]). Эта диаграмма задаётся как

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \iint \frac{[d^D k_1][d^D k_2]}{k_1^{2\alpha_1} k_2^{2\alpha_2} (k_2 - p)^{2\alpha_3} (k_1 - p)^{2\alpha_4} (k_2 - k_1)^{2\alpha_5}}, \quad (1)$$

где $[d^D k] = d^D k / (2\pi)^D$, аргументы α_i , $i = 1, \dots, 5$, суть пять степеней пропагатора, т. е. так называемые индексы диаграммы, и p – внешний импульс в евклидовом пространстве-времени размерности D (см. рис. 1а для графического представления). Если все индексы целые, диаграмму нетрудно рассчитать, например, с помощью

Работа А. В. Котикова была поддержана РФФИ (грант № 16-02-00790_а. Авторы также выражают свою благодарность Sorbonne Université (Université Pierre et Marie Curie) и CNRS за финансовую поддержку.

*Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: kotikov@theor.jinr.ru

[†]Sorbonne Universités, CNRS, Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, LPTHE, Paris, France. E-mail: teber@lpthe.jussieu.fr

Рис. 1. Двухпетлевые безмассовые диаграммы Фейнмана пропагаторного типа общего вида (а) и простейшая (б).

процедуры интегрирования по частям [2], [3]. С другой стороны, для произвольных (нецелых) индексов расчёт становится существенно менее тривиальным и может быть проведен только в исключительных случаях [2]–[18]. Среди этих случаев простейшей нетривиальной диаграммой является диаграмма с произвольным индексом на центральной линии (см. рис. 1б):

$$J(1, 1, 1, 1, \alpha) = \iint \frac{[d^D k_1] [d^D k_2]}{k_1^2 k_2^2 (k_2 - p)^2 (k_1 - p)^2 (k_2 - k_1)^{2\alpha}} \equiv J(\alpha). \quad (2)$$

Данная диаграмма интенсивно изучалась ранее (см. обзор [1]) и использовалась на протяжении многих лет для получения ряда важных приложений. В качестве первого широко известного результата напомним аналитический расчёт пятипетлевой β -функции модели Φ^4 (см. обсуждение в работах [6], [7] и ссылки в них). Во-вторых, хотелось бы отметить очень сложные расчёты, связанные с нахождением величин критических индексов в рамках $1/N$ -разложения (см. работы [2], [11], а также книгу [19]), которые в порядке $1/N^2$ зависят от производной функции $J(\alpha)$ по индексу центральной линии. Полный аналитический результат для этой производной был получен в работе [13], основанной на результатах статьи [8]. Недавно было показано [16], что общая многопетлевая техника, разработанная в статьях [2], [3], а также её развитие, предложенное в [6]–[8], имели чрезвычайно важное значение для точного вычисления величины поправок за счёт взаимодействия в эффективных теориях поля на бране, описывающих некоторые современные планарные системы в физике конденсированных сред [17], [18], [20]; о развитии этого направления см. работу [21] и ссылки в ней для краткого обзора этой тематики.

1.1. Известные результаты для $J(\alpha)$. Далее мы будем использовать размерную регуляризацию и положим $D = 4 - 2\epsilon$. Зависимость диаграммы $J(\alpha)$ от импульса тривиальна, что нетрудно получить из анализа размерностей. Таким образом, мы можем переписать (2) как

$$J(\alpha) = \frac{p^{2d_F}}{(4\pi)^D} I(\alpha),$$

где $d_F = D - 4 - \alpha = -\alpha - 2\epsilon$ есть размерность диаграммы, а $I(\alpha)$ – так называемая (безразмерная) коэффициентная функция. Далее именно она представляет для нас интерес, поскольку её вычисление в общем случае нетривиально. Для большинства диаграмм коэффицентные функции известны только в форме нескольких первых

членов их рядов Лорана по ε . Тем не менее в случае $I(\alpha)$ можно получить точные результаты, и мы сконцентрируем на этом своё внимание.

В литературе можно найти два различных результата¹⁾ для $I(\alpha)$. Один из них [7] установлен путём решения функциональных уравнений, полученных с помощью сочетания интегрирования по частям [2], [3] с некоторыми дополнительными преобразованиями [2], [9], [22]. Он содержит однократный ряд и имеет вид

$$I(1 + \alpha) = -2 \frac{\Gamma^2(1 - \varepsilon) \Gamma(\varepsilon) \Gamma(-\varepsilon - \alpha) \Gamma(\alpha + 2\varepsilon)}{\Gamma(2 - 2\varepsilon)} \times \\ \times \left[\frac{1}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(1 - 3\varepsilon - \alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n + 1 - 2\varepsilon)}{\Gamma(n + \varepsilon)} \left(\frac{1}{n + \alpha + \varepsilon} + \frac{1}{n - \alpha - 2\varepsilon} \right) + \cos[\pi\varepsilon] \right]. \quad (3)$$

Заметим, что ряд в правой части этого равенства можно представить как комбинацию двух гипергеометрических функций ${}_3F_2$ от аргумента -1 .

Второй результат [8] основан на применении техники полиномов Гегенбауэра, которая в свою очередь представляет собой обобщение методики более ранней работы [5]. Согласно этому результату функция $I(1 + \alpha)$ выражается через гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ от аргумента 1:

$$I(1 + \alpha) = -2 \frac{\Gamma(1 - \varepsilon) \Gamma(-\varepsilon - \alpha) \Gamma(\alpha + 2\varepsilon)}{\Gamma(2 - 2\varepsilon)} \times \\ \times \left[\frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 3\varepsilon - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + 2 - 2\varepsilon)}{\Gamma(n + 2 + \alpha)} \frac{1}{n + 1 + \alpha + \varepsilon} - \pi \operatorname{ctg}[\pi(\alpha + 2\varepsilon)] \right]. \quad (4)$$

Как уже обсуждалось в работе [8], совпадение двух выражений (3) и (4) даёт связь между, с одной стороны, двумя гипергеометрическими функциями ${}_3F_2$ от аргумента -1 и, с другой стороны, одной гипергеометрической функцией ${}_3F_2$ от аргумента 1:

$${}_3F_2(2A, B, 1; B + 1, 2 - A; -1) + \\ + \frac{B}{1 + A - B} {}_3F_2(2A, 1 + A - B, 1; 2 + A - B, 2 - A; -1) = \\ = B \frac{\Gamma(2 - A) \Gamma(B + A - 1) \Gamma(B - A) \Gamma(1 + A - B)}{\Gamma(2A) \Gamma(1 + B - 2A)} - \\ - \frac{1 - A}{B + A - 1} {}_3F_2(2A, B, 1; B + 1, A + B; 1); \quad (5)$$

здесь и далее A , B и C – произвольные коэффициенты. Отметим, что нам не удалось найти это соотношение в математической справочной литературе.

Цель настоящей статьи – аналитически показать совпадение выражений (3) и (4) и, таким образом, воспроизвести формулу (5), связывающую гипергеометрические функции ${}_3F_2$. Мы приводим подробное доказательство и полагаем, что использованный нами метод вычислений и его обобщения могут оказаться полезными в других математических и физических исследованиях. Заметим, что изложенный ниже анализ, основанный на интегральных представлениях, весьма схож с проведёнными ранее в работах [23], [24] исследованиями производных Ψ -функции Эйлера

¹⁾ Два других результата получены в [4] и [12]; см. обзор [1], где они представлены.

и их обобщений; целью этих исследований было упрощение знаменитого уравнения Балицкого–Фадына–Кураева–Липатова (БФКЛ) в первых двух порядках теории возмущений.

В качестве дополнительного результата нашего анализа мы получаем несколько новых представлений диаграммы $I(\alpha)$, которые могут оказаться полезными при рассмотрении более высоких порядков её ε -разложения в случае $\alpha = 1 + a\varepsilon$. Такие разложения мы планируем исследовать в будущем.

1.2. Частные случаи. Прежде чем завершить этот раздел, мы считаем уместным рассмотреть два частных случая, $\alpha = 0$ и $\alpha = -\varepsilon$, в которых диаграмму $I(1+\alpha)$, можно представить как комбинацию Γ -функций.

В случае $\alpha = 0$ процедура интегрирования по частям даёт

$$\begin{aligned} I(1) &= \frac{1}{\varepsilon^3} \frac{\Gamma^4(1-\varepsilon)\Gamma^2(1+\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)\Gamma^2(1-2\varepsilon)} \left[1 - \frac{\Gamma^2(1-2\varepsilon)\Gamma(1+2\varepsilon)}{\Gamma^2(1+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-3\varepsilon)} \right] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)\Gamma^2(1-2\varepsilon)} \frac{\pi^2}{\sin^2[\pi\varepsilon]} \left[1 - \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1-3\varepsilon)} \frac{1}{\cos[\pi\varepsilon]} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае $\alpha = -\varepsilon$ диаграмма была рассчитана в работе [2] с использованием метода уникальностей, а также обсуждалась в работах [11], [19]. Она имеет вид

$$I(1-\varepsilon) = 3 \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} [\psi'(1-\varepsilon) - \psi'(1)]. \quad (7)$$

Это соотношение можно также найти в работе [17]. Заметим, что выражение (7) было использовано в [17] для воспроизведения некоторых результатов работы [16], где более общее представление (4) применялось для вычисления наиболее сложной части двухпетлевой поправки к корреляционной функции электромагнитных токов на бранах (планарных системах физики конденсированных сред).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ (3)

В этом разделе мы аналитически показываем, как можно получить формулу (4) из (3). В качестве начальной точки приведём исходный вид формулы Казакова (3):

$$\begin{aligned} I(1+\alpha) &= -2 \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon-\alpha)\Gamma(\alpha+2\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-3\varepsilon-\alpha)} \times \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-2\varepsilon)}{\Gamma(n+\varepsilon)} \left(\frac{1}{n+\alpha+\varepsilon} + \frac{1}{n-\alpha-2\varepsilon} \right) - \right. \\ &\left. - \cos[\pi\varepsilon] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-3\varepsilon)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n-\alpha-3\varepsilon} \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где последний ряд в правой части данного равенства, как было показано в статье [7], равен $-\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-3\varepsilon-\alpha)$.

2.1. Преобразование последнего слагаемого в (8). Представим в следующей интегральной форме множитель $1/(n+\alpha) + 1/(n-\alpha-3\varepsilon)$:

$$\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n-\alpha-3\varepsilon} = \int_0^1 dx x^{n-1} [x^\alpha + x^{-\alpha-3\varepsilon}].$$

Тогда сумма, отвечающая последнему ряду в (8), имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-3\varepsilon)}{\Gamma(n)} x^{n-1} = -\frac{\Gamma(2-3\varepsilon)}{(1+x)^{2-3\varepsilon}},$$

что даёт

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-3\varepsilon)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n-\alpha-3\varepsilon} \right) = -\Gamma(2-3\varepsilon) \int_0^1 dx \frac{x^\alpha + x^{-\alpha-3\varepsilon}}{(1+x)^{2-3\varepsilon}}. \quad (9)$$

После замены $x \rightarrow y = 1/x$ второе слагаемое в интеграле в правой части формулы (9) преобразуется следующим образом:

$$\int_0^1 dx \frac{x^{-\alpha-3\varepsilon}}{(1+x)^{2-3\varepsilon}} = \int_1^\infty dy \frac{y^\alpha}{(1+y)^{2-3\varepsilon}}.$$

В итоге левая часть равенства (9) может быть записана как

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-3\varepsilon)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n-\alpha-3\varepsilon} \right) = -\Gamma(2-3\varepsilon) \int_0^\infty dy \frac{y^\alpha}{(1+y)^{2-3\varepsilon}}, \quad (10)$$

где последний интеграл выражается через Γ -функции:

$$\int_0^\infty dy \frac{y^\alpha}{(1+y)^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha-1)}{\Gamma(\beta)}.$$

Таким образом, мы приходим к окончательному результату, полученному ранее в [7]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-3\varepsilon)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n-\alpha-3\varepsilon} \right) = -\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-3\varepsilon-\alpha). \quad (11)$$

2.2. Преобразование первой суммы в (8) к одной функции ${}_3F_2$ от 1.

Следуя полученным выше результатам, мы можем записать следующую полезную формулу:

$$\frac{1}{n+\alpha+\varepsilon} + \frac{1}{n-\alpha-2\varepsilon} = \int_0^1 dx x^{n-1} [x^{\alpha+\varepsilon} + x^{-\alpha-2\varepsilon}].$$

Ряд, отвечающий первой сумме в правой части равенства (8), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-3\varepsilon)}{\Gamma(n+\varepsilon)} x^{n-1} &= -\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)} {}_2F_1(2-2\varepsilon, 1; 1+\varepsilon; -x) = \\ &= -\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)} \frac{1}{(1+x)^{2-3\varepsilon}} {}_2F_1(3\varepsilon-1, \varepsilon; 1+\varepsilon; -x), \end{aligned}$$

где использована стандартная формула преобразования гипергеометрической функции ${}_2F_1$:

$${}_2F_1(A, B; C; z) = (1-z)^{C-A-B} {}_2F_1(C-A, C-B; C; z).$$

Таким образом, первая сумма в (8) может быть записана как

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1-2\varepsilon)}{\Gamma(n+\varepsilon)} \left(\frac{1}{n+\alpha+\varepsilon} + \frac{1}{n-\alpha-2\varepsilon} \right) = \\ &= \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha+\varepsilon} + x^{-\alpha-2\varepsilon}}{(1+x)^{2-3\varepsilon}} {}_2F_1(3\varepsilon-1, \varepsilon; 1+\varepsilon; -x) = \\ &= \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha+\varepsilon} + x^{-\alpha-2\varepsilon}}{(1+x)^{2-3\varepsilon}} \int_0^1 dt \frac{t^{\varepsilon-1}}{(1+xt)^{3\varepsilon-1}} \equiv \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} \tilde{J}_1, \end{aligned} \quad (12)$$

где мы использовали интегральное представление гипергеометрической функции

$${}_2F_1(A, B; C; z) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\Gamma(C-B)} \int_0^1 dt \frac{t^{B-1}(1-t)^{C-B-1}}{(1-zt)^A}. \quad (13)$$

После некоторых преобразований, вычисляя J_1 (см. приложение), получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^1 dx_2 \frac{(1-x_2)^\alpha}{x_2^{\alpha+2\varepsilon}} {}_2F_1\left(-\alpha, \varepsilon; 1+\varepsilon; \frac{x_2}{x_2-1}\right) = \\ &= \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^1 dx_2 \frac{1}{x_2^{\alpha+2\varepsilon}} {}_2F_1(-\alpha, 1; 1+\varepsilon; x_2), \end{aligned} \quad (14)$$

где мы применили ещё одну стандартную формулу преобразования гипергеометрической функции ${}_2F_1$:

$${}_2F_1(A, B; C; z) = (1-z)^{-A} {}_2F_1\left(A, C-B; C; \frac{z}{z-1}\right).$$

Взяв известное представление гипергеометрических функций ${}_2F_1$ в виде рядов, получаем окончательный результат для суммы J_1 ,

$$J_1 = \int_0^1 dx_2 \frac{1}{x_2^{\alpha+2\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1+\varepsilon)} x_2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1+\varepsilon)} \frac{1}{n+1-2\varepsilon-\alpha},$$

которая теперь выражена в терминах одной гипергеометрической функции ${}_3F_1$ от аргумента 1.

Однако полученный результат пока не совпадает с (4). В самом деле, мы на данный момент имеем

$$\begin{aligned} I(1+\alpha) &= 2 \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon-\alpha)\Gamma(\alpha+2\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-3\varepsilon-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1+\varepsilon)} \frac{1}{n+1-2\varepsilon-\alpha} - \cos[\pi\varepsilon] \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где ряд и множитель, содержащий только Γ -функции, отличаются от соответствующих выражений в (4).

2.3. Преобразование уравнения (15) к уравнению (4). Используем преобразование [25] гипергеометрической функции ${}_3F_2$ от аргумента 1:

$${}_3F_2(A, B, C; E, F; 1) = \frac{\Gamma(1-A)\Gamma(E)\Gamma(F)\Gamma(C-B)}{\Gamma(E-B)\Gamma(F-B)\Gamma(1+B-A)\Gamma(C)} \times \\ \times {}_3F_2(B, B-E+1, B-F+1; B-C+1, B-A+1; 1) + (B \leftrightarrow C). \quad (16)$$

Если $E = B+1$, то гипергеометрическая функция ${}_3F_2$ может быть представлена как сумма ещё одной гипергеометрической функции ${}_3F_2$ и слагаемого, которое содержит только Γ -функции. В терминах рядов соотношение имеет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+A)\Gamma(n+C)}{n!\Gamma(n+F)} \frac{1}{n+B} = \frac{\Gamma(1-A)\Gamma(A)\Gamma(B)\Gamma(C-B)}{\Gamma(F-B)\Gamma(1+B-A)} - \\ - \frac{\Gamma(1-A)\Gamma(A)}{\Gamma(F-C)\Gamma(1+C-F)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+C-F+1)\Gamma(n+C)}{n!\Gamma(n+C-A+1)} \frac{1}{n+C-B}.$$

Используя это соотношение с $B = 1 - \alpha - 2\varepsilon$, $F = 1 + \varepsilon$, $A = -\alpha$ и $C = 1$, мы можем преобразовать ряд в (15) следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1+\varepsilon)} \frac{1}{n+1-2\varepsilon-\alpha} = \\ = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha-2\varepsilon)\Gamma(\alpha+2\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+3\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\varepsilon)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{1}{n+2\varepsilon+\alpha}.$$

Сфокусировавшись на членах, содержащих только произведение Γ -функций, заметим, что их можно упростить следующим образом:

$$\frac{\Gamma(1-\alpha-2\varepsilon)\Gamma(\alpha+2\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha-3\varepsilon)\Gamma(\alpha+3\varepsilon)} - \cos[\pi\varepsilon] = \frac{\sin[\pi(\alpha+3\varepsilon)]}{\sin[\pi(\alpha+2\varepsilon)]} - \cos[\pi\varepsilon] = \\ = \frac{\sin[\pi\varepsilon]\cos[\pi(\alpha+2\varepsilon)]}{\sin[\pi(\alpha+2\varepsilon)]} = \sin[\pi\varepsilon]\operatorname{ctg}[\pi(\alpha+2\varepsilon)].$$

Тогда диаграмма $I(1+\alpha)$ может быть записана как

$$I(1+\alpha) = 2 \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon-\alpha)\Gamma(\alpha+2\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha-3\varepsilon)} \times \\ \times \left[- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\varepsilon)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{1}{n+2\varepsilon+\alpha} + \frac{\Gamma(1-\alpha-3\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \pi \operatorname{ctg}[\pi(\alpha+2\varepsilon)] \right]. \quad (17)$$

Теперь мы видим, что члены в (4) и (17), содержащие только произведение Γ -функций, одинаковы. Следовательно, соответствующие ряды также совпадают. Чтобы показать это, воспользуемся следующим преобразованием гипергеометрической функции ${}_3F_1$ от аргумента 1 [25]:

$${}_3F_2(A, B, C; E, F; 1) = \frac{\Gamma(E)\Gamma(F)\Gamma(S)}{\Gamma(A)\Gamma(S+B)\Gamma(S+C)} {}_3F_2(E-A, F-A, S; S+B, S+C; 1), \quad (18)$$

где $S = E + F - A - B - C$. Заметим, что первый ряд в квадратных скобках в правой части равенства (17) можно суммировать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\varepsilon)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{1}{n+\alpha+2\varepsilon} = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2+\alpha)} \frac{1}{\alpha+2\varepsilon} {}_3F_2(1-\varepsilon, 1, \alpha+2\varepsilon; 2+\alpha, 1+\alpha+2\varepsilon; 1),$$

что после применения соотношения (18) с $A = \alpha + 2\varepsilon$ даёт

$${}_3F_2(1-\varepsilon, 1, \alpha+2\varepsilon; 2+\alpha, 1+\alpha+2\varepsilon; 1) = \frac{\varepsilon+2\alpha}{1+\alpha+\varepsilon} {}_3F_2(2-2\varepsilon, 1, 1+\alpha+\varepsilon; 2+\alpha, 2+\alpha+\varepsilon; 1).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\varepsilon)}{n! \Gamma(n+2+\alpha)} \frac{1}{n+2\varepsilon+\alpha} = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2-2\varepsilon)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{1}{n+1+\alpha+\varepsilon},$$

и это доказывает совпадение выражений (4) и (17).

3. ДРУГИЕ ПОЛЕЗНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИАГРАММЫ $I(1+\alpha)$

Соотношения (15) и (17) можно рассматривать как новые результаты для диаграммы $I(1+\alpha)$. Другие результаты можно получить с помощью преобразования (16) с $A = 1 - \delta$ при $\delta \rightarrow 0$; предельный переход влечет замену Γ -функции Ψ -функцией, что может оказаться удобным при разложении диаграммы в ряд по ε . Заметим, что аналогичное разложение, но для двухпетлевой безмассовой диаграммы Фейнмана с двумя произвольными несмежными индексами было получено в нашей работе [18].

Для вывода необходимых формул рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2-2\varepsilon)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{\Gamma(n+1-\delta)}{n! \Gamma(1-\delta)} \frac{1}{n+1+\alpha+\varepsilon}.$$

Она совпадает с суммой в формуле (4) при $\delta \rightarrow 0$. Применяя формулу для преобразования (16) с $A = 1 - \delta$, $C = 2 - 2\varepsilon$, $F = 2 + \alpha$ и $B = 1 + \alpha + \varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2-2\varepsilon)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{\Gamma(n+1-\delta)}{n! \Gamma(1-\delta)} \frac{1}{n+1+\alpha+\varepsilon} = \\ &= \frac{\Gamma(\delta) \Gamma(1-\alpha-3\varepsilon) \Gamma(1+\alpha+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon) \Gamma(1+\alpha+\varepsilon+\delta)} - \\ & - \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(1-\alpha-2\varepsilon) \Gamma(\alpha+2\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\alpha-2\varepsilon) \Gamma(n+2-2\varepsilon)}{n! \Gamma(n+2-2\varepsilon+\delta)} \frac{1}{n+1-\alpha-3\varepsilon}. \end{aligned}$$

В пределе $\delta \rightarrow 0$ мы можем записать правую часть этого равенства в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1-\alpha-3\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[\frac{1}{\delta} + \Psi(1) - \Psi(1+\alpha+\varepsilon) \right] - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-2\varepsilon) \Gamma(\alpha+2\varepsilon)} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\alpha-2\varepsilon)}{n!} \frac{1}{n+1-\alpha-3\varepsilon} \left[\frac{1}{\delta} + \Psi(1) - \Psi(n+2-2\varepsilon) \right] + O(\delta). \end{aligned}$$

Ряд в этом выражении, стоящий множителем при $1/\delta$, можно суммировать,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\alpha-2\varepsilon)}{n!} \frac{1}{n+1-\alpha-3\varepsilon} = \frac{\Gamma(1-\alpha-2\varepsilon)\Gamma(\alpha+2\varepsilon)\Gamma(1-\alpha-3\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)},$$

что приводит к сокращению слагаемых, пропорциональных $1/\delta$. Следовательно, мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2-2\varepsilon)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{1}{n+1+\alpha+\varepsilon} &= -\frac{\Gamma(1-\alpha-3\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \Psi(1+\alpha+\varepsilon) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-2\varepsilon)\Gamma(\alpha+2\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\alpha-2\varepsilon)}{n!} \frac{\Psi(n+2-2\varepsilon)}{n+1+\alpha-3\varepsilon}. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления можно повторить для рядов в правых частях равенств (15) и (17). Соответствующие результаты имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+1+\varepsilon)} \frac{1}{n+1-2\varepsilon-\alpha} &= -\frac{\Gamma(2\varepsilon-1)}{\Gamma(\alpha+3\varepsilon)} \Psi(1-\alpha-2\varepsilon) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha-\varepsilon)\Gamma(1+\alpha+\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha-\varepsilon)}{n!} \frac{\Psi(n-\alpha)}{n+2\varepsilon-1}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\varepsilon)}{\Gamma(n+2+\alpha)} \frac{1}{n+\alpha+2\varepsilon} &= -\frac{\Gamma(1-\alpha-3\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \Psi(\alpha+2\varepsilon) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha+\varepsilon)\Gamma(-\alpha-\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha-\varepsilon)}{n!} \frac{\Psi(n+1-\varepsilon)}{n+1-\alpha-3\varepsilon}. \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы аналитически доказали совпадение двух известных результатов (3) и (4), содержащих гипергеометрические функции ${}_3F_2$ с аргументами -1 и 1 соответственно. В качестве попутного результата наших вычислений мы доказали соотношение (5), связывающее два типа гипергеометрических функций ${}_3F_2$, которое может оказаться полезным в различных приложениях. Существуют многочисленные формулы преобразований функций ${}_3F_2$ с аргументом 1 (см. книгу [25]), и, таким образом, наше соотношение (5) даёт возможность применить многие из этих преобразований к функции ${}_3F_2$ с аргументом -1 . Кроме того, как мы отмечали во введении, интегральные представления, которые использовались в разделе 2 и в приложении, весьма схожи с формулами для Ψ -функций и связанных с ними, полученными в работах [23], [24] с целью упрощения результатов для уравнения БФКЛ в первых двух порядках теории возмущений и для выяснения того, подтверждаются или нет их конформные свойства.

Помимо доказательства совпадения результатов (3) и (4), мы нашли несколько новых представлений рассматриваемой в настоящей работе диаграммы $I(\alpha)$, используя формулы преобразований (16) и (18) для гипергеометрических функций ${}_3F_2$ с аргументом 1 . Мы надеемся, что наши точные формулы (4), (15), (17) или некоторые

Рис. 2. Примеры сложных диаграмм из работ [26], [27], [28].

эквивалентные им представления из раздела 3 могут оказаться более полезными при исследовании ε -разложений высоких порядков для диаграммы $I(1 + a\varepsilon)$, чем сложные программы, основанные на подходе работы [15].

В заключение отметим, что наш анализ был проведен для простейшей нетривиальной двухпетлевой диаграммы Фейнмана пропагаторного типа. Мы надеемся, что его можно обобщить, и это позволит точно вычислить более сложные диаграммы, как те, что появляются при изучении $1/N$ -поправок к динамической генерации массы фермиона в QED₃ [26], [27] и RQED_{4,3} [28] (см. рис. 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расчёт интеграла $\tilde{J}_1$

В данном приложении мы излагаем детали расчёта интеграла $\tilde{J}_1$ из формулы (12). Введя новую переменную $t_1 = xt$, мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= \int_0^1 dx \frac{x^\alpha + x^{-\alpha-3\varepsilon}}{(1+x)^{2-3\varepsilon}} \int_0^x dt_1 \frac{t_1^{\varepsilon-1}}{(1+t_1)^{3\varepsilon-1}} = \\ &= \int_0^1 dt_1 \frac{t_1^{\varepsilon-1}}{(1+t_1)^{3\varepsilon-1}} \int_{t_1}^1 dx \frac{x^\alpha + x^{-\alpha-3\varepsilon}}{(1+x)^{2-3\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Заметим, что после замены $x \rightarrow y = 1/x$ второе слагаемое во втором интеграле в правой части формулы (П.1) записывается как

$$\int_{t_1}^1 dx \frac{x^{-\alpha-3\varepsilon}}{(1+x)^{2-3\varepsilon}} = \int_1^{1/t_1} dy \frac{y^\alpha}{(1+y)^{2-3\varepsilon}},$$

таким образом, интеграл (П.1) принимает вид

$$\tilde{J}_1 = \int_0^1 dt_1 \frac{t_1^{\varepsilon-1}}{(1+t_1)^{3\varepsilon-1}} \int_{t_1}^{1/t_1} dx \frac{x^\alpha}{(1+x)^{2-3\varepsilon}}. \quad (\text{П.2})$$

Используем новую переменную $x_1 = 1/(1+x)$ и затем положим $x_1 = x_2/(1+t_1)$, тогда для последнего интеграла в (П.2) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{1/t_1} dx \frac{x^\alpha}{(1+x)^{2-3\varepsilon}} &= \int_{t_1/(1+t_1)}^{1/(1+t_1)} dx_1 \frac{(1-x_1)^\alpha}{x_1^{\alpha+3\varepsilon}} = \\ &= \frac{1}{(1+t_1)^{1-\alpha-3\varepsilon}} \int_{t_1}^1 dx_2 \frac{(1-x_2/(1+t_1))^\alpha}{x_2^{\alpha+3\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в правую часть равенства (II.2), мы получаем

$$\tilde{J}_1 = \int_0^1 dt_1 \frac{1}{t_1^{1-\varepsilon}} \int_{t_1}^1 dx_2 \frac{(1+t_1-x_2)^\alpha}{x_2^{\alpha+3\varepsilon}} = \int_0^1 dx_2 \frac{1}{x_2^{\alpha+3\varepsilon}} \int_0^{x_2} dt_1 \frac{(1+t_1-x_2)^\alpha}{t_1^{1-\varepsilon}}.$$

Введём новую переменную $t_2 = t_1/x_2$; мы видим, что

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= \int_0^1 dx_2 \frac{1}{x_2^{\alpha+2\varepsilon}} \int_0^1 dt_2 \frac{(1-x_2+x_2t_2)^\alpha}{t_2^{1-\varepsilon}} = \\ &= \int_0^1 dx_2 \frac{(1-x_2)^\alpha}{x_2^{\alpha+2\varepsilon}} \int_0^1 dt_2 \frac{(1+x_2t_2/(1-x_2))^\alpha}{t_2^{1-\varepsilon}} = \\ &= \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^1 dx_2 \frac{(1-x_2)^\alpha}{x_2^{\alpha+2\varepsilon}} {}_2F_1\left(-\alpha, \varepsilon; 1+\varepsilon; \frac{x_2}{x_2-1}\right), \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы применили свойство (13).

Список литературы

- [1] A. G. Grozin, “Massless two-loop self-energy diagram: historical review”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **27**:19 (2012), 1230018, 22 pp., arXiv:1206.2572.
- [2] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, “ $1/n$ -Разложение: расчет индексов η и ν в порядке $1/n^2$ для произвольной размерности”, *ТМФ*, **47**:3 (1981), 291–306.
- [3] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, “Integration by parts: the algorithm to calculate β -functions in 4 loops”, *Nucl. Phys. B*, **192**:1 (1981), 159–204; F. V. Tkachov, “A theorem on analytical calculability of 4-loop renormalization group functions”, *Phys. Lett. B*, **100**:1 (1981), 65–68.
- [4] S. J. Hathrell, “Trace anomalies and $\lambda\phi^4$ theory in curved space”, *Ann. Phys.*, **139**:1 (1982), 136–197; “Trace anomalies and QED in curved space”, **142**:1 (1982), 34–63.
- [5] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachov, “New approach to evaluation of multiloop Feynman integrals: the Gegenbauer polynomial x -space technique”, *Nucl. Phys. B*, **174**:2–3 (1980), 345–377.
- [6] Д. И. Казаков, “Вычисление фейнмановских интегралов методом ‘уникальностей’”, *ТМФ*, **58**:3 (1984), 343–353; D. I. Kazakov, “The method of uniqueness, a new powerful technique for multiloop calculations”, *Phys. Lett. B*, **133**:6 (1983), 406–410.
- [7] Д. И. Казаков, “Многопетлевые вычисления: метод уникальностей и функциональные уравнения”, *ТМФ*, **62**:1 (1985), 127–135; D. I. Kazakov, *Analytical methods for multiloop calculations: two lectures on the method of uniqueness*, Preprint JINR E2-84-410, JINR, Dubna, 1984.
- [8] A. V. Kotikov, “The Gegenbauer polynomial technique: the evaluation of a class of Feynman diagrams”, *Phys. Lett. B*, **375**:1–4 (1996), 240–248, arXiv: hep-ph/9512270.
- [9] D. J. Broadhurst, “Exploiting the 1,440-fold symmetry of the master two-loop diagram”, *Z. Phys. C*, **32**:2 (1986), 249–253; D. T. Barfoot, D. J. Broadhurst, “ $Z_2 \times S_6$ symmetry of the two-loop diagram”, *Z. Phys. C*, **41**:1 (1988), 81–85.
- [10] J. A. Gracey, “On the evaluation of massless Feynman diagrams by the method of uniqueness”, *Phys. Lett. B*, **277**:4 (1992), 469–473.
- [11] N. A. Kivel, A. S. Stepanenko, A. N. Vasil’ev, “On the calculation of $2 + \varepsilon$ RG functions in the Gross–Neveu model from large- N expansions of critical exponents”, *Nucl. Phys. B*, **424**:3 (1994), 619–627, arXiv: hep-th/9308073; А. Н. Васильев, С. Э. Деркачев, Н. А. Кивель, А. С. Степаненко, “ $1/n$ -Разложение в модели Гросса–Нэве: расчет индекса η в порядке $1/n^3$ методом конформного бутстрапа”, *ТМФ*, **94**:2 (1993), 179–192, arXiv: hep-th/9302034.

- [12] D. J. Broadhurst, J. A. Gracey, D. Kreimer, “Beyond the triangle and uniqueness relations: non-zeta counterterms at large N from positive knots”, *Z. Phys. C*, **75**:3 (1997), 559–574, arXiv: hep-th/9607174.
- [13] D. J. Broadhurst, A. V. Kotikov, “Compact analytical form for non-zeta terms in critical exponents at order $1/N^3$ ”, *Phys. Lett. B*, **441**:1–4 (1998), 345–353, arXiv: hep-th/9612013.
- [14] D. J. Broadhurst, “Where do the tedious products of ζ ’s come from?”, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **116** (2003), 432–436, arXiv: hep-ph/0211194.
- [15] I. Bierenbaum, S. Weinzierl, “The massless two-loop two-point function”, *Eur. Phys. J. C*, **32**:1 (2003), 67–78, arXiv: hep-ph/0308311.
- [16] S. Teber, “Electromagnetic current correlations in reduced quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, **86**:2 (2012), 025005, 9 pp., arXiv: 1204.5664.
- [17] A. V. Kotikov, S. Teber, “Note on an application of the method of uniqueness to reduced quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, **87**:8 (2013), 087701, 5 pp., arXiv: 1302.3939.
- [18] A. V. Kotikov, S. Teber, “Two-loop fermion self-energy in reduced quantum electrodynamics and application to the ultrarelativistic limit of graphene”, *Phys. Rev. D*, **89**:6 (2014), 065038, 24 pp., arXiv: 1312.2430.
- [19] А. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1988.
- [20] S. Teber, A. V. Kotikov, “Interaction corrections to the minimal conductivity of graphene via dimensional regularization”, *Europhys. Lett.*, **107**:5 (2014), 57001, 7 pp., arXiv: 1407.7501.
- [21] С. Тебер, А. В. Котиков, “Метод уникальностей и оптическая проводимость графена: новое применение мощной техники многопетлевых вычислений”, *ТМФ*, **190**:3 (2017), 519–532, arXiv: 1602.01962.
- [22] С. Г. Горишний, А. П. Исаев, “Об одном подходе к вычислению многопетлевых безмассовых фейнмановских интегралов”, *ТМФ*, **62**:3 (1985), 345–358.
- [23] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, “NLO corrections to the BFKL equation in QCD and in supersymmetric gauge theories”, *Nucl. Phys. B*, **582**:1–3 (2000), 19–43, arXiv: hep-ph/0004008.
- [24] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, “DGLAP and BFKL equations in the $N = 4$ supersymmetric gauge theory”, *Nucl. Phys. B*, **661**:1–2 (2003), 19–61; Erratum, **685**:1–3 (2004), 405–407, arXiv: hep-ph/0208220.
- [25] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **32**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1935.
- [26] A. V. Kotikov, V. I. Shilin, S. Teber, “Critical behavior of $(2 + 1)$ -dimensional QED: $1/N_f$ corrections in the Landau gauge”, *Phys. Rev. D*, **94**:5 (2016), 056009, 6 pp., arXiv: 1605.01911.
- [27] A. V. Kotikov, S. Teber, “Critical behavior of $(2 + 1)$ -dimensional QED: $1/N_f$ corrections in an arbitrary nonlocal gauge”, *Phys. Rev. D*, **94**:11 (2016), 114011, 9 pp., arXiv: 1609.06912.
- [28] A. V. Kotikov, S. Teber, “Critical behaviour of reduced QED_{4,3} and dynamical fermion gap generation in graphene”, *Phys. Rev. D*, **94**:11 (2016), 114010, 8 pp., arXiv: 1610.00934.

Поступила в редакцию 20.01.2017,
после доработки 1.03.2017