Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Нагиев, О применении метода оператора эволюции к описанию частицы в переменном однородном поле, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 2, 364–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:54:15

© 2018 г.

Ш. М. Нагиев*

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ К ОПИСАНИЮ ЧАСТИЦЫ В ПЕРЕМЕННОМ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

С помощью метода оператора эволюции построены когерентные состояния нерелятивистской свободной частицы с переменной массой $M(t)$ и нерелятивистской частицы с переменной массой $M(t)$ в переменном однородном поле. При определенных физических условиях их можно рассматривать как полуклассические состояния частиц. Подробно обсуждаются свойства найденных когерентных состояний, в частности соотношение полноты, минимизация соотношений неопределенностей и эволюция соответствующей плотности вероятности во времени. Для рассматриваемых систем построены также точные волновые функции осцилляторного типа и типа плоской волны. Вычислены квантовые функции распределения Вигнера для волновых функций когерентных и осцилляторных состояний. Установлена унитарная эквивалентность задач о свободной частице и о частице в переменном однородном поле.

Ключевые слова: нерелятивистская частица, линейный потенциал, оператор эволюции, когерентные и осцилляторные состояния, функция Вигнера.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9343>

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование временной эволюции физических систем является одной из центральных проблем квантовой механики. Среди нестационарных квантово-механических задач особое место занимают точно решаемые задачи. Однако хорошо известно, что нестационарное уравнение Шредингера только в редких случаях имеет точное решение. Поэтому нестационарные задачи в квантовой механике обычно решаются приближенными методами, такими как нестационарная теория возмущений, метод внезапных возмущений, адиабатическое приближение и т. д. Точные решения могут служить моделями для реальных физических процессов и позволяют, во-первых, обосновать используемые приближенные методы решения, во-вторых,

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской республики (грант № EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/02/1).

*Институт физики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан.
E-mail: smnagiyev@physics.ab.az

наиболее полно проследить изменение физических величин, характеризующих рассматриваемую систему, и, в-третьих, они всегда представляют математический интерес. К точно решаемым нерелятивистским системам относятся, например, нестационарный гармонический осциллятор [1]–[4], сингулярный осциллятор с переменной частотой [5], [6] и частица в переменном однородном поле [7]–[12]. Все они находят широкое применение во многих областях теоретической физики.

С другой стороны, недавно Багров и др. [13], следуя методу Додонова и Манько [6], построили различные семейства когерентных состояний (КС) свободной массивной нерелятивистской частицы в случае, когда масса не зависит от времени, $m = \text{const}$. Ими подробно проанализированы свойства построенных КС и указаны физические условия, при которых КС свободной частицы могут рассматриваться как полуклассические состояния. Как подчеркнуто авторами работы [13], хотя проблема построения КС для нерелятивистских систем с квадратичным гамильтонианом общего вида была решена в работах Додонова и Манько (см. ссылки в [13]), в ряде случаев (например, в случаях свободной частицы и частицы в однородном переменном поле) получить явный вид КС и их свойства исходя из общих результатов технически невыполнимо.

КС обладают замечательными свойствами, которые позволяют построить ясную картину квантовых явлений, используя наглядный классический язык. Они также дают возможность продемонстрировать связь между квантовой и классической теориями. КС применяются почти во всех областях теоретической физики, например в теории квантования, в физике конденсированных сред, в теории излучения, в теории сверхтекучести и т. д. (см., например, работы [3], [14], [15]).

КС можно ввести для любой динамической квантовой системы [3], [16], если определить их как собственные состояния инварианта (интеграла движения), собственные значения которого задают сохраняющиеся начальные значения координат в фазовом пространстве системы.

Целью настоящей работы является обобщение результатов работы [13] на случаи свободной нерелятивистской частицы с переменной массой $M(t)$ и нерелятивистской частицы с переменной массой $M(t)$ в переменном однородном поле. Для этих моделей также построены точные квантовые состояния гауссовского и осцилляторного типов и типа Эйри и вычислены соответствующие квантовые функции распределения Вигнера.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 установлена унитарная эквивалентность задачи о свободной частице задаче о частице в однородном поле. Раздел 3 посвящен свободной частице, а раздел 4 – частице в переменном однородном поле.

2. УНИТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЗАДАЧ О СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЕ И О ЧАСТИЦЕ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

2.1. Координатное представление. Рассмотрим для простоты одномерное уравнение Шредингера для свободной частицы и для частицы в переменном однородном поле

$$\hat{S}_F(x, t)\psi_F(x, t) = 0, \quad \hat{S}_F(x, t) = i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2M(t)}\partial_x^2, \quad (2.1a)$$

$$\hat{S}_L(x, t)\psi_L(x, t) = 0, \quad \hat{S}_L(x, t) = i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2M(t)}\partial_x^2 + F(t)x, \quad (2.16)$$

где $M(t)$ – переменная масса частицы, а $F(t)$ – переменная сила, действующая на частицу в поле.

Операторы эволюции для уравнений (2.1a) и (2.1б) имеют соответственно вид [12]

$$U_F(x, t) = e^{i\hbar S_2(t)\partial_x^2}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} U_L(x, t) &= e^{ix\delta(t)/\hbar} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{2M(t')} [-i\hbar\partial_x + \delta(t')]^2 dt'\right\} = \\ &= U_1(x, t)U_F(x, t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где введены обозначения

$$U_1(x, t) = e^{i\varphi_0(x, t)} e^{-S_1(t)\partial_x}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \int_0^t F(t') dt', \quad \varphi_0(x, t) = \frac{x\delta(t) - S_0(t)}{\hbar}, \\ S_0(t) &= \int_0^t \frac{\delta^2(t')}{2M(t')} dt', \quad S_1(t) = \int_0^t \frac{\delta(t')}{M(t')} dt', \quad S_2(t) = \int_0^t \frac{dt'}{2M(t')}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $M(t) = m = \text{const}$ имеем выражения

$$S_0(t) = \frac{\delta_2(t)}{2m}, \quad S_1(t) = \frac{\delta_1(t)}{m}, \quad S_2(t) = \frac{t}{2m},$$

где

$$\delta_1(t) = \int_0^t \delta(t') dt', \quad \delta_2(t) = \int_0^t \delta^2(t') dt'.$$

Решения уравнений (2.1) представим в символической форме:

$$\psi_F(x, t) = U_F(x, t)\psi_0(x), \quad \psi_L(x, t) = U_L(x, t)\psi_0(x), \quad (2.6)$$

где $\psi_0(x)$ – начальная волновая функция. Ясно, что, выбирая различные функции $\psi_0(x)$, мы получаем различные волновые функции системы. Из (2.2) и (2.3) следует, что оператор $U_1(x, t)$ (2.4) переводит каждое решение свободного уравнения Шредингера (2.1a) в решение уравнения Шредингера при наличии линейного потенциала (2.1б), а оператор $U_1^{-1}(x, t)$ осуществляет обратный переход, т. е.

$$\psi_L(x, t) = U_1(x, t)\psi_F(x, t), \quad \psi_F(x, t) = U_1^{-1}(x, t)\psi_L(x, t). \quad (2.7)$$

При этом соотношение между операторами Шредингера $S_F(x, t)$ и $S_L(x, t)$ будет иметь вид $S_F = U_1^{-1}S_LU_1$ и $S_L = U_1S_FU_1^{-1}$.

2.2. Импульсное представление. Напишем уравнение Шредингера (2.1) в импульсном p -представлении

$$\begin{aligned} S_F(p, t)\Phi_F(p, t) &= 0, \quad S_F = i\hbar\partial_t - \frac{p^2}{2M(t)}, \\ S_L(p, t)\Phi_L(p, t) &= 0, \quad S_L = i\hbar\partial_t - \frac{p^2}{2M(t)} + i\hbar F(t)\partial_p. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В этом представлении оператор эволюции (2.2) записывается в виде оператора умножения, а оператор эволюции (2.3) – в виде оператора сдвига, т. е.

$$\begin{aligned} U_F(p, t) &= e^{-iS_2(t)p^2/\hbar}, \\ U_L(p, t) &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{2M(t')} [p - \delta(t) + \delta(t')]^2 dt'\right\} e^{-\delta(t)\partial_p} = U_1(p, t) U_F(p, t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$U_1(p, t) = e^{-i\varphi_1(p, t)} e^{-\delta(t)\partial_p}, \quad \varphi_1 = \frac{S_0(t) + S_1(t)[p - \delta(t)]}{\hbar}. \quad (2.10)$$

3. СВОБОДНАЯ ЧАСТИЦА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

3.1. Интегралы движения. С помощью оператора эволюции (2.2) построим интегралы движения $A_F(t)$ и $A_F^+(t)$, линейные по операторам $\hat{x}$ и $\hat{p}$. Пусть

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\lambda_1 \hat{x} + i\lambda_2 \hat{p}), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\lambda_1^* \hat{x} - i\lambda_2^* \hat{p}) \quad (3.1)$$

являются операторами уничтожения и рождения, где λ_1 и λ_2 – комплексные числа. Из условия коммутации $[a, a^+] = 1$ следует, что

$$\operatorname{Re}(\lambda_1^* \lambda_2) = 1. \quad (3.2)$$

Если положить $\lambda_1 = |\lambda_1|e^{i\mu_1}$ и $\lambda_2 = |\lambda_2|e^{i\mu_2}$, то условие (3.2) примет вид

$$|\lambda_1||\lambda_2| \cos(\mu_1 - \mu_2) = 1.$$

Искомые интегралами движения теперь будут операторы

$$\begin{aligned} A_F(t) &= U_F a U_F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}[\lambda_1 \hat{x} + i\varepsilon(t)\hat{p}], \\ A_F^+(t) &= U_F a^+ U_F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}[\lambda_1^* \hat{x} - i\varepsilon^*(t)\hat{p}], \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\varepsilon(t) = \lambda_2 + 2i\lambda_1 S_2(t)$. То, что операторы (3.3) действительно являются интегралами движения, т. е. коммутируют с оператором S_F , следует из их определения. Из (3.2) и (3.3) вытекает, что

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [\varepsilon^*(t) A_F(t) + \varepsilon(t) A_F^+(t)], \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} [\lambda_1 A_F^+(t) - \lambda_1^* A_F(t)]. \quad (3.4)$$

3.2. Зависящие от времени обобщенные КС. Введем КС $|z, t\rangle_F$ свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы $M(t)$, определяя их как собственные состояния оператора уничтожения $A_F(t)$ [6], [16], отвечающие собственному значению z :

$$A_F(t)|z, t\rangle_F = z|z, t\rangle_F, \quad (3.5)$$

где z – комплексное число. Из равенств (3.4) и (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_F(t) &\equiv {}_F\langle z, t | \hat{x} | z, t \rangle_F = x_0 + 2p_0 S_2(t), \quad \bar{p}_F(t) \equiv {}_F\langle z, t | \hat{p} | z, t \rangle_F = p_0, \\ z &= {}_F\langle z, t | A_F(t) | z, t \rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} [\lambda_1 x_0 + i\lambda_2 p_0], \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $a|z\rangle = z|z\rangle$ и

$$x_0 \equiv \langle z|\hat{x}|z\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\lambda_2^* z + \lambda_2 z^*), \quad p_0 \equiv \langle z|\hat{p}|z\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\lambda_1 z^* - \lambda_1^* z). \quad (3.7)$$

Определим явный вид КС (3.5) методом оператора эволюции. В x -представлении имеем

$$\psi_z^F(x, t) = U_F(x, t)\psi_z(x) = N_0 \exp\left\{-\frac{\lambda_1[x - \bar{x}_F(t)]^2}{2\hbar\varepsilon(t)} + \frac{i}{\hbar}p_0[x - p_0 S_2(t)]\right\}, \quad (3.8)$$

где $\psi_z^F(x, t) \equiv \langle x|z, t\rangle_F$ и $\psi_z(x) \equiv \langle x|z\rangle$, а нормировочный множитель

$$N_0 = (\pi\hbar)^{-1/4}[\varepsilon(t)]^{-1/2}$$

найден из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_z^F(x, t)|^2 dx = 1.$$

При вычислении действия оператора $U_F(x, t)$ в (3.8) мы воспользовались формулой (II.3) (см. приложение). Выражение (3.8) является обобщением формулы (45) работы [13] на случай, когда масса свободной частицы зависит от времени.

Плотность вероятности координаты, генерируемая КС (3.8), имеет вид

$$\rho_z^F(x, t) = |\psi_z^F(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}|\varepsilon(t)|} \exp\left\{-\frac{[x - \bar{x}_F(t)]^2}{\hbar|\varepsilon(t)|^2}\right\}. \quad (3.9)$$

Функции (3.8) образуют семейство КС, параметризованных двумя комплексными числами λ_1 и λ_2 , удовлетворяющими ограничению (3.2). Из дальнейшего будет ясно, что эти КС представляют собой сжатые состояния [13]. Они удовлетворяют временному уравнению Шредингера

$$S_F(x, t)\psi_z^F(x, t) = 0. \quad (3.10)$$

КС (3.8) можно получить и методом Глаубера путем действия оператора сдвига $D_F(z, t) = \exp[zA_F^+(t) - z^*A_F(t)]$ на вакуумное состояние $\psi_0^F(x, t)$, определяемое в виде $A_F\psi_0^F = 0$, т. е.

$$\tilde{\psi}_z^F(x, t) = D_F(z, t)\psi_0^F(x, t) = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \psi_n^F(x, t), \quad (3.11)$$

где

$$\psi_n^F(x, t) = \frac{[A_F^+(t)]^n}{\sqrt{n!}} \psi_0^F(x, t) = N_n \left(\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon}\right)^{n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}|\varepsilon|}\right) e^{-\lambda_1 x^2/2\hbar\varepsilon}, \quad (3.12)$$

$N_n = N_0/\sqrt{2^n n!}$, а $H_n(x)$ – полиномы Эрмита.

Функции (3.8) отличаются от функций (3.11) лишь постоянным фазовым множителем: $\psi_z^F = e^{ip_0 x_0/2\hbar} \tilde{\psi}_z^F$. Для них условия перекрытия и полноты записываются

в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_z^{F*}(x, t) \psi_{z'}^F(x, t) dx &= \exp \left[z^* z' - \frac{1}{2} (|z|^2 + |z'|^2) \right], \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_z^{F*}(x, t) \psi_z^F(x', t) d^2 z &= \pi \delta(x - x'), \quad d^2 z = d \operatorname{Re} z d \operatorname{Im} z. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Приведем теперь вид КС (3.8) в импульсном p -представлении. С помощью преобразования Фурье находим, что

$$\Phi_z^F(p, t) = N'_0 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon(t)}{2\hbar\lambda_1} (p - p_0)^2 - \frac{i\bar{x}_F(t)}{\hbar} (p - p_0) - \frac{ip_0^2}{\hbar} S_2(t) \right\}, \quad (3.14)$$

где $N'_0 = (\pi\hbar)^{-1/4} \lambda_1^{-1/2}$. Соответствующая (3.14) плотность вероятности распределения импульса не зависит от времени:

$$\rho_z^F(p, t) = |\Phi_z^F(p, t)|^2 = |N'_0|^2 e^{-(p-p_0)^2/\hbar|\lambda_1|^2}. \quad (3.15)$$

3.3. Стандартные отклонения, соотношения неопределенностей и КС.

Вычислим стандартные отклонения $\sigma_{Fx}(t)$, $\sigma_{Fp}(t)$ и величину $\sigma_{Fxp}(t)$ на обобщенных КС:

$$\begin{aligned} \sigma_{Fx}(t) &= \sqrt{(\Delta\hat{x})_F^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} |\varepsilon(t)|, \\ \sigma_{Fp}(t) &= \sqrt{(\Delta\hat{p})_F^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} |\lambda_1|, \\ \sigma_{Fxp}(t) &= \frac{1}{2} (\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} + \Delta\hat{p}\Delta\hat{x})_F = \frac{i\hbar}{2} [1 - \lambda_1^* \varepsilon(t)], \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\Delta\hat{x} = \hat{x} - \bar{x}_F$, $\Delta\hat{p} = \hat{p} - \bar{p}_F$.

Легко проверить, что КС минимизируют соотношение неопределенностей Робертсона–Шредингера

$$\sigma_{Fx}^2(t) \sigma_{Fp}^2(t) - \sigma_{Fxp}^2(t) = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (3.17)$$

Это означает, что и в случае переменной массы $M(t) \neq \text{const}$ данные состояния являются сжатыми для любого момента времени. Выполним оценку соотношения неопределенностей Гейзенберга с учетом ограничения (3.2):

$$\sigma_{Fx}(t) \sigma_{Fp}(t) |_{\operatorname{Re}(\lambda_1^* \lambda_2)=1} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + [|\lambda_1| |\lambda_2| \sin(\mu_2 - \mu_1) + 2|\lambda_1|^2 S_2(t)]^2} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.18)$$

При $t = 0$ данное соотношение имеет вид

$$\sigma_{Fx} \sigma_{Fp} |_{\operatorname{Re}(\lambda_1^* \lambda_2)=1} = \frac{\hbar}{2} |\lambda_1| |\lambda_2| = \hbar \sqrt{\frac{1}{4} + [|\lambda_1| |\lambda_2| \sin(\mu_2 - \mu_1)]^2}, \quad (3.19)$$

где $\sigma_{Fx} = \sigma_{Fx}(0) = \sqrt{\hbar/2} |\lambda_2|$ и $\sigma_{Fp} = \sigma_{Fp}(0) = \sqrt{\hbar/2} |\lambda_1|$. Отсюда следует, что $|\lambda_1| \neq 0$, $|\lambda_2| \neq 0$ [13]. Левая часть равенства (3.19) минимальна при $\mu_2 = \mu_1 = \mu$:

$$\sigma_{Fx} \sigma_{Fp} = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.20)$$

Следуя работе [13], назовем обобщенные КС (3.8) с ограничением $\mu_2 = \mu_1$ КС свободной нерелятивистской частицы переменной массы. Теперь ограничение (3.2) принимает вид $|\lambda_1||\lambda_2| = 1$ или $\lambda_2^* = \lambda_1^{-1}$. Так как постоянная μ не входит в КС (3.8), то в дальнейшем полагаем $\mu = 0$. Тогда

$$\lambda_2 = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{2}{\hbar}} \sigma_{Fx}, \quad \lambda_1 = |\lambda_1| = \sqrt{\frac{2}{\hbar}} \sigma_{Fp} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{1}{\sigma_{Fx}}, \quad (3.21)$$

$$\varepsilon(t) = \sqrt{\frac{2}{\hbar}} \left[\sigma_{Fx} + \frac{i\hbar}{\sigma_{Fx}} S_2(t) \right], \quad \sigma_{Fx}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} |\varepsilon(t)| = \sqrt{\sigma_{Fx}^2 + \frac{\hbar^2 S_2^2(t)}{\sigma_{Fx}^2}}.$$

С учетом (3.21) для любого t соотношение Гейзенберга для КС гласит

$$\sigma_{Fx}(t) \sigma_{Fp} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 S_2^2(t)}{\sigma_{Fx}^4}} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (3.22)$$

а КС свободной нерелятивистской квантовой частицы с переменной массой имеют вид

$$\psi_z^F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}(\sigma_{Fx} + i\hbar S_2(t)/\sigma_{Fx})}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{[x - \bar{x}_F(t)]^2}{4[\sigma_{Fx}^2 + i\hbar S_2(t)]} + \frac{ip_0}{\hbar} [x - p_0 S_2(t)] \right\}, \quad (3.23)$$

где комплексное число z выражается через начальные данные x_0 и p_0 :

$$z = \frac{x_0}{2\sigma_{Fx}} + \frac{ip_0}{\hbar} \sigma_{Fx}, \quad \operatorname{Re} z = \frac{x_0}{2\sigma_{Fx}}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{p_0}{\hbar} \sigma_{Fx}. \quad (3.24)$$

КС (3.23) параметризованы одним вещественным параметром σ_{Fx} .

Плотности вероятности, генерируемые КС (3.23), имеют вид

$$\rho_z^F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Fx}(t)} \exp \left\{ -\frac{[x - \bar{x}_F(t)]^2}{2\sigma_{Fx}^2(t)} \right\}. \quad (3.25)$$

Следовательно, в любой момент времени t плотности вероятности координаты (3.25) задаются гауссовыми распределениями со стандартным отклонением $\sigma_{Fx}(t)$. Время расплывания волнового пакета определяется формулой $T(t) = \sigma_{Fx}^2 t / \hbar S_2(t)$.

Средние значения координаты $\bar{x}_F(t) = x_0 + 2p_0 S_2(t)$ движутся по классической траектории со скоростью частицы $\dot{\bar{x}}_F(t) = p_0/M(t)$. С той же скоростью движутся максимумы плотностей вероятности координатного распределения (3.25).

Сравним КС (3.23) с плоской волной, описывающей движение свободной нерелятивистской квантовой частицы переменной массы:

$$\psi_{p_0}^F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} U_F(x, t) e^{ip_0 x/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i[p_0 x - p_0^2 S_2(t)]/\hbar}. \quad (3.26)$$

Оба набора функций являются решениями уравнения Шредингера (2.1a). КС принадлежат пространству квадратично-интегрируемых функций, тогда как плоские волны ему не принадлежат. Фазовая скорость плоской волны $p_0/2M(t)$ не равна скорости частицы. Групповая скорость волнового пакета (3.23) в точности совпадает со скоростью частицы: $p_0/M(t)$.

3.4. Полуклассические КС свободной частицы. Если форма координатного распределения (3.25) меняется со временем медленно в определенном смысле, то можно считать, что КС (3.23) представляют полуклассическое движение частицы. За изменение этой формы отвечает изменение величины $\sigma_{Fx}^2(t)$, которое обусловлено изменением величины $\hbar^2 S_2^2(t)/\sigma_{Fx}^2$ (см. (3.21)). Для полуклассического движения эта величина значительно меньше квадрата расстояния, пройденного частицей за тот же промежуток времени, т. е.

$$\frac{\hbar^2 S_2^2(t)}{\sigma_{Fx}^2} \ll \left[p_0 \int \frac{dt'}{M(t')} \right]^2 \quad \text{или} \quad p_0 \gg \frac{\hbar}{2\sigma_{Fx}}, \quad (3.27)$$

отсюда $\lambda \ll 4\pi\sigma_{Fx}$, где $\lambda = 2\pi\hbar/p_0$ – длина волны де Бройля частицы. Следовательно, при условии, что длина волны де Бройля частицы значительно меньше стандартного отклонения σ_{Fx} в начальный момент времени, КС будут полуклассическими состояниями.

3.5. Осцилляторные состояния. С помощью метода оператора эволюции мы можем построить различные точные решения временного уравнения Шредингера для свободной нерелятивистской квантовой частицы в классе функций как нормируемых на единицу, так и нормируемых на дельта-функции. Здесь мы построим точные осцилляторные состояния. С этой целью в качестве начальной волновой функции выберем функцию

$$\psi_n(x) = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0(x) = c_n \left(\frac{\lambda_2^*}{\lambda_2} \right)^{n/2} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}|\lambda_2|} \right) e^{-\lambda_1 x^2 / 2\hbar\lambda_2}, \quad (3.28)$$

где $c_n = c_0/\sqrt{2^n n!}$, $c_0 = (\pi\hbar)^{-1/4} \lambda_2^{-1/2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда, используя формулы (П.4) (см. приложение), находим, что искомые зависящие от времени осцилляторные состояния имеют вид

$$\psi_n^F(x, t) = U_F(x, t) \psi_n(x) = N_n \left(\frac{\varepsilon^*(t)}{\varepsilon(t)} \right)^{n/2} e^{-\lambda_1 x^2 / 2\hbar\varepsilon(t)} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}|\varepsilon(t)|} \right), \quad (3.29)$$

т. е., как и следовало ожидать, они совпадают с функциями (3.12). Выпишем плотности вероятности, генерируемые волновыми функциями (3.29):

$$\rho_n^F(x, t) = |\psi_n^F(x, t)|^2 = |N_n|^2 H_n^2 \left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}|\varepsilon(t)|} \right) e^{-x^2 / \hbar|\varepsilon(t)|^2}. \quad (3.30)$$

Как видно, эти распределения с течением времени сохраняют свой вид.

3.6. Функция Вигнера для КС. Вычислим функцию Вигнера для КС (3.8). Функция Вигнера играет центральную роль при построении фазовой картины квантовой механики. Представление квантовой механики в фазовом пространстве является альтернативой обычному описанию с помощью координатных или импульсных волновых функций. Явные выражения для функций Вигнера были найдены для ряда простейших нерелятивистских [8], [17]–[21] и релятивистских [12], [22], [23]

квантовых систем. Функция Вигнера является функционалом волновой функции системы в координатном $\psi(x, t)$ и импульсном $\Phi(p, t)$ представлениях:

$$W(p, x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(x - \frac{x'}{2}, t \right) \psi \left(x + \frac{x'}{2}, t \right) e^{-ipx'/\hbar} dx' \quad (3.31a)$$

или

$$W(p, x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^* \left(p - \frac{p'}{2}, t \right) \Phi \left(p + \frac{p'}{2}, t \right) e^{ip'x/\hbar} dp'. \quad (3.31b)$$

Учет в (3.31) явного вида КС (3.8) или (3.14) приводит к тому, что соответствующая им функция Вигнера записывается как

$$W_z^F(p, x, t) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-(r^2+s^2-\nu rs)/\hbar}, \quad (3.32)$$

где $r = |\lambda_1|(x - \bar{x}_F(t))$, $s = |\varepsilon(t)|(p - p_0)$, $\nu = 4|\lambda_1|S_2(t)/|\varepsilon(t)|$.

3.7. Функция Вигнера для осцилляторных состояний. Подставляя выражение (3.29) в формулу (3.31a), перепишем ее в виде

$$W_n^F(p, x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} |N_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\alpha x_2) H_n(\alpha x_3) e^{-\beta^* x_2^2 - \beta x_3^2 - ipx'/\hbar} dx', \quad (3.33)$$

где $x_2 = x - x'/2$, $x_3 = x + x'/2$, $\alpha = 1/\sqrt{\hbar}|\varepsilon(t)|$, $\beta = \lambda_1/2\hbar\varepsilon(t)$. После вычисления этого интеграла находим

$$W_n^F(p, x, t) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\sigma/\hbar} L_n \left(\frac{2\sigma}{\hbar} \right), \quad (3.34)$$

где $L_n^\alpha(x)$ – полиномы Лагерра, $\sigma = \xi^2 + \eta^2 - \nu\xi\eta > 0$ и введены обозначения $\xi = |\lambda_1|x$, $\eta = |\varepsilon(t)|p$.

Покажем, что функция Вигнера (3.34) нормирована на единицу, т.е.

$$A_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_n^F(p, x, t) dp dx = 1. \quad (3.35)$$

С этой целью, воспользовавшись явным выражением для полиномов Лагерра

$$L_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} \frac{(-z)^k}{k!},$$

представим A_n в виде

$$A_n = \frac{(-1)^n}{\pi|\lambda_1||\varepsilon|} \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} \frac{2^k}{k!} \left(\frac{d^k}{dy^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\sigma} d\xi d\eta \right)_{y=1}.$$

Отсюда находим, что действительно

$$A_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} (-2)^k = 1.$$

Из (3.35) получаем полезную интегральную формулу для полиномов Лагерра:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 - \eta^2 + \nu \xi \eta} L_n(2(\xi^2 + \eta^2 - \nu \xi \eta)) d\xi d\eta = (-1)^n \frac{2\pi}{\sqrt{4 - \nu^2}}, \quad (3.36)$$

где $|\nu| < 2$. Другая интегральная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} L_n(2\xi^2 + 2\eta^2) d\eta = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\pi} H_n^2(\xi) \quad (3.37)$$

вытекает из следующего свойства функции Вигнера:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n^F(p, x, t) dp = |\psi_n^F(x, t)|^2 = \rho_n^F(x, t). \quad (3.38)$$

4. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА В ПЕРЕМЕННОМ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

В этом разделе мы строим зависящие от времени когерентные и полуклассические состояния, а также состояния осцилляторного типа для нерелятивистской квантовой частицы переменной массы в переменном однородном поле, а затем вычисляем их функции Вигнера. При этом мы исходим из того факта, что все решения уравнения (2.16) могут быть получены из соответствующих решений уравнения (2.1a) действием на них унитарного оператора сдвига $U_1(t)$.

4.1. Интегралы движения и зависящие от времени обобщенные КС. Интегралы движения $A_L(t)$ и $A_L^+(t)$, линейные по операторам $\hat{x}$ и $\hat{p}$, имеют вид

$$\begin{aligned} A_L(t) &= U_1 A_F(t) U_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} [\lambda_1 \hat{x}_1(t) + i\varepsilon(t) \hat{p}_1(t)], \\ A_L^+(t) &= U_1 A_F^+(t) U_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} [\lambda_1^* \hat{x}_1(t) - i\varepsilon^*(t) \hat{p}_1(t)], \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\hat{x}_1(t) = \hat{x} - S_1(t)$, $\hat{p}_1(t) = \hat{p} - \delta(t)$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \hat{x} &= S_1(t) + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [\varepsilon^*(t) A_L(t) + \varepsilon(t) A_L^+(t)], \\ \hat{p} &= \delta(t) + i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [\lambda_1 A_L^+(t) - \lambda_1^* A_L(t)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем обобщенные КС нерелятивистской квантовой частицы в переменном однородном поле как собственные функции оператора $A_L(t)$:

$$A_L(t)|z, t\rangle_L = z|z, t\rangle_L. \quad (4.3)$$

Средние значения координаты и импульса на КС (4.3) равны

$$\bar{x}_L(t) \equiv {}_L\langle z, t|\hat{x}|z, t\rangle_L = \bar{x}_F(t) + S_1(t), \quad \bar{p}_L(t) \equiv {}_L\langle z, t|\hat{p}|z, t\rangle_L = p_0 + \delta(t). \quad (4.4)$$

Комплексное число $z = {}_L\langle z, t | A_L(t) | z, t \rangle_L$ дается выражением (3.6). Явный вид КС (4.3) в x -представлении следующий:

$$\begin{aligned} \psi_z^L(x, t) &= U_1(t) \psi_z^F(x, t) = \\ &= N_0 \exp \left\{ -\frac{\lambda_1 [x - \bar{x}_L(t)]^2}{2\hbar \varepsilon(t)} + \frac{i}{\hbar} p_0 [x_1(t) - p_0 S_2(t)] + i\varphi_0(x, t) \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $x_1(t) = x - S_1(t)$. КС (4.5) обладают всеми свойствами КС (3.8). В частности, они удовлетворяют условиям ортогональности и полноты вида (3.13), а также уравнению Шредингера $S_L(x, t) \psi_z^L(x, t) = 0$. Их можно получить также методом Глаубера, действуя оператором сдвига

$$D_L(z, t) = U_1 D_F(z, t) U_1^{-1} = e^{z A_L^+(t) - z^* A_L(t)}$$

на вакуумное состояние $\psi_0^L(x, t)$, т. е.

$$\tilde{\psi}_z^L(x, t) = D_L(z, t) \psi_0^L(x, t) = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \psi_n^L(x, t), \quad (4.6)$$

где $A_L(t) \psi_0^L(x, t) = 0$ и

$$\psi_n^L(x, t) = \frac{[A_L^+(t)]^n}{\sqrt{n!}} \psi_0^L(x, t) = N_n \left(\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon} \right)^{n/2} H_n \left(\frac{x_1(t)}{\sqrt{\hbar} |\varepsilon|} \right) e^{-\lambda_1 x_1^2(t)/2\hbar \varepsilon + i\varphi_0(x, t)}. \quad (4.7)$$

Плотность вероятности координаты в КС (4.5) есть

$$\rho_z^L(x, t) = |\psi_z^L(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar} |\varepsilon(t)|} e^{-[x - \bar{x}_L(t)]^2 / \hbar |\varepsilon(t)|^2}. \quad (4.8)$$

4.2. Стандартные отклонения, соотношения неопределенностей и КС нерелятивистской частицы в переменном однородном поле. Легко показать, что стандартные отклонения $\sigma_{Lx}(t)$, $\sigma_{Lp}(t)$ и величина $\sigma_{Lxp}(t)$ на обобщенных КС (4.5) для частицы в переменном однородном поле совпадают с соответствующими выражениями (3.16) для свободной частицы:

$$\sigma_{Lx}(t) = \sigma_{Fx}(t), \quad \sigma_{Lp}(t) = \sigma_{Fp}(t), \quad \sigma_{Lxp}(t) = \sigma_{Fxp}(t). \quad (4.9a)$$

Поэтому все формулы (3.17)–(3.25) остаются верными и для частицы в переменном однородном поле при условии, что в них надо произвести замену $\sigma_{Fi} \rightarrow \sigma_{Li}$, где $i = x, p, xp$. Например, аналог формулы (3.17) будет выглядеть так:

$$\sigma_{Lx}^2(t) \sigma_{Lp}^2(t) - \sigma_{Lxp}^2(t) = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (4.9b)$$

Это означает, что состояния (4.5) являются сжатыми для всех моментов времени.

КС нерелятивистской квантовой частицы в переменном однородном поле теперь можно придать вид, аналогичный (3.23):

$$\begin{aligned} \psi_z^L(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi} (\sigma_{Lx} + i\hbar S_2(t)/\sigma_{Lx})}} \times \\ &\times \exp \left\{ i\varphi_0(x, t) - \frac{[x - \bar{x}_L(t)]^2}{4[\sigma_{Lx}^2 + i\hbar S_2(t)]} + \frac{ip_0}{\hbar} [x_1(t) - p_0 S_2(t)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Рис. 1. Эволюция плотности вероятности (4.11) в моменты времени $t = 0$ (кривая 1), $t = 2$ (кривая 2), $t = 4$ (кривая 3), $t = 10$ (кривая 4): $\sigma_{Fx} = 0.5$, $p_0 = 1$, $x_0 = 0$ для $M = 1$, $F = 0.1$ (а), $M = 1 + t$, $F = 0.1$ (б), $M = e^t$, $F = 0.1e^{2t}$ (в).

Они, как и КС (3.23), параметризованы одним вещественным параметром σ_{Lx} .

Для плотности вероятности получим вместо (3.25) выражение

$$\rho_z^L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{Lx}(t)} e^{-[x - \bar{x}_L(t)]^2 / 2\sigma_{Lx}^2(t)}. \quad (4.11)$$

На рис. 1 приведены графики функции (4.11) для моментов времени $t = 0$, $t = 2$, $t = 4$ и $t = 10$.

Как и в случае свободной частицы, здесь плотность вероятности с течением времени сохраняет свой вид. Средние значения координаты $\bar{x}_L(t) = \bar{x}_F(t) + S_1(t)$ и импульса $\bar{p}_L(t) = p_0 + \delta(t)$ движутся по классической траектории согласно закону Ньютона $\dot{\bar{p}}_L = F(t)$ со скоростью частицы $\dot{\bar{x}}_L(t) = [p_0 + \delta(t)]/M(t)$. С этой же скоростью движутся максимумы плотности (4.11).

Аналогом плоской волны (3.26), описывающим движение частицы в переменном однородном поле, является функция

$$\psi_{p_0}^L(x, t) = U_1(x, t) \psi_{p_0}^F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left\{ i\varphi_0(x, t) + \frac{i}{\hbar} p_0 [x_1(t) - p_0 S_2(t)] \right\}. \quad (4.12)$$

В этом случае, когда частица движется в переменном однородном поле, в отличие от КС (4.10), плоские волны (4.12) квадратично-неинтегрируемы. Их фазовая скорость $[p_0 + 2\delta(t)]/2M(t)$ не совпадает со скоростью частицы $[p_0 + \delta(t)]/M(t)$.

4.3. Полуклассические КС частицы в переменном однородном поле. КС частицы в переменном однородном поле можно рассматривать как полуклассические состояния, если аналогично (3.27) выполняется неравенство

$$\frac{\hbar^2 S_2^2(t)}{\sigma_{Lx}^2} \ll \left(\int_0^t \frac{p_0 + \delta(t')}{M(t')} dt' \right)^2 \Rightarrow \frac{\hbar}{\sigma_{Lx}} \ll \left| 2p_0 + \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right|. \quad (4.13)$$

Пусть $M(t) = m = \text{const}$ и $F(t) = F_0 = \text{const}$. Тогда условие (4.13) принимает вид

$$\frac{\hbar}{\sigma_{Lx}} \ll |2p_0 + F_0 t|, \quad (4.14)$$

т. е. с течением времени оно усиливается. Иными словами, после достаточно большого времени КС частицы в переменном однородном поле можно рассматривать как полуклассические.

4.4. Осцилляторные состояния. Исходя из (3.29) легко получить точные осцилляторные состояния для квантовой частицы в переменном однородном поле:

$$\begin{aligned} \psi_n^L(x, t) &= U_1(x, t) \psi_n^F(x, t) = N_n \left(\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon} \right)^{n/2} \times \\ &\times \exp \left\{ i\varphi_0(x, t) - \frac{\lambda_1 x_1^2(t)}{2\hbar \varepsilon(t)} \right\} H_n \left(\frac{x_1(t)}{\sqrt{\hbar} \varepsilon(t)} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Эти состояния приводят к следующей плотности вероятности распределения координаты:

$$\rho_n^L(x, t) = |N_n|^2 H_n^2 \left(\frac{x_1(t)}{\sqrt{\hbar} \varepsilon(t)} \right) e^{-x_1^2(t)/\hbar |\varepsilon(t)|}. \quad (4.16)$$

4.5. Функция Вигнера для КС и осцилляторных состояний. Исходя из (2.7) можно легко показать, что функция Вигнера частицы в переменном однородном поле $W_L(p, x, t)$ связана с функцией Вигнера свободной частицы $W_F(p, x, t)$ простым операторным соотношением

$$W^L(p, x, t) = e^{-\delta(t)\partial_p} e^{-S_1(t)\partial_x} W^F(p, x, t) = W^F(p_1, x_1, t), \quad (4.17)$$

где $p_1 = p - \delta(t)$ и $x_1 = x - S_1(t)$. Поэтому для функций Вигнера КС (4.5) и осцилляторных состояний (4.15) частицы в переменном однородном поле из (3.32), (3.34) и (4.17) получаем соответственно следующие выражения:

$$W_z^L(p, x, t) = \frac{1}{\pi \hbar} e^{-(r_1^2 + s_1^2 - \nu r_1 s_1)/\hbar}, \quad W_n^L(p, x, t) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-\sigma_1/\hbar} L_n \left(\frac{2\sigma_1}{\hbar} \right). \quad (4.18)$$

Здесь $r_1 = |\lambda_1|(x - \bar{x}_L(t))$, $s_1 = |\varepsilon(t)|(p - \bar{p}_L(t))$, $\sigma_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2 - \nu \xi_1 \eta_1$, $\xi_1 = |\lambda_1|x_1(t)$, $\eta_1 = |\varepsilon(t)|p_1(t)$. Ясно, что функции (4.18) обладают нужными свойствами и нормированы на единицу, например

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_z^L(p, x, t) dp = |\psi_z^L(x, t)|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} W_n^L(p, x, t) dp = |\psi_n^L(x, t)|^2. \quad (4.19)$$

Кроме того, они удовлетворяют уравнению эволюции

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{M(t)} \frac{\partial W}{\partial x} + F(t) \frac{\partial W}{\partial p} = 0.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя, можно сказать, что метод оператора эволюции оказывается исключительно плодотворным в применении к квадратичным (как стационарным, так и нестационарным) системам. Это объясняется следующими причинами:

1) оператор эволюции сильно упрощает процедуры нахождения решений нестационарного уравнения Шредингера для свободной частицы и частицы в переменном однородном поле;

2) знание операторов эволюции свободной частицы и частицы в переменном однородном поле позволяет установить унитарную эквивалентность между этими системами;

3) метод оператора эволюции является наиболее простым прямым методом нахождения решений с данным свойством (например, квадратично-интегрируемые и квадратично-неинтегрируемые); по сути дела для этого достаточно, чтобы начальная волновая функция обладала этим свойством.

К примеру, легко находится известное решение свободного уравнения Шредингера (2.1a) в виде волнового пакета Эйри [7] методом оператора эволюции:

$$\psi_{Ai}^F = U_F \text{Ai}(Bx + b) = e^{if(x,t)} \text{Ai}(g(x,t)), \quad (5.1)$$

где

$$f(x,t) = \hbar B^3 S_2(t) \left[x + \frac{b}{B} - \frac{2}{3} \hbar^2 B^3 S_2^2(t) \right], \quad g(x,t) = B \left[x + \frac{b}{B} - \hbar^2 B^3 S_2^2(t) \right].$$

А при наличии переменного однородного поля решение уравнения (2.16) будет иметь вид [7], [8], [10], [12], [22]

$$\psi_{Ai}^L(x,t) = U_1 \psi_{Ai}^F(x,t) = e^{i[\varphi_0(x,t)+f(x_1(t),t)]} \text{Ai}(g(x_1(t),t)). \quad (5.2)$$

Волновые функции (5.1) и (5.2) согласно (П.11) нормированы на дельта-функцию. Функции Вигнера для них задаются формулами

$$W_{Ai}^F(p,x,t) = 2^{-1/3} (\pi \hbar)^{-1} \text{Ai}(h(p,x,t)), \quad W_{Ai}^L(p,x,t) = W_{Ai}^F(p_1(t), x_1(t), t),$$

где $h(p,x,t) = \sqrt[3]{4}(Bx+b-2pBS_2(t)+p^2/\hbar^2 B^2)$. При $B = -\lambda_0$, $b = -\lambda_0/F_0$ и $M(t) = m$ функция W_{Ai}^L совпадает с формулой, полученной в [22], где $\lambda_0 = \sqrt[3]{2mF_0/\hbar^2}$.

В настоящей работе с помощью метода оператора эволюции мы изучили различные типы обобщенных КС свободной массивной нерелятивистской частицы в случае, когда масса произвольным образом зависит от времени. Тем самым мы обобщили результаты работы [13] на случай переменной массы. Построены также различные типы обобщенных КС нерелятивистской массивной частицы в переменном однородном поле. Установлено, что они обладают свойством полноты, минимизируют соотношение неопределенностей Робертсона–Шредингера во все моменты времени, а соотношение неопределенностей Гейзенберга – только в начальный момент времени. Соответствующие им плотности распределения вероятности координаты задаются гауссовыми распределениями во все моменты времени. Среднее значение координаты движется по классической траектории со скоростью частицы, с той же

скоростью движется и максимум плотности распределения вероятности. Кроме того, найдены решения осцилляторного типа нестационарного уравнения Шредингера для свободной частицы и для частицы в переменном однородном поле. Вычислены функции распределения Вигнера для волновых функций КС и осцилляторных состояний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Действие оператора $e^{\alpha \partial_x^2}$ на функции $f(x)$ задается формулой

$$e^{\alpha \partial_x^2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x')^2/4\alpha} f(x') dx' \quad (\text{П.1})$$

или

$$e^{\alpha \partial_x^2} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} f^{(2n)}(x). \quad (\text{П.2})$$

Приведем некоторые примеры:

$$\text{а) } e^{\alpha \partial_x^2} e^{-\lambda x^2 + \gamma x} = (1 + 4\alpha\lambda)^{-1/2} e^{-(\lambda x^2 - \gamma x - \alpha\gamma^2)/(1+4\alpha\lambda)}, \quad (\text{П.3})$$

$$\text{б) } e^{\alpha \partial_x^2} e^{-\lambda^2 x^2/2} H_n(\gamma x) = b^{-1/2} e^{-\lambda^2 x^2/2b} \left(1 - \frac{4\alpha\gamma^2}{b}\right)^{n/2} H_n\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{b(b-4\alpha\gamma^2)}}\right), \quad (\text{П.4})$$

где $b = 1 + 2\alpha\lambda^2$;

$$\text{в) } e^{\alpha \partial_x^2} e^{\beta x} \text{Ai}(Bx + b) = e^{\varphi(x)} \text{Ai}(Bx + b + 2\alpha\beta B + \alpha^2 B^4), \quad (\text{П.5})$$

где

$$\varphi(x) = \beta x + \alpha B^2(Bx + b) + \alpha\beta(\beta + 2\alpha B^3) + \frac{2}{3}\alpha^3 B^6. \quad (\text{П.6})$$

При выводе формулы (П.4) мы воспользовались интегралом [24]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p(x-y)^2} H_n(cx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{p-c^2}{p}\right)^{n/2} H_n\left(cy\sqrt{\frac{p}{p-c^2}}\right), \quad y, \operatorname{Re} p > 0.$$

2. В некоторых вычислениях интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \text{Ai}(a + \alpha x) \text{Ai}(b + \beta x) dx, \quad (\text{П.7})$$

где $\beta > \alpha$, оказывается полезным. Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся следующим интегральным представлением функции Эйри:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux+u^3/3)} du. \quad (\text{П.8})$$

В результате получаем

$$J = \frac{e^{ia_0} \text{Ai}(a_1)}{\sqrt[3]{\beta^3 - \alpha^3}}, \quad (\text{П.9})$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 - \frac{c_1 c_2}{3c_3} + \frac{2c_2^3}{27c_3^2}, & a_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{3c_3}} \left(c_1 - \frac{c_2^2}{3c_3} \right), \\ c_0 &= -\frac{k}{\beta} \left(b + \frac{k^2}{3\beta^2} \right), & c_1 &= a - \frac{\alpha}{\beta} b - \frac{\alpha k^2}{\beta^3}, \\ c_2 &= -\frac{\alpha^2}{\beta^3} k, & c_3 &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

3. Выпишем условия полноты и ортогональности для функции Эйри:

$$\begin{aligned} B \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(Bx+b) \text{Ai}(Bx+a) dx &= \delta(a-b), \\ B \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(Bx'+b) \text{Ai}(Bx+b) db &= \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Список литературы

- [1] K. Husimi, “Miscellanea in elementary quantum mechanics. II”, *Progr. Theor. Phys.*, **9** (1953), 381–402.
- [2] В. С. Попов, А. М. Переломов, “Параметрическое возбуждение квантового осциллятора”, *ЖЭТФ*, **56**:4 (1969), 1375–1390.
- [3] И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, М., 1979.
- [4] I. A. Pedrosa, “Exact wave functions of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency”, *Phys. Rev. A*, **55**:4 (1997), 3219–3221.
- [5] P. Camiz, A. Gerardi, C. Marchioro, E. Presutti, E. Scacciatelli, “Exact solution of a time-dependent quantal harmonic oscillator with a singular perturbation”, *J. Math. Phys.*, **12**:10 (1971), 2040–2043.
- [6] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, V. I. Manko, “Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator”, *Physica*, **72** (1974), 597–618.
- [7] M. V. Berry, N. L. Balazs, “Nonspreading wave packets”, *Am. J. Phys.*, **47**:3 (1979), 264–267.
- [8] V. V. Dodonov, V. I. Manko, O. V. Shakhmistova, “Wigner functions of a particle in a time-dependent uniform field”, *Phys. Lett. A*, **102**:7 (1984), 295–297.
- [9] I. Guedes, “Solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential”, *Phys. Rev. A*, **63**:3 (2001), 034102, 3 pp.
- [10] M. Feng, “Complete solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential”, *Phys. Rev. A*, **64**:3 (2002), 034101, 3 pp.
- [11] P.-G. Luan, C.-S. Tang, “Lewis-Riesenfeld approach to the solutions of the Schrödinger equation in the presence of a time-dependent linear potential”, *Phys. Rev. A*, **71**:1 (2005), 014101, 4 pp., arXiv: quant-ph/0309174.
- [12] Sh. M. Nagiyev, K. Sh. Jafarova, “Relativistic quantum particle in a time-dependent homogeneous field”, *Phys. Lett. A*, **377**:10–11 (2013), 747–752.
- [13] В. Г. Багров, Д. М. Гитман, А. С. Перейра, “Когерентные и полуклассические состояния свободной частицы”, *УФН*, **184**:9 (2014), 961–966.
- [14] J. R. Klander, B. S. Skagerstam, *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Sci., Singapore, 1985.
- [15] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987.

- [16] A. O. Barut, L. Girardello, “New “coherent” states associated with non-compact groups”, *Commun. Math. Phys.*, **21**:1 (1971), 41–55.
- [17] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, “Distribution functions in physics: fundamentals”, *Phys. Rep.*, **106**:3 (1984), 121–167.
- [18] H.-W. Lee, “Theory and application of the quantum phase-space distribution functions”, *Phys. Rep.*, **259**:3 (1995), 147–211.
- [19] В. Н. Татарский, “Вигнеровское представление квантовой механики”, *УФН*, **139**:4 (1983), 587–619.
- [20] R. W. Davies, K. T. R. Davies, “On the Wigner distribution function for an oscillator”, *Ann. Phys.*, **89**:2 (1975), 261–273.
- [21] Е. П. Богданов, В. Н. Горшенков, В. Л. Коньков, *Изв. вузов СССР. Физика*, **7** (1970), 94–101.
- [22] Ш. М. Нагиев, “Функция Вигнера для релятивистской частицы в зависящем от времени линейном потенциале”, *ТМФ*, **188**:1 (2016), 76–84.
- [23] Н. М. Атакишиев, Ш. М. Нагиев, К. Б. Вольф, “О функциях распределения Вигнера для релятивистского линейного осциллятора”, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 410–425.
- [24] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 2: *Специальные функции*, Наука, М., 1982.

Поступила в редакцию 27.12.2016