Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Чугреев, k -Эссенция в релятивистской теории гравитации и общей теории относительности, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 3, 510–521

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:21:02

© 2018 г.

Ю. В. Чугреев*

k -ЭССЕНЦИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрена модель скалярного поля с нетривиальной кинетической частью (k -эссенции) на фоне плоской однородной и изотропной Вселенной в рамках релятивистской теории гравитации и ОТО. Такое скалярное поле имитирует вещество идеальной жидкости и служит моделью темной энергии, поскольку на поздних временах оно приводит к космологическому ускорению. Для целей поиска адекватного космологического сценария удобнее задавать зависимость плотности энергии такого поля от масштабного фактора, а уже потом находить соответствующий ему лагранжиан. На основе решения такой обратной задачи показано, что в релятивистской теории гравитации любое скалярное поле этого типа либо приводит к неустойчивостям, либо стадия сжатия заканчивается недопустимо рано. Отмечается, что непротиворечивой моделью темной энергии в релятивистской теории гравитации может стать скалярное поле с отрицательным потенциалом (экипирозис) Стейнхардта–Турока. В ОТО модель k -эссенции жизнеспособна и может представлять собой как темную энергию, так и темную материю. Рассмотрен ряд конкретных моделей k -эссенции.

Ключевые слова: РТГ, k -эссенция, обратная задача, экипирозис, газ Чаплыгина.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9347>

1. ВВЕДЕНИЕ

Тридцать лет назад в работе [1] был предложен осциллирующий сценарий развития фридмановской Вселенной в релятивистской теории гравитации (РТГ), в которой тензорное гравитационное поле $\phi^{\mu\nu}$ является массивным и описывается известными уравнениями

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (1)$$

$$D_\beta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = 0, \quad (2)$$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: chugreev@physics.msu.ru

где m – масса гравитона, $\gamma_{\mu\nu}$ – метрика Минковского, в которой задана ковариантная производная D_β , $g_{\mu\nu}$ – метрика эффективного риманова пространства-времени:

$$\sqrt{\frac{\det g_{\mu\nu}}{\det \gamma_{\mu\nu}}} g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} + \phi^{\alpha\beta}, \quad (3)$$

$R_{\mu\nu}(g)$ – тензор Риччи, $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи, $G = M_{\text{Pl}}^{-2}$ – гравитационная постоянная, c – скорость света. Греческие индексы пробегают значения $0, 1, 2, 3$, а латинские – $1, 2, 3$. В дальнейшем мы будем использовать планковскую систему единиц $G = c = \hbar = k = 1$. При $m = 0$ уравнения (1), (2) формально совпадают с уравнениями ОТО в гармонических координатах. Добавление к ним членов с массой гравитона изменяет характер фридмановского однородного и изотропного решения ОТО. Для плоской Вселенной¹⁾ с метриками

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a(t)^6 dt^2 - \beta^4 a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4)$$

$$d\sigma^2 \equiv \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор, β – константа интегрирования уравнения (2), получаются следующие космологические уравнения:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{m^2}{12} \left[2 - \frac{3}{\beta^4 a^2} + \frac{1}{a^6}\right], \quad (6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) - \frac{m^2}{6} \left[1 - \frac{1}{a^6}\right]. \quad (7)$$

Как обычно, точка “.” обозначает производную по собственному времени $d/d\tau$ ($a^3 d/dt = d/d\tau$), $\rho(\tau)$, $p(\tau)$ – плотность и давление вещества Вселенной соответственно.

В ОТО есть только один (риманов) интервал, который для случая плоской фридмановской Вселенной имеет вид

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\tau^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

и приводит к тем же уравнениям (6), (7), если в них положить $m = 0$.

Из закона сохранения энергии вещества

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (8)$$

следует, что при простейшем выборе уравнения состояния $p = \omega\rho$, $\omega = \text{const}$, плотность ρ зависит от масштабного фактора так же, как в ОТО ($A_\omega = \text{const}$):

$$\rho = \frac{A_\omega}{a^{3(1+\omega)}}. \quad (9)$$

До открытия космологического ускорения плотность вещества (9) считалась двухкомпонентной, состоящей из вещества и излучения:

$$\rho = \frac{A_M}{a^3} + \frac{A_r}{a^4}, \quad (10)$$

¹⁾Вообще говоря, уравнения (1) и (2) допускают и фридмановские решения с отрицательной пространственной кривизной [2].

поэтому возникали две разворотные точки – при высоких плотностях ($a \ll 1$) отрицательный член, пропорциональный m^2/a^6 , “догонял” преобладающую в этой фазе радиацию, а при достаточно больших a малая плотность материи (темная материя, барионы и нейтрино) неизбежно должна была стать равной $m^2/16\pi$, где и происходил отскок ($a = a_{\max}$) с последующим развитием коллапса Вселенной к $a_{\min}$.

Масса гравитона проявляла себя только вблизи точек разворота, в остальном фридмановский сценарий ОТО не менялся. В работе [3] было показано, что при $\beta^4 \geq a_{\max}^4$ такое решение удовлетворяет принципу причинности РТГ, поэтому в уравнении (6) пропорциональный a^{-2} член хотя и уменьшается медленнее, чем ρ (10), но не может участвовать в фиксации $a_{\max}$.

После открытия на рубеже веков космологического ускорения и изменения знака параметра замедления появилась необходимость добавления к традиционному составу вещества (10) либо космологического члена (с положительным знаком), либо квинтэссенции с отрицательным давлением [4], [5]. Вариант с космологическим членом был отвергнут, так как на поздних временах он приводил к инфляционному разлету с неизбежным нарушением принципа причинности. Поэтому был избран вариант квинтэссенции с медленно меняющейся плотностью:

$$\rho = \frac{A_M}{a^3} + \frac{A_r}{a^4} + \frac{A_\nu}{a^{3\nu}}, \quad (11)$$

$$p_\nu = -(1 - \nu)\rho_\nu, \quad 0 < \nu < \frac{2}{3}. \quad (12)$$

Позднее в работе [6] был предложен лагранжиан скалярного поля k -эссенции с нетривиальной кинетической частью, реализующего эту модель:

$$L_\phi = \sqrt{-g}K(X), \quad X = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi, \quad (13)$$

$$K(X) = -\epsilon X^{-\nu/2(1-\nu)}, \quad \epsilon = \text{const} > 0, \quad (14)$$

где ∇_α – ковариантная производная по метрике $g_{\mu\nu}$, ϕ – скалярное поле.

В статье [7] на основании изучения движения галактик в Местной группе было установлено, что постоянный параметр квинтэссенции ν должен быть очень мал: $0 < \nu \leq 0.05$.

Во втором разделе настоящей статьи для скалярного поля k -эссенции простейшего вида (13) (без потенциала) решена следующая обратная задача: каким образом по заданной плотности вещества этого поля (как функции масштабного фактора) можно найти его лагранжиан, давление, уравнение состояния, скорость звука и т. д.? На основе полученных формул, справедливых как в РТГ, так и в ОТО, довольно удобно анализировать модели k -эссенции вида (13). В частности, отсюда сразу получается простейшая объединенная модель темной энергии и темной материи в ОТО [8].

В третьем разделе на основе полученных общих формул для обратной задачи мы показываем, что модель k -эссенции с постоянным ν , предложенная в работе [6], не может быть жизнеспособной из-за ее неустойчивости, приводящей к экспоненциальному разрушению фридмановской симметрии. Также строго доказывается, что для произвольного лагранжиана скалярного поля k -эссенции типа (13) в рамках РТГ невозможно удовлетворить одновременно следующим критериям: а) наличие космологического ускорения в настоящее время, б) гравитационной устойчивости

такого скалярного поля относительно малых возмущений, в) наличие точки поворота фридмановского сценария на поздних временах для того, чтобы гарантировать соблюдение принципа причинности, и г) возможности достижения высоких плотностей на этапе сжатия (более 10^3 Гэв), необходимых для существования впоследствии горячей фридмановской фазы. Отмечается, что в качестве возможной альтернативы всем этим критериям удовлетворяет скалярное поле экпирозиса [9]–[12].

В четвертом разделе показано, что модели k -эссенции рассматриваемого типа могут оказаться жизнеспособными в рамках плоского бесконечного фридмановского сценария ОТО. Приводятся конкретные модели соответствующих лагранжианов скалярных полей.

В заключении кратко перечислены основные результаты работы.

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В МОДЕЛИ k -ЭССЕНЦИИ БЕЗ ПОТЕНЦИАЛА

Итак, рассмотрим модель скалярного поля (13), развивающегося на фоне однородной и изотропной (фридмановской) Вселенной. В этом случае скалярное поле зависит только от времени и, соответственно,

$$X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2. \quad (15)$$

Обозначая производные как

$$K_X \equiv \frac{dK}{dX}, \quad K_{XX} \equiv \frac{dK_X}{dX},$$

запишем уравнения скалярного поля с лагранжианом (13), (15) в виде

$$(K_X + 2XK_{XX})\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}K_X\dot{\phi} = 0. \quad (16)$$

Если ввести функцию $G(X)$:

$$G(X) = \frac{1}{2X} \left(1 + 2\frac{XK_{XX}}{K_X} \right), \quad (17)$$

и новую переменную F такую, что

$$G(X) = \frac{d}{dX} \ln F, \quad F = \exp \left(\int^X G(X) dX \right), \quad (18)$$

то уравнение (16) сводится к уравнению

$$\frac{\dot{F}}{F} + 3\frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$F = \frac{\lambda}{a^3}, \quad \lambda = \text{const} > 0. \quad (19)$$

Из равенств (17), (18) также легко установить соотношение

$$\frac{K_{XX}}{K_X} = \frac{(F/\sqrt{X})_X}{F/\sqrt{X}}, \quad (20)$$

которое позволяет найти лагранжиан K и его производную K_X в виде

$$K_X = C \frac{F}{\sqrt{X}}, \quad C = \text{const} > 0, \quad (21)$$

$$K = C \int \frac{F}{\sqrt{X}} dX = 2C \int F d\sqrt{X}. \quad (22)$$

Первый интеграл (21) был получен в работе [13].

Найдем теперь выражения для плотности и давления, соответствующих лагранжиану (13). По определению записываем равенства

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = (p + \rho) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad u_\mu = \frac{\partial_\mu \phi}{2\sqrt{X}} = (1, \vec{0}). \quad (23)$$

Из соотношений (13) и (23) имеем

$$\rho = 2XK_X - K, \quad (24)$$

$$p = K. \quad (25)$$

Чтобы получить зависимость $\rho = \rho(a)$, следует найти обратную к функции (18) функцию $X = X(F)$ и подставить ее в формулы (24) и (25). На практике чаще необходимо решать обратную задачу: выбирая конкретный вид плотности $\rho = \rho(a)$, чтобы удовлетворить ряду физических требований (например, наличие космологического ускорения ($\ddot{a} > 0$), заданному поведению при $a \rightarrow 0$ и при $a \rightarrow \infty$ и т. д.), нужно найти соответствующий лагранжиан $K(X)$. Вместо зависимости от масштабного фактора a удобнее искать зависимость от переменной F (19), считая, что задана функция $\rho(F)$. Подставляя в равенство (24) соотношения (21), (22) и интегрируя по частям, записываем выражение

$$\rho = 2C \int^F \sqrt{X} dF. \quad (26)$$

Поэтому

$$X = \frac{1}{4C^2} (\rho_F)^2. \quad (27)$$

Если найти отсюда обратную зависимость $F = F(X)$, тогда можно получить плотность энергии скалярного поля как функцию X : $\rho = \rho(F(X))$. Аналогично вычисляется давление. После интегрирования по частям из формулы (22) находим

$$p = K = 2C \int^X F d\sqrt{X} = F \rho_F - \rho. \quad (28)$$

Уравнение состояния и выражение для скорости звука в такой среде принимают очень простой вид:

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -1 + \frac{F \rho_F}{\rho}, \quad (29)$$

$$c_s^2 \equiv \frac{dp/dX}{d\rho/dX} = \frac{dp/dF}{d\rho/dF} = \frac{F \rho_{FF}}{\rho_F}. \quad (30)$$

Скорость звука не может быть отрицательной, в противном случае модель неустойчива относительно малых возмущений плотности [14], [15].

Покажем теперь на основе общих формул (28)–(30), что модель k -эссенции типа (13) нельзя использовать в РТГ в качестве модели темной энергии, а в рамках ОТО она вполне жизнеспособна.

3. МОДЕЛЬ k -ЭССЕНЦИИ В РТГ

В первых работах по РТГ [4], [5], в которых была обоснована необходимость введения квинтэссенции, представляющей темную энергию, ее плотность была выбрана в простейшем степенном виде

$$\rho(F) = F^\nu \quad (31)$$

для того, чтобы она определялась только одной константой ν такой, что $\omega = -1 + \nu$, а также для того, чтобы выполнялось условие, гарантирующее наличие точки поворота для больших значений масштабного фактора: $\rho(0) = 0$. В нашей работе [6] была предложена конкретная модель лагранжиана скалярного поля k -эссенции типа (13), которая дает плотность (31). Используя формулы (27), (28) для обратной задачи, легко найти лагранжиан K :

$$\begin{aligned} K &= F\rho_F - \rho = (\nu - 1)F^\nu, \\ X &= \frac{1}{4C^2}(\rho_F)^2 = \frac{\nu^2}{4C^2}F^{2(\nu-1)}, \quad F = \left(\frac{4C^2}{\nu^2}X\right)^{1/2(\nu-1)}, \\ K &= -\epsilon X^{\nu/2(\nu-1)}, \quad \epsilon = (1 - \nu)\left(\frac{4C^2}{\nu^2}\right)^{\nu/2(\nu-1)}, \quad \nu \neq 0, 1, \end{aligned} \quad (32)$$

что совпадает с формулой (14).

К сожалению, модель (31) неустойчива, так как квадрат скорости звука для всех значений F отрицателен:

$$c_s^2 = \frac{F\rho_{FF}}{\rho_F} = \nu - 1 < -\frac{1}{3}.$$

Ограничение сверху на параметр ν вида $\nu < 2/3$ является следствием космологического ускорения в настоящее время.

Покажем, что и любой другой лагранжан типа (13) либо явно противоречит данным наблюдений, либо приводит к неустойчивостям.

Функция $\rho = \rho(F)$ должна быть монотонной, поэтому ее первая производная должна быть неотрицательной, $\rho_F \geq 0$. В силу условия $c_s^2 \geq 0$ из выражения (30) следует, что и вторая производная также должна быть неотрицательной, $\rho_{FF} \geq 0$. Таким образом, функция $\rho = \rho(F)$ должна быть растущей (с ростом F) функцией, не имеющей перегибов. Отсюда сразу следует, что в рамках ОТО ее нельзя использовать в качестве объединенной модели инфляции (при $a \rightarrow 0$) и темной энергии (при $a \rightarrow \infty$), так как инфляционный разлет предполагает примерное постоянство плотности энергии скалярного поля с последующей неизбежной сменой знака ρ_{FF} .

Рассмотрим теперь, какие ограничения накладывает на функцию $\rho(F)$ положительность наблюдаемого значения космологического ускорения и необходимость разворота ($\dot{a} = 0$) при некотором минимальном значении $F_{\min} = \lambda/a_{\max}^3$, необходимое

для того, чтобы не нарушался принцип причинности и существовало предельное значение масштабного фактора $a_{\max} \gg 1$.

Большим значениям масштабного фактора отвечают малые значения переменной F . Не ограничивая общности, положим $\lambda = 1$, так что $F = a^{-3}$, и запишем фридмановские уравнения РТГ (6), (7) в виде

$$\frac{3}{8\pi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \rho_M + \rho - \frac{m^2}{16\pi} \left[1 - \frac{3F^{2/3}}{2\beta^4} + \frac{F^2}{2} \right], \quad (33)$$

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\ddot{a}}{a} = -(\rho_M + \rho + 3p) - \frac{m^2}{8\pi} [1 - F^2]. \quad (34)$$

Плотность темной материи обозначим как

$$\begin{aligned} \rho_M &= \Omega_M \rho_c \frac{a_0^3}{a^3} \equiv AF, \\ \Omega_M &\cong 0.3, \quad \rho_c = \frac{3}{8\pi} H_0^2, \quad A = \text{const.} \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь ρ_c – критическая плотность. Энергией космического микроволнового излучения в рассматриваемой области $a > a_0$, где a_0 – современное значение масштабного фактора, можно пренебречь [16], также как и членом, пропорциональным $F^{2/3}$, поскольку $\beta^4 \geq a_{\max}^4$.

В настоящую эпоху ($a = a_0$, $F = F_0 = a_0^{-3}$, $\rho_F^0 = \rho_F(F_0)$) ускорение положительно ($\ddot{a} > 0$), поэтому из формул (28), (34), (35) находим ограничение

$$AF_0 + 3F_0\rho_F^0 - 2\rho_0 < -\frac{m^2}{8\pi} [1 - F_0^2]. \quad (36)$$

Это соотношение выполняется независимо от величины a_0 .

Наконец, условие существования точки разворота ($a = a_{\max}$) в силу уравнения (33) означает, что для некоторого $F_{\min} = a_{\max}^{-3} \ll 1$ справедливо равенство

$$\rho_{\min} + AF_{\min} = \frac{m^2}{16\pi} \left[1 + \frac{F_{\min}^2}{2} \right]. \quad (37)$$

Как оценить $\rho_{\min}$, если известны ρ_0 и ρ_F^0 ? Обозначим через $\tilde{\rho}(F)$ касательную к кривой плотности $\rho(F)$ в точке F_0 . Эта прямая пересечет вертикальную ось в точке $\tilde{\rho}_{\min}$. По определению касательной

$$\tilde{\rho}(F) = \rho_0 + (F - F_0)\rho_F^0. \quad (38)$$

Поэтому

$$\tilde{\rho}_{\min} = \tilde{\rho}(0) = \rho_0 - F_0\rho_F^0. \quad (39)$$

Космологическое ускорение в настоящую эпоху обеспечивается членами в уравнении (34), отвечающими скалярному полю. Тогда, как следует из формул (28) и (34), $3F_0\rho_F^0 - 2\rho_0 < 0$. Таким образом, $\tilde{\rho}_{\min} > \rho_0/3 > 0$.

Так как на касательной $\tilde{\rho}_{FF} = 0$, то левее точки F_0 кривая $\rho(F)$ должна лежать выше нее, в противном случае нарушено условие $\rho_{FF} \geq 0$. Поэтому минимум плотности $\rho_{\min} = \rho(0)$ также должен быть строго положительным:

$$\rho_{\min} > \tilde{\rho}_{\min} > 0. \quad (40)$$

Это еще раз подтверждает неприемлемость в РТГ модели темной энергии (14), для которой $\rho_{\min} = 0$.

Из уравнений (37), (39) и условия (40) можно получить неравенство

$$\rho_0 - F_0 \rho_F^0 + A F_{\min} \leq \frac{m^2}{16\pi} \left[1 + \frac{F_{\min}^2}{2} \right].$$

Умножая его на два и складывая с (36), получаем неравенство

$$F_0 \rho_F^0 + A(F_0 + 2F_{\min}) \leq \frac{m^2}{8\pi} \left[F_0^2 + \frac{F_{\min}^2}{2} \right].$$

Так как все слагаемые в левой части положительны, то

$$A F_0 \leq \frac{m^2}{8\pi} \left[F_0^2 + \frac{F_{\min}^2}{2} \right].$$

Отсюда ввиду того, что $F_{\min} < F_0$, вытекает неравенство

$$\frac{m^2}{8\pi} \geq \frac{A F_0}{F_0^2 + F_{\min}^2/2} \geq \frac{2A F_0}{3F_0^2} = \frac{2}{3} \frac{0.3\rho_c}{F_0^2},$$

которое дает сильную оценку снизу на массу гравитона вида $m^2/16\pi a_0^6 \geq 0.1\rho_c$. Рассмотрим теперь этап сжатия, точнее тот его участок, где масштабный фактор уменьшается от значения a_0 . Так как отрицательный член $-m^2/16\pi a^6$ в формуле для плотности (6) на стадии сжатия растет быстрее всего при уменьшении a , то он “догонит” слагаемое с темной материей (пропорциональное a^{-3}) практически сразу, т. е. в этой точке разворота $a_{\min}$ будет иметь такой же порядок, что и a_0 . Поэтому никакой горячей стадии в космологическом сценарии с такой моделью темной энергии быть не может. Это справедливо для любой функции $\rho(F)$, удовлетворяющей вышеперечисленным критериям, что и требовалось доказать.

Таким образом в РТГ возникает необходимость выбрать другую самоогласованную модель квинтэссенции, которая обеспечивала бы космологическое ускорение в настоящую эпоху, а в будущем приводила бы к смене режима расширения ($\dot{a} > 0$) на режим сжатия ($\dot{a} < 0$). Этот последний режим не является зеркальным отражением первого, так как падающие и растущие моды возмущений не являются одинаковыми [17]. Поэтому, кстати, фридмановское решение в РТГ со скалярным полем (14) нестабильно не только на этапе ускорения стадии расширения, но и на этапе сжатия.

Как показал Стейнхардт с соавторами [11], анизотропизации, разрушающей фридмановский сценарий, в режиме сжатия можно избежать, если уравнение состояния лидирующей компоненты вещества удовлетворяет неравенству $\omega > 1$. Такую среду создает скалярное поле $\phi = \phi(\tau)$, представленное обычным лагранжианом

$$L_\phi = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right), \quad (41)$$

но с отрицательным (для $\phi < 0$) потенциалом [9] (так называемый сценарий с экипирозисом)

$$V(\phi) = V_0(1 - e^{-c\phi})F(\phi), \quad (42)$$

где V_0 , $c = \text{const} > 0$, $F(\phi)$ – положительная функция, обеспечивающая выполнение условия $V(\phi) \rightarrow 0$ при $\phi \rightarrow -\infty$ и равная $F(\phi) \cong 1$ правее минимума потенциала. Роль гравитационной постоянной, обеспечивающей сегодняшнее ускорение, в данном случае играет величина $V_0 - m^2/32\pi > 0$. Подробный анализ сценария с экипирозисом в РТГ выходит за рамки настоящей работы и будет рассмотрен отдельно.

4. МОДЕЛЬ k -ЭССЕНЦИИ В ОТО

В рамках ОТО модели с лагранжианами типа (13) вполне жизнеспособны, но, как было показано выше, важно то, что значение $\rho(0)$ должно быть больше нуля, так как только в этом случае соблюдается условие устойчивости $c_s^2 > 0$. Именно величина $\rho(0)$ и играет роль космологической постоянной (темной энергии), приводящей к ускорению. Линейный член (напомним, что здесь рассматривается область больших $a > a_0$, т.е. малых F) при разложении в нуле описывает темную материю [8], [13]:

$$\rho(F) = \rho(0) + \rho_F(0)F. \quad (43)$$

В качестве простейшего примера такой модели можно выбрать следующую:

$$\rho(F) = A + BF + CF^2. \quad (44)$$

Тогда согласно выражению (27) находим, что

$$X = \frac{(B + 2CF)^2}{4C^2}, \quad F = \sqrt{X} - \frac{B}{2C}. \quad (45)$$

Как и следовало ожидать, линейной слагаемое, отвечающее темной материи, не дает вклада в давление (28):

$$p(F) = CF^2 - A, \quad (46)$$

а постоянный член, соответствующий темной энергии, – в скорость звука (30):

$$c_s^2 = \frac{1}{1 + B/2CF}. \quad (47)$$

Так как параметр B определяет плотность темной материи, то $B > 0$. Поэтому из условия $c_s^2 > 0$ следует, что и $C > 0$. Тогда для диапазона $0 < F < \infty$ квадрат скорости звука принимает значения в положительном интервале $0 < c_s^2 < 1$.

Найдем также уравнение состояния (29) и его асимптотику при малых F :

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{A - CF^2}{A + BF + CF^2} \cong -1 + \frac{B}{A}F + \left[\frac{2C}{A} - \left(\frac{B}{A} \right)^2 \right] F^2.$$

Лагранжиан этой модели получаем в виде (13) (не снижая общности отождествляя константы C в (21) и (44))

$$K = p = CX - B\sqrt{X} - A + \frac{B^2}{4C}, \quad (48)$$

впервые рассмотренном в работе [13].

Обратная задача позволяет работать с полями, лагранжиан которых невозможно выписать явно как функцию этих полей. Таким примером является обобщенная модель газа Чаплыгина. На основании общих соотношений обратной задачи (28)–(30) формулы для давления (лагранжиана) и скорости звука в этой модели, задаваемой плотностью [8]

$$\rho(F) = (A + BF^{1+\alpha})^{1/(1+\alpha)}, \quad A, B > 0, \quad (49)$$

получаются тривиальным образом:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad c_s^2 = \frac{1}{1 + (B/2A)F^{1+\alpha}}. \quad (50)$$

Из равенства (27) следует, что при $\alpha \neq 1$ явную зависимость $F = F(X)$ и, соответственно, лагранжиан как функцию X найти невозможно:

$$X = \frac{(BF^\alpha)^2}{4C^2(A + BF^{1+\alpha})^{2\alpha/(1+\alpha)}}.$$

В простом частном случае собственно газа Чаплыгина ($\alpha = 1$) лагранжиан выписывается явно:

$$F(X) = \frac{2C\sqrt{AX}}{\sqrt{B(B - 4C^2X)}}, \quad K(X) = -\sqrt{\frac{A}{B}(B - 4C^2X)}. \quad (51)$$

Очевидно, что скалярное поле должно подчиняться неравенству $\dot{\phi}^2 \leq AB/2C^2$.

Возможна и другая постановка задачи. Пусть задано уравнение состояния среды $p = p(\rho) \equiv f(\rho)$, $df/d\rho > 0$, которую нужно моделировать скалярным полем k -эссенции. В этом случае из закона сохранения вещества (8) находим зависимость $F = F(\rho)$:

$$F = b \exp\left(\int^\rho \frac{d\rho}{\rho + f(\rho)}\right), \quad (52)$$

где $b > 0$ – постоянная интегрирования. Тогда из равенства (27) можно получить связь $X = X(\rho)$:

$$X = \left(\frac{\rho + f(\rho)}{2CF}\right)^2 = \left(\frac{\rho + f(\rho)}{2Cb \exp(\int^\rho \frac{d\rho}{\rho + f(\rho)})}\right)^2. \quad (53)$$

Если существует явная обратная функция $\rho = \rho(X)$, то тогда нетрудно найти лагранжиан (давление) как функцию X . Для обобщенного газа Чаплыгина из формулы (52) получаем, что

$$F = b \exp\left(\frac{1}{1+\alpha} \ln(\rho^{1+\alpha} - A)\right),$$

откуда

$$\rho(F) = (A + BF^{1+\alpha})^{1/(1+\alpha)}, \quad B = b^{-(1+\alpha)},$$

что совпадает с выражением (49). Уравнение (53) в этом случае приводит к равенству

$$X = \left(\frac{(\rho^{1+\alpha} - A)^{\alpha/(1+\alpha)}}{2Cb\rho^\alpha}\right)^2$$

и, вообще говоря, не позволяет найти $\rho(X)$ в явном виде, за исключением случая $\alpha = 1$, когда

$$L_\phi = -\frac{A}{\rho} = -\sqrt{\frac{A}{B}(B - 4C^2X)},$$

что также совпадает с (51).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено скалярное поле квинтэссенции с нетривиальной кинетической частью без потенциала (k -эссенции), развивающейся в плоской фридмановской Вселенной. Решена обратная задача построения Лагранжиана такого скалярного поля исходя из зависимости его плотности энергии от масштабного фактора $\rho = \rho(a)$. Моделирование темной энергии таким скалярным полем в РТГ обеспечивает современное значение космологического ускорения и наличие точки поворота на поздних временах. Показано, что в этой теории любое скалярное поле указанного типа является патологическим либо в силу гравитационной неустойчивости этого решения относительно возмущений с длинами волн, находящимися далеко за космологическим горизонтом, т. е. зависящими только от времени, либо в силу недопустимо быстрого окончания стадии сжатия. В качестве непротиворечивой модели квинтэссенции в РТГ предложена модель Стейнхардта–Турока для скалярного поля с экпирозисом, которая используется в ОТО для построения различных осциллирующих космологических сценариев. Отмечается, что скалярное поле k -эссенции в рамках бесконечного плоского фридмановского решения ОТО жизнеспособно и, более того, может представлять собой модель не только темной энергии, но и темной материи.

Список литературы

- [1] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Ю. В. Чугреев, *Масса гравитона и развитие фридмановской Вселенной*, Изд-во МГУ, М., 1987; *ТМФ*, **74** (1987), 3–15.
- [2] Ю. В. Чугреев, “Принцип Маха для космологических решений в релятивистской теории гравитации”, *Письма в ЭЧАЯ*, **12**:2(193) (2015), 281–298.
- [3] М. А. Мествиришвили, Ю. В. Чугреев, “Фридмановская модель эволюции Вселенной в релятивистской теории гравитации”, *ТМФ*, **80**:2 (1989), 305–312.
- [4] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Н. П. Ткаченко, “Масса гравитона, квинтэссенция и осциллирующий характер эволюции Вселенной”, *ЯФ*, **67**:8 (2004), 1618–1626.
- [5] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, “Космологическая постоянная и пространство Минковского”, *ЭЧАЯ*, **38**:3 (2007), 569–586.
- [6] М. А. Мествиришвили, К. А. Модестов, Ю. В. Чугреев, “Скалярное поле квинтэссенции в релятивистской теории гравитации”, *ТМФ*, **152** (2007), 551–560, arXiv: gr-qc/0612105.
- [7] Ю. В. Чугреев, “Темная энергия и масса гравитона в Ближней Вселенной”, *Письма в ЭЧАЯ*, **13**:1(199) (2016), 66–79.
- [8] R. J. Sherrer, “Purely kinetic k -essence as unified dark matter”, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:1 (2004), 011301, 4 pp., arXiv: astro-ph/0402316.
- [9] P. J. Steinhardt, N. Turok, “A cyclic model of the Universe”, *Science*, **296**:5572 (2002), 1436–1439, arXiv: hep-th/0111030.
- [10] P. J. Steinhardt, N. Turok, “Cosmic evolution in a cyclic universe”, *Phys. Rev. D*, **65**:12 (2002), 126003, 20 pp., arXiv: hep-th/0111098.

- [11] J. K. Erickson, D. H. Wesley, P. J. Steinhardt, N. Turok, “Kasner and mixmaster behavior in universes with equation of state $\omega \geq 1$ ”, *Phys. Rev. D*, **69**:6 (2004), 063514, 11 pp., arXiv: hep-th/0312009.
- [12] A. Ijjas, P. J. Steinhardt, “Classically stable nonsingular cosmological bounces”, *Phys. Rev. Lett.*, **117**:12 (2016), 121304, 5 pp., arXiv: 1606.08880.
- [13] L. P. Chimento, “Extended tachyon field, Chaplygin gas and solvable k -essence cosmologies”, *Phys. Rev. D*, **69**:12 (2004), 123517, 10 pp., arXiv: astro-ph/0311613.
- [14] J. Garriaga, V. F. Mukhanov, “Perturbations in k -inflation”, *Phys. Lett. B*, **458**:2–3, 1999, arXiv: hep-th/9904176.
- [15] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [16] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва*, Ленанд, М., 2016.
- [17] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория*, Красанд, М., 2016.

Поступила в редакцию 26.01.2017

После доработки 7.04.2017