Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, Многоточечные рассеиватели со связанными состояниями при нулевой энергии, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 309–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:04:04

© 2017 г.

П. Г. Гриневич^{*†‡}, Р. Г. Новиков^{§¶||}

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ РАССЕИВАТЕЛИ СО СВЯЗАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ПРИ НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИИ

Исследуются многоточечные рассеиватели со связанными состояниями в трехмерном пространстве при нулевой энергии. Построены примеры таких рассеивателей с кратным нулевым собственным значением или с сильной мультипольной локализацией связанных состояний нулевой энергии.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, многоточечные рассеиватели, связанные состояния, нулевая энергия, локализация.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9349>

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем модель точечных рассеивателей в трехмерном пространстве, восходящую к классическим работам [1]–[4] и детально изложенную в книге [5]. Касательно более поздних результатов по таким моделям см. работы [6]–[8] и дальнейшие ссылки в них. Более точно, мы рассматриваем стационарное уравнение

П. Г. Гриневич был частично поддержан программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и РФФИ (грант № 17-51-150001 “Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения”). Р. Г. Новиков был частично поддержан PRC № 1545 CNRS/RFBR: Équations quasi-linéaires, problèmes inverses et leurs applications.

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: pgg@landau.ac.ru

[†]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

[‡]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

[§]Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, Palaiseau, France.
E-mail: novikov@cmap.polytechnique.fr

[¶]Université Paris Saclay, Paris, France

^{||}Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, Москва, Россия

Шредингера

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

с многоточечным потенциалом (рассеивателем)

$$v(x) = \sum_{j=1}^n v_{z_j, \alpha_j}(x), \quad (2)$$

состоящим из n одноточечных рассеивателей $v_{z_j, \alpha_j}(x)$, где каждый точечный рассеиватель описывается своим положением $z_j \in \mathbb{R}^3$ и внутренним параметром $\alpha_j \in \mathbb{R}$, причем $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$.

В настоящей статье мы исследуем многоточечные рассеиватели, для которых уравнение (1) допускает ненулевые решения $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ при энергии $E = 0$, или, другими словами, мы исследуем многоточечные рассеиватели со связанными состояниями при нулевой энергии. Наш интерес к этой задаче был, в частности, мотивирован исследованием низкоэнергетических эффектов рассеяния в трехмерных задачах. Насколько нам известно, вопрос о связанных состояниях при нулевой энергии для многоточечных рассеивателей ранее не был в достаточной мере рассмотрен в литературе. Кроме того, наши исследования стимулированы работой [9], в которой с помощью техники преобразований Мутара были построены интересные примеры регулярных быстро убывающих на бесконечности потенциалов с хорошо локализованными связанными состояниями при нулевой энергии.

Результаты нашей статьи включают предложение 1, теорему 1 и примеры 1 и 2, приведенные ниже.

2. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С МНОГОТОЧЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Мы говорим, что функция ψ удовлетворяет уравнению (1), если и только если

$$-\Delta\psi(x) = E\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}, \quad (3)$$

и

$$\psi(x) = \frac{\psi_{j,-1}}{|x - z_j|} + \psi_{j,0} + O(|x - z_j|), \quad x \rightarrow z_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где

$$\psi_{j,0} = 4\pi\alpha_j\psi_{j,-1}. \quad (5)$$

В настоящей статье мы используем ту же нормировку многоточечных рассеивателей, что и в книге [5] (см. с. 47, 112).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция $\psi = \psi(x)$ удовлетворяет уравнениям (3)–(5) тогда и только тогда, когда она допускает следующее представление:*

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \sum_{j=1}^n q_j G^+(|x - z_j|, E), \quad (6)$$

где

$$-\Delta\psi_0(x) = E\psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (7)$$

$$G^+(r, E) = -\frac{e^{i\sqrt{E}r}}{4\pi r}, \quad r > 0 \quad (8)$$

(здесь $i = \sqrt{-1}$ и $\sqrt{E} \geq 0$ при $E \geq 0$), и $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$A\vec{q} = \vec{\phi}, \quad (9)$$

где A – $(n \times n)$ -матрица с элементами

$$A_{j,j'} = \begin{cases} \alpha_j - \frac{i\sqrt{E}}{4\pi} & \text{при } j' = j, \\ G^+(|z_j - z_{j'}|, E) & \text{при } j' \neq j \end{cases} \quad (10)$$

и

$$\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T, \quad \phi_j = -\psi_0(z_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Предложение 1 является вариацией утверждений из книги [5].

3. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИИ

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (1) с многоточечным потенциалом v вида (2) допускает ненулевое решение $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ при энергии $E = 0$ тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $\vec{q}$, удовлетворяющий уравнению

$$A\vec{q} = 0 \quad (12)$$

с матрицей A , определенной формулой (10) при $E = 0$, и условию

$$\sum_{j=1}^n q_j = 0. \quad (13)$$

Более того, взаимно однозначное соответствие между решениями ψ и векторами $\vec{q}$ задается формулой

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n q_j \frac{1}{|x - z_j|}. \quad (14)$$

Теорема 1 следует из предложения 1, того факта, что $G^+(\cdot, 0) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, линейной независимости функций $G^+(\cdot - z_j, 0)$, $j = 1, \dots, n$, асимптотической формулы

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} \sum_{j=1}^n q_j + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty \quad (15)$$

для функции ψ вида (14) и следующей леммы.

ЛЕММА 1. Предположим, что ψ_0 удовлетворяет уравнению (7) при $E = 0$ и

$$\psi_0 = \psi_{0,1} + \psi_{0,2}, \quad \psi_{0,1}(x) = o(1) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad \psi_{0,2} \in L^2(\mathbb{R}^3). \quad (16)$$

Тогда $\psi_0 \equiv 0$.

Лемма 1 следует из теоремы о среднем по шарам для гармонических функций, неравенства Коши–Шварца и теоремы Лиувилля для гармонических функций.

В следующем примере мы рассматриваем рассеиватель, состоящий из четырех одинаковых одноточечных рассеивателей, расположенных в вершинах правильного тетраэдра.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 4$, $z_j \in \mathbb{R}^3$, $|z_i - z_j| = s > 0$ при всех $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 4$, $\alpha_j = \alpha = -(4\pi s)^{-1}$ и рассеиватель v задан формулой (2). Тогда $E = 0$ является трехкратным собственным значением для уравнения (1) (т. е. пространство решений уравнения (1) в $L_2(\mathbb{R}^3)$ имеет размерность 3). Это утверждение непосредственно следует из теоремы 1.

В следующем примере мы рассматриваем рассеиватель, состоящий из $2m$ одинаковых одноточечных рассеивателей, расположенных в вершинах плоского правильного $2m$ -угольника.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 2m$, $z_1, \dots, z_{2m} \in \mathbb{R}^3$ – последовательно занумерованные вершины правильного плоского выпуклого $2m$ -угольника,

$$\alpha_j = \alpha = - \sum_{k=2}^{2m} \frac{(-1)^k}{4\pi|z_k - z_1|} \quad (17)$$

и потенциал v задан формулой (2). Тогда

$$\alpha \neq 0 \quad (18)$$

и функция

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{2m} \frac{(-1)^{j+1}}{|x - z_j|} \quad (19)$$

является связанным состоянием при $E = 0$ для уравнения (1);

$$\psi(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{m+1}}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

Данный пример наиболее интересен тем, что связанное состояние при нулевой энергии сильно локализовано при больших m . С другой стороны, этот пример содержателен уже при $m = 1$, когда наш многоугольник сводится к отрезку. При этом наша гипотеза состоит в том, что $E = 0$ является простым собственным значением; мы проверили это численно до $m = 48$ включительно, используя теорему 1.

Свойство (18) следует из формул

$$\alpha = - \sum_{k=2}^{m+1} (-1)^k u_k, \quad u_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi|z_k - z_1|}, & k = 2, \dots, m, \\ \frac{1}{4\pi|z_{m+1} - z_1|}, & k = m+1, \end{cases} \quad (21)$$

$$u_2 > u_3 > \dots > u_{m+1} > 0. \quad (22)$$

Соотношения (17), (19) были получены путем использования уравнения (12), в котором мы положили $q_j = (-1)^{j+1}$, $j = 1, \dots, n$; при этом параметр α был выбран так, чтобы уравнение (12) выполнялось при $\alpha_j = \alpha$, $j = 1, \dots, n$.

Для доказательства условия локализации (20) выберем ортогональные координаты r_0, ω_j , $j = 1, \dots, 2m$, так, что

$$z_j = r_0 \omega_j, \quad r_0 > 0, \quad \omega_j = \left(\cos \frac{\pi(j-1)}{m}, \sin \frac{\pi(j-1)}{m}, 0 \right). \quad (23)$$

Мы имеем

$$\frac{1}{|x - z_j|} = \frac{1}{(R^2 + r_0^2)^{1/2}} \sum_{l=0}^{+\infty} b_l \left(\frac{2r_0 R}{R^2 + r_0^2} \right)^l (\nu \omega_j)^l, \quad R \rightarrow \infty, \quad (24)$$

где

$$R = |x|, \quad \nu = \frac{x}{|x|} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

а θ, ϕ обозначают полярный и азимутальный угол единичного вектора ν . В формуле (24) b_l – коэффициенты ряда

$$(1 - t)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l t^l, \quad |t| < 1. \quad (25)$$

Тем самым

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(R^2 + r_0^2)^{1/2}} \sum_{l=0}^{+\infty} b_l \left(\frac{2r_0 R}{R^2 + r_0^2} \right)^l \left[\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j (\nu \omega_j)^l \right], \quad R \rightarrow \infty, \\ \nu \omega_j &= \sin \theta \cos \left(\phi - \frac{\pi(j-1)}{m} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Условие локализации (20) вытекает из соотношения

$$C_l := \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j (\nu \omega_j)^l = 0, \quad 0 \leq l \leq m-1, \quad (27)$$

которое, в свою очередь, есть следствие формулы

$$C_l = C_l(\theta, \phi) = (\sin \theta)^l \sum_{k=-l}^l c_{lk} e^{ik\phi},$$

где константы c_{lk} зависят от m , и свойства $C_l(\theta, \phi + \pi/m) = -C_l(\theta, \phi)$. Это замечание завершает доказательство утверждений из примера 2.

Благодарности. Работа выполнена во время визита П. Г. Гриневича в Centre de Mathématiques Appliquées (École Polytechnique, Палезо, Франция) осенью 2016 г.

Список литературы

- [1] Н. Bethe, R. Peierls, “Quantum theory of the dipion”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **148**:863 (1935), 146–156.
- [2] E. Fermi, “Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate”, *Ric. Sci.*, **7**:2 (1936), 13–52.
- [3] Я. Б. Зельдович, “Рассеяние сингулярным потенциалом в теории возмущений и в импульсном представлении”, *ЖЭТФ*, **38**:3 (1960), 819–824.
- [4] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, “Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом”, *Докл. АН СССР*, **137**:5 (1961), 1011–1014.
- [5] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Texts and Monographs in Physics, Springer, New York, 1988.

- [6] G. Dell'Antonio, R. Figari, A. Teta, "A brief review on point interactions", *Inverse Problems and Imaging* (Martina Franca, Italy, September 15–21, 2002), Lecture Notes in Mathematics, **1943**, ed. L. L. Bonilla, Springer, Berlin, 2008, 171–189.
- [7] Н. П. Бадалян, В. А. Буров, С. А. Морозов, О. Д. Румянцева, "Рассеяние на акустических граничных рассеивателях с малыми волновыми размерами и их восстановление", *Акуст. журн.*, **55**:1 (2009), 3–10.
- [8] P. G. Grinevich, R. G. Novikov, "Faddeev eigenfunctions for multipoint potentials", *Euras. J. Math. Computer Appl.*, **1**:2 (2013), 76–91, [arXiv: 1110.3157](#).
- [9] И. А. Тайманов, С. П. Царев, "Двумерные операторы Шредингера с быстро убывающим рациональным потенциалом и многомерным L_2 -ядром", *УМН*, **62**:3(375) (2007), 217–218.

Поступила в редакцию 12.10.2016