Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Перенормировка без регуляризации, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 330–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf935>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:17:56

© 1998 г.

В. А. Смирнов*

ПЕРЕНОРМИРОВКА БЕЗ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Дан краткий обзор недавно разработанных перенормировочных схем без регуляризации.

1. Несмотря на то что за время существования теории перенормировок было придумано большое количество перенормировочных схем, продолжают появляться все новые их разновидности. В частности, в последние годы было разработано несколько новых перенормировочных схем без регуляризации¹⁾. Элегантная перенормировочная процедура такого рода предложена Ф.А. Луневым [2]. Она основана на наблюдении, что фейнмановские амплитуды должны удовлетворять некоторой системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Лунев использовал преобразование Фурье от пропагатора в четырехмерном евклидовом пространстве

$$G(x, m) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq \frac{e^{-iqx}}{q^2 + m^2} \quad (1)$$

по двум дополнительным компонентам m_1 и m_2 , представляя квадрат массы m^2 как квадрат двумерного вектора $m = (m_1, m_2)$. Обозначая соответствующие переменные координатного пространства через $y = (y_1, y_2)$, он переходил к безмассовому пропагатору в шестимерном пространстве

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (2)$$

который удовлетворяет уравнению

$$(\square_x + \square_y)G(x, y) = -\delta^{(4)}(x)\delta^{(2)}(y). \quad (3)$$

В случае произвольной фейнмановской амплитуды такое преобразование Фурье вводится для каждой массивной линии, и в результате удается полностью охарактеризовать неперенормированную фейнмановскую амплитуду некоторой системой дифференциальных уравнений. Решение такой системы и задает соответствующую перенормированную фейнмановскую амплитуду, а присущий любой перенормировочной процедуре произвол проявляется в неоднозначности решения этих уравнений.

¹⁾ Хорошо известный классический пример схемы без регуляризации – перенормировка Боголюбова–Парасюка–Хеппа–Циммермана [1].

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: smimov@theory.npi.msu.su

Общие перенормировочные предписания были сформулированы в работе [3], а в работе [4] Лунев применил свою перенормировку для вычисления массивных фейнмановских интегралов. В частности, он получил новое представление для диаграммы “восходящего солнца”.

2. Другой пример явно четырехмерной перенормировочной схемы – дифференциальная перенормировка. Хотя первая ее версия предложена сравнительно недавно в работе [5], идея этой перенормировки неявно содержалась уже в самых ранних работах Боголюбова и Парасюка. Дифференциальная перенормировка основана на представлении произведения пропагаторов в координатном пространстве через производные некоторого порядка от локально интегрируемых функций. Тем самым за счет такой процедуры явно реализуется продолжение этого произведения, рассматриваемого как обобщенная функция от координат, с пространства основных функций, обращающихся в нуль в некоторой окрестности совпадения координат, на все пространство основных функций.

Например, однопетлевая скалярная безмассовая диаграмма в координатном пространстве выражается как квадрат пропагатора $1/x^2$. При $x \neq 0$ имеет место равенство

$$\frac{1}{(x^2)^2} = -\frac{1}{4} \square \frac{\ln \mu^2 x^2}{x^2} \quad (4)$$

(здесь и далее μ – массивный параметр, который учитывает конечный произвол перенормировки). Левая часть этого равенства определена как функционал не на всем пространстве основных функций, а только на функциях, обращающихся в нуль при $x = 0$. Правая же часть выражена через производные от локально интегрируемой функции и тем самым допускает естественное определение как обобщенная функция, если эти производные понимать в смысле теории обобщенных функций. По определению дифференциально перенормированная фейнмановская амплитуда задается правой частью соотношения (4), т.е.

$$R \frac{1}{(x^2)^2} = -\frac{1}{4} \square \frac{\ln \mu^2 x^2}{x^2}, \quad (5)$$

где на этот раз координата x уже произвольна.

Согласно предписаниям авторов первой версии этой перенормировочной схемы [5, 6] перенормировка произвольной диаграммы сводится к случаю диаграмм, зависящих от одной разности координат, а затем применяются соотношения типа (5). В работе [7] эти предписания были дополнены простыми правилами, позволяющими избежать появления инфракрасных (ИК) расходимостей на этапе сведения задачи к случаю двухточечных диаграмм.

В работе [8] предложена вторая версия дифференциальной перенормировки, которая вместо оператора $\square$ использует другой дифференциальный оператор

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} x_i - \frac{1}{2} \sum_l m_l \frac{\partial}{\partial m_l} \quad (6)$$

и основана на свойствах однородности фейнмановских амплитуд по импульсам (координатам) и массам.

Например, в случае однопетлевой безмассовой диаграммы та же самая стратегия явной реализации перенормировки как продолжения функционалов приводит к такому перенормированному выражению:

$$R \frac{1}{(x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\ln \mu^2 x^2}{x^4}. \quad (7)$$

В рамках этой версии нет необходимости сводить задачу к перенормировке двухточечных диаграмм и тем самым все вершины рассматриваются равноправно. Кроме того, такая перенормировка допускает простое обобщение на случай ненулевых масс. Общие предписания этой перенормировки, применимые к произвольному графу, описаны в работе [9], где также охарактеризован статус принципа действия и показано, что некоторые постоянные, естественно возникающие в рамках данной перенормировочной процедуры, непосредственно связаны с ренормгрупповыми функциями.

3. Более гибкий вариант дифференциальной перенормировки описан в работе [10]. Его предписания формулируются практически одинаково в координатном и импульсном пространствах, причем импульсное пространство оказывается предпочтительным для перенормировки головастиков и диаграмм, в которых вставка контрчленов порождает головастики. Как и в предыдущем варианте, перенормировка сводится к выделению (в описанном выше смысле) оператора (6) и дуального ему оператора дилатации

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \sum_l m_l \frac{\partial}{\partial m_l} \quad (8)$$

(по определению он действует *перед* интегрированием по петлевым импульсам) и введению в диаграмму некоторой логарифмической зависимости.

Для простейших логарифмически расходящихся диаграмм дифференциальная перенормировка в импульсном пространстве была сформулирована в работе [11]. В частности, для однопетлевой безмассовой фейнмановской диаграммы имеем следующее перенормировочное предписание:

$$R \int d^4 k \frac{1}{k^2 (q-k)^2} = \int d^4 k \ln \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{k^2 (q-k)^2} = \pi^2 \left(1 - \ln \left(\frac{q^2}{\mu^2} \right) \right). \quad (9)$$

Производная по q применяется перед интегрированием, так что соответствующий интеграл оказывается сходящимся. Результат в правой части (9) получается с помощью введения вспомогательной аналитической регуляризации и применения четырехмерной формулы однопетлевого интегрирования.

В работе [10] сформулированы общие предписания, пригодные для произвольной диаграммы, и на основе этой версии дифференциальной (однородной) перенормировки построена перенормировочная процедура, в рамках которой калибровочная инвариантность в абелевом случае обеспечивается автоматически (т.е. без “подгонки” конечных контрчленов)²⁾.

²⁾См. также работы [12, 13], где дифференциальная перенормировка формулировалась таким образом, чтобы обеспечить калибровочную инвариантность в абелевых теориях на однопетлевом уровне.

4. Как показано в работах [14], дифференциальную перенормировку и ее ИК-аналог ($\tilde{R}$ -операцию) можно применить для того, чтобы сформулировать четырехмерный вариант интегрирования по частям [15] в рамках размерной регуляризации [16,17], представляющий собой один из наиболее мощных методов вычисления диаграмм Фейнмана. В случае размерной перенормировки соответствующий ИК-аналог был описан в работах [18]. Эта операция $\tilde{R}$ удаляет ИК-расходимости вполне аналогично тому, как обычная размерная перенормировка удаляет ультрафиолетовые (УФ) расходимости. Когда она объединяется с самой R -операцией, получается так называемая R^* -операция [18] ($R^* = \tilde{R}R$), которая успешно применяется в ренормгрупповых вычислениях и асимптотических разложениях фейнмановских интегралов в различных пределах импульсов и масс.

Дифференциальную $\tilde{R}$ -операцию в импульсном пространстве можно определить способом, совершенно аналогичным тому, каким дифференциальная перенормировка определяется в координатном пространстве³⁾. Для простейшего ИК-расходящегося подграфа, состоящего из двух последовательных безмассовых скалярных линий, которые порождают неинтегрируемый множитель $1/k^4$, имеем следующее предписание:

$$\tilde{R} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} k \left(\frac{\ln \frac{k^2}{\tilde{\mu}^2}}{k^4} \right). \quad (10)$$

Так, например, для однопетлевого ИК-расходящегося фейнмановского интеграла получаем следующее " $\tilde{R}$ -нормированное" выражение:

$$\tilde{R} \int d^4k \frac{1}{k^4(q-k)^2} = \int d^4k \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\ln \frac{k^2}{\tilde{\mu}^2}}{k^4} \right) \frac{1}{(q-k)^2}. \quad (11)$$

Производная в (10) и в этой формуле понимается в смысле теории обобщенных функций. Вычисляя интеграл в (11) с помощью введения вспомогательной аналитической регуляризации, приходим к следующему результату:

$$\tilde{R} \int d^4k \frac{1}{k^4(q-k)^2} = \pi^2 \frac{1}{q^2} \left(1 + \ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} \right). \quad (12)$$

Похожие интегралы с дополнительными логарифмами тоже вычисляются с помощью аналитической регуляризации и формулы однопетлевого интегрирования, например

$$\begin{aligned} \tilde{R} \int d^4k \frac{\ln \left(\frac{(q-k)^2}{\mu^2} \right)}{k^4(q-k)^2} &= \int d^4k \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\ln \frac{k^2}{\tilde{\mu}^2}}{k^4} \right) \frac{\ln \frac{(q-k)^2}{\mu^2}}{(q-k)^2} = \\ &= \pi^2 \frac{1}{q^2} \ln \frac{q^2}{\mu^2} \left(\ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} + 1 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} \int d^4k \frac{\ln \left(\frac{(q-k)^2}{\mu^2} \right) \ln \frac{k^2}{\tilde{\mu}^2}}{k^4(q-k)^2} &= \int d^4k \left(\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\ln^2 \frac{k^2}{\tilde{\mu}^2}}{k^4} \right) \frac{\ln \frac{(q-k)^2}{\mu^2}}{(q-k)^2} = \\ &= \pi^2 \frac{1}{q^2} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \left(1 + \ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} \right) + 2\zeta(3) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

³⁾ Точнее говоря, УФ-перенормировочные предписания в координатном пространстве, сформулированные в работах [8–11], переформулируются в виде "ИК-перенормировочных" предписаний в импульсном пространстве с использованием УФ–ИК-аналогии (как это делалось в случае размерной $\tilde{R}$ -операции, см. [18]).

Рис. 1. Базисная двухпетлевая (а) и типичная трехпетлевая (б) диаграммы.

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана.

Поясним на двух примерах, как работает метод четырехмерного интегрирования по частям (детали см. в [14]). Чтобы вычислить базисную двухпетлевую диаграмму (рис. 1а) в точности в четырех измерениях

$$J(q) = \iint \frac{d^4k d^4l}{k^2(k-q)^2(k-l)^2l^2(l-q)^2}, \quad (15)$$

применим четырехмерное интегрирование по частям (но с дополнительным логарифмом):

$$\iint d^4k d^4l \frac{\partial}{\partial l_\alpha} \left\{ \frac{(k-l)_\alpha \ln \frac{l^2}{\mu^2}}{k^2(k-q)^2(k-l)^2l^2(l-q)^2} \right\} = 0. \quad (16)$$

После этого приходим к соотношению

$$\begin{aligned} J(q) = & R \int d^4k \frac{1}{k^2(q-k)^2} \tilde{R} \int d^4l \frac{\ln \frac{(q-l)^2}{\mu^2}}{l^2(q-l)^4} + \\ & + R \int d^4k \frac{1}{k^2(q-k)^2} \tilde{R} \int d^4l \frac{\ln \frac{l^2}{\mu^2}}{l^2(q-l)^4} - R^* \iint d^4k d^4l \frac{\ln \frac{l^2}{\mu^2}}{k^2(k-l)^2l^2(q-l)^4} - \\ & - R^* \iint d^4k d^4l \frac{\ln \frac{(l-q)^2}{\mu^2}}{k^2(k-l)^2l^2(q-l)^4}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для вычисления присутствующих рекурсивно-однопетлевых фейнмановских интегралов используются соотношения (12)–(14) и им аналогичные. В результате приходим к хорошо известному значению [19]

$$J(q) = 6\zeta(3) \frac{\pi^4}{q^2}. \quad (18)$$

В качестве второго примера рассмотрим типичную трехпетлевую диаграмму, изображенную на рис. 1б,

$$J(q) = \iiint d^4k d^4l d^4r I(p_1, \dots, p_7). \quad (19)$$

Как и в двухпетлевом случае, начнем с интегрирования по частям со вспомогательным логарифмом:

$$\iiint d^4k d^4l d^4r \left(\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_4} \right) p_4 \ln \left(\frac{p_1^2}{\mu^2} \right) I(p_1, \dots, p_7) = 0. \quad (20)$$

В результате исходная диаграмма оказывается выраженной согласно соотношению, изображенному на рис. 2, где расходимости диаграмм в правой части устранены с помощью дифференциальной перенормировки (эти расходимости заблаговременно устраняются, перед тем как полученный интеграл разбивается на сумму от интегралов); точка на линии указывает на вторую степень соответствующего пропагатора, а штрих – на наличие логарифма.

Рис. 2. Вычисление диаграммы рис. 1б.

Шесть диаграмм в правой части вычисляются с помощью формул однопетлевого интегрирования с учетом двухпетлевой базисной диаграммы с двумя аналитически регуляризованными линиями (подробнее см. [14]):

$$J_1 = J_2 = 6\zeta(3) \left(1 + \ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \frac{\pi^6}{q^2}, \quad (21)$$

$$J_3 = \left\{ 6\zeta(3) \left(1 + \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) + 3\zeta(3) \ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} \left(\ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\mu^2} + \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) + 10\zeta(5) \right\} \frac{\pi^6}{q^2}, \quad (22)$$

$$J_4 = \left\{ 6\zeta(3) \left(1 + \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) + 3\zeta(3) \ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} \left(\ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\mu^2} + \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) \right\} \frac{\pi^6}{q^2}, \quad (23)$$

$$J_5 = \left\{ 6\zeta(3) \ln \frac{q^2}{\mu^2} \left(\ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} + 1 \right) + 20\zeta(5) \right\} \frac{\pi^6}{q^2}, \quad (24)$$

$$J_6 = \left\{ 6\zeta(3) \ln \frac{q^2}{\mu^2} \left(\ln \frac{q^2}{\tilde{\mu}^2} + 1 \right) + 10\zeta(5) \right\} \frac{\pi^6}{q^2}. \quad (25)$$

Подставляя эти выражения в формулу (19), приходим к известному результату [20]

$$J = J_1 - J_2 + J_3 - J_4 + J_5 - J_6 = 20\zeta(5) \frac{\pi^6}{q^2}. \quad (26)$$

Рассмотренные примеры показывают, что четырехмерное интегрирование по частям в сочетании с дифференциальными R - и $\tilde{R}$ -операциями оказывается удобным методом вычисления фейнмановских диаграмм точно в четырех измерениях.

5. Отметим, что в работе [21] описана еще одна перенормировочная схема без регуляризации, названная автором естественной и по своему духу весьма близкая к дифференциальной. Самá же дифференциальная перенормировка успешно применялась на

практике (см. работы [22]). Подчеркнем, что дифференциальная перенормировка и другие явно четырехмерные перенормировочные схемы в первую очередь предназначены для применения в тех ситуациях, в которых наиболее удобная на практике размерная перенормировка встречается трудности, например в теориях с киральной симметрией и суперсимметрией.

Эта работа поддержана РФФИ, грант № 96-01-00726.

Список литературы

- [1] *N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk.* Acta Math. 1957. V. 97. P. 227; *K. Hepp.* Commun. Math. Phys. 1966. V. 2. P. 301; *W. Zimmermann.* Commun. Math. Phys. 1969. V. 15. P. 208.
- [2] *F. A. Lunev.* Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 6589.
- [3] *F. A. Lunev.* Renormalization without regularization and *R*-operation. In: Proc. of the IX Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory, Zvenigorod, Sept. 1994. M.: Moscow State Univ. Press. P. 292; hep-th/9412121.
- [4] *F. A. Lunev.* Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 7735.
- [5] *D. Z. Freedman, K. Johnson, J. I. Latorre.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 353.
- [6] *J. I. Latorre, C. Manuel, X. Vilasís Cardona.* Ann. Phys. 1994. V. 231. P. 149.
- [7] *V. A. Smirnov.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 427. P. 325.
- [8] *О. И. Завьялов, В. А. Смирнов.* ТМФ. 1993. Т. 96. С. 288.
- [9] *V. A. Smirnov.* Z. Phys. C. 1995. V. 67. P. 531.
- [10] *V. A. Smirnov.* Int. J. Mod. Phys. A. 1997.
- [11] *О. И. Завьялов.* ТМФ. 1994. Т. 98. С. 536.
- [12] *О. И. Завьялов, Г. А. Кравцова, А. М. Малокостов.* ТМФ. 1996. Т. 107. С. 64.
- [13] *F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz-Tapia, M. Perez-Victoria.* Constraining differential renormalization in Abelian gauge theories. Preprint UG-FT-73-97. Barcelona: Univ. Barcelona Press, 1997; hep-th/9709067.
- [14] *В. А. Смирнов.* ТМФ. 1996. Т. 108. С. 129; *Г. А. Кравцова, В. А. Смирнов.* ТМФ. 1997. V. 112. P. 115.
- [15] *K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 192. P. 159.
- [16] *G. 't Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189; *C. G. Bollini, J. J. Giambiagi.* Nuovo Cimento B. 1972. V. 12. P. 20.
- [17] *P. Breitenlohner, D. Maison.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 52. P. 11, 39, 55.
- [18] *K. G. Chetyrkin, V. A. Smirnov.* Phys. Lett. B. 1984. V. 144. P. 419; *В. А. Смирнов, К. Г. Четыркин.* *R**-операция. Препринт НИИЯФ МГУ 89-2/79. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [19] *J. L. Rosner.* Ann. Phys. 1967. V. 44. P. 11.
- [20] *K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachov.* Nucl. Phys. B. 1980. V. 174. P. 345.
- [21] *O. Schnetz.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 738.
- [22] *G. Dunne, N. Rius.* Phys. Lett. B. 1992. V. 293. P. 367; *D. Z. Freedman, G. Grignani, K. Johnson, N. Rius.* Ann. Phys. 1992. V. 218. P. 75; *D. Z. Freedman, K. Johnson, R. Muñoz-Tapia, X. Vilasís-Cardona.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 395. P. 454; *D. Z. Freedman, G. Lozano, N. Rius.* Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 1054; *P. E. Haagensen.* Mod. Phys. Lett. A. 1992. V. 7. P. 893; *P. E. Haagensen, J. I. Latorre.* Phys. Lett. B. 1992. V. 283. P. 293; Ann. Phys. 1993. V. 221. P. 77; *C. Manuel.* Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 3223; *R. Muñoz-Tapia.* Phys. Lett. B. 1992. V. 295. P. 95; *J. Comellas, P. E. Haagensen, J. I. Latorre.* Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2819; *M. Chaichian, W. F. Chen, H. C. Lee.* Phys. Lett. B. 1997. V. 409. P. 325; *Y.-H. Chen, M.-T. He, S.-L. Nyeo.* Chin. J. Phys. 1996. V. 34. P. 1129; *S.-L. Nyeo.* Chin. J. Phys. 1996. V. 34. P. 874; *F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz-Tapia, M. Perez-Victoria.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 504. P. 532; *F. del Aguila, M. Perez-Victoria.* Acta Phys. Pol. B. 1997. V. 28. P. 2279; *F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz-Tapia, M. Perez-Victoria.* Supersymmetric calculations with component fields in differential renormalization. hep-ph/9711474; *D. Prange.* Causal perturbation theory and differential renormalization. Preprint DESY-97-211. Hamburg: DESY, 1997; hep-th/9710225.

Поступила в редакцию 14.IV.98 г.