Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, Разности идемпотентов в C^* -алгебрах и квантовый эффект Холла, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 1, 75–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:12:12

© 2018 г.

А. М. Бикчентаев*

РАЗНОСТИ ИДЕМПОТЕНТОВ В C^* -АЛГЕБРАХ И КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Пусть φ – след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ – идеал определения следа φ . Получен C^* -аналог квантового эффекта Холла: если $P, Q \in \mathcal{A}$ – идемпотенты и $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi((P - Q)^{2n+1}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть изометрия $U \in \mathcal{A}$ и $A = A^* \in \mathcal{A}$ такие, что $I + A$ обратим и $U - A \in \mathfrak{M}_\varphi$ с $\varphi(U - A) \in \mathbb{R}$. Тогда $I - A, I - U \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(I - U) \in \mathbb{R}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\dim \mathcal{H} = 2n + 1$, операторы симметрии $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $W = U - V$. Тогда оператор W не является симметрией и, если $V = V^*$, оператор W не унитарен.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, идемпотент, симметрия, проектор, унитарный оператор, ядерный оператор, C^* -алгебра, след, квантовый эффект Холла.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9351>

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть P, Q – идемпотенты в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Различные свойства (обратимость, фредгольмовость, ядерность, положительность и др.) разности $X = P - Q$ были исследованы в работах [1]–[6]. Каждый трипотент ($A = A^3$) является разностью $P - Q$ некоторых идемпотентов P и Q с $PQ = QP = 0$ (см. [7], предложение 1). Поэтому трипотенты наследуют некоторые свойства идемпотентов [8]. Если X является ядерным оператором, то следы всех нечетных степеней X совпадают:

$$\mathrm{tr}(P - Q) = \mathrm{tr}((P - Q)^{2n+1}) = \dim \ker(X - I) - \dim \ker(X + I) \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где I – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Если X является компактным оператором, то правая часть (1) дает естественную “регуляризацию” для следа и показывает, что это всегда целое число [5], [6].

Работа поддержана РФФИ, правительством Республики Татарстан (проект № 15-41-02433) и субсидиями, выделенными Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.1515.2017/4.6 и 1.9773.2017/8.9).

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия.
E-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Пары идемпотентов играют важную роль в квантовом эффекте Холла [9]. Для идемпотентов P, Q, R с ядерными операторами $P - Q$ и $Q - R$ из равенства $\text{tr}(P - Q) = \text{tr}(P - R) + \text{tr}(R - Q)$ и (1) имеем

$$\text{tr}((P - Q)^3) = \text{tr}((P - R)^3) + \text{tr}((R - Q)^3). \quad (2)$$

Физическое понимание аддитивности в равенстве (2) приходит из интерпретации $\text{tr}((P - Q)^3)$ как *проводимости Холла*. Аддитивность (кубического) уравнения (2) может быть рассмотрена как вариант закона Ома об аддитивности проводимости [10].

В нашей работе получен C^* -аналог квантового эффекта Холла (теорема 1) и доказана вещественность следа разностей широкого класса симметрий из унитарной C^* -алгебры (следствия 2 и 3). Показано, что в полной матричной алгебре $M_n(\mathbb{C})$, где n нечетно, разность симметрий не может быть симметрией (теорема 3).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

C^* -алгеброй называется комплексная банахова $*$ -алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для унитарной C^* -алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\text{id}}$, $\mathcal{A}^{\text{sa}}$, $\mathcal{A}^{\text{sym}}$, $\mathcal{A}^{\text{u}}$, $\mathcal{A}^{\text{pt}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества идемпотентов, эрмитовых элементов, симметрий, унитарных элементов, проекторов и положительных элементов соответственно. Если I – единица алгебры $\mathcal{A}$ и $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то $P^\perp = I - P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. W^* -алгеброй называется C^* -алгебра $\mathcal{A}$, имеющая преддвойственное банахово пространство $\mathcal{A}_*$: $\mathcal{A} \simeq (\mathcal{A}_*)^*$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$ -алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Любую C^* -алгебру можно реализовать как C^* -подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (теорема Гельфанда–Наймарка; см. [11], теорема 3.4.1).

Следом на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi: \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, +\infty]$, что $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$. Для следа φ определим

$$\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{A}^+ : \varphi(X) < +\infty\}, \quad \mathfrak{M}_\varphi^{\text{sa}} = \lim_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}_\varphi^+, \quad \mathfrak{M}_\varphi = \lim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi$, который будем обозначать той же буквой φ . Такое продолжение позволяет отождествлять конечные следы (т. е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$) с положительными функционалами на $\mathcal{A}$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ЛЕММА 1 ([12], лемма 1). Пусть φ – след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$, элементы $A, B \in \mathcal{A}$ такие, что $A - B \in \mathfrak{M}_\varphi$. Тогда $AB - BA \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(AB - BA) = 0$.

ЛЕММА 2 ([12], теорема 3). Пусть φ – след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$ и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ – след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$ и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi((P - Q)^{2n+1}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Покажем, что

$$(P - Q)^{2n+1} = P - Q + \lambda_1(PQP - QPQ) + \cdots + \lambda_n(\underbrace{PQP \dots QP}_{2n+1} - \underbrace{QPQ \dots PQ}_{2n+1}) \quad (3)$$

с некоторыми $\lambda_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$(P - Q)^3 = P - Q - (PQP - QPQ) \quad (4)$$

и равенство (3) выполнено с $\lambda_1 = -1$. Пусть равенство (3) выполнено для $k = n$; покажем его справедливость для $k = n + 1$. Заметим, что $(P - Q)^{2n+3} = (P - Q)(P - Q)^{2n+1}(P - Q)$ и

$$\begin{aligned} (P - Q)(\underbrace{PQP \dots QP}_{2m+1} - \underbrace{QPQ \dots PQ}_{2m+1})(P - Q) &= \\ &= (\underbrace{PQP \dots QP}_{2m+1} - \underbrace{QPQ \dots PQ}_{2m+1}) - (\underbrace{PQP \dots QP}_{2m+3} - \underbrace{QPQ \dots PQ}_{2m+3}) \end{aligned}$$

для всех $m = 1, 2, \dots, n - 1$. Таким образом, равенство (3) установлено.

Шаг 2. Покажем, что

$$X_m \equiv \underbrace{PQP \dots QP}_{2m+1} - \underbrace{QPQ \dots PQ}_{2m+1} \in \mathfrak{M}_\varphi \quad \text{и} \quad \varphi(X_m) = 0 \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Положим $A = PQ$, $B = \underbrace{QPQ \dots QP}_{2m}$. Тогда

$$X_m = PQ \cdot \underbrace{QPQ \dots QP}_{2m} - \underbrace{QPQ \dots QP}_{2m} \cdot PQ = AB - BA.$$

Далее,

$$\begin{aligned} A - B &= PQ - \underbrace{QPQ \dots QP}_{2m} = \\ &= (P^2Q - QPQ) + (QP \cdot Q^2 - QPQP) + \cdots + (\underbrace{QPQ \dots PQ^2}_{2m-1} - \underbrace{QPQ \dots QP}_{2m}) = \\ &= (P - Q)PQ + QPQ(Q - P) + \cdots + \underbrace{QPQ \dots PQ}_{2m-1}(Q - P) \end{aligned}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_\varphi$ и в силу леммы 1 элемент $AB - BA$ также принадлежит $\mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(AB - BA) = 0$. Из (3) имеем

$$\varphi((P - Q)^{2n+1}) = \varphi(P - Q) + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \cdots + \lambda_n \cdot 0 = \varphi(P - Q)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Осталось заметить, что $\varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$ в силу леммы 2. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть φ – след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$. Если $P, Q, R \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $P - Q, Q - R \in \mathfrak{M}_\varphi$, то

$$\varphi((P - R)^{2n+1}) = \varphi((P - Q)^{2n+1}) + \varphi((Q - R)^{2n+1}) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть φ – след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$. Если $U, V, W \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$ и $U - V, V - W \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(U - V) \in \mathbb{R}$ и

$$\varphi((U - W)^{2n+1}) = \varphi((U - V)^{2n+1}) + \varphi((V - W)^{2n+1}) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула $U = 2P - I$ ($P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$) устанавливает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\text{id}}$ и $\mathcal{A}^{\text{sym}}$. Пусть $V = 2Q - I$ и $W = 2R - I$ с $Q, R \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда

$$\varphi(U - V) = \varphi(2P - 2Q) = 2\varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$$

в силу леммы 2. Для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в силу следствия 1 имеем

$$\begin{aligned} \varphi((U - W)^{2n+1}) &= 2^{2n+1} \varphi((P - R)^{2n+1}) = \\ &= 2^{2n+1} (\varphi((P - Q)^{2n+1}) + \varphi((Q - R)^{2n+1})) = \\ &= \varphi((U - V)^{2n+1}) + \varphi((V - W)^{2n+1}). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие

$$\varphi((P - Q)^3) = \varphi(P - Q) \quad \text{для всех } P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pf}}$$

характеризует следы в классе всех положительных функционалов на W^* -алгебре $\mathcal{A}$: из (4) имеем $\varphi(PQP) = \varphi(QPQ)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{pf}}$, и можно применить теорему 1 из работы [13]. (О других характеристиках следа с помощью соотношений перестановочности проекторов см. работы [14]–[16] и библиографию в них.)

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{J}$ – идеал в унитарной $*$ -алгебре $\mathcal{A}$, изометрия $U \in \mathcal{A}$ (т. е. $U^*U = I$) и оператор $A \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$ такой, что $I + A$ обратим в $\mathcal{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $U - A \in \mathcal{J}$;
- 2) $I - A, I - U \in \mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1 \Rightarrow 2$. Имеем $U^* - A = (U - A)^* \in \mathcal{J}$ и

$$-U^*A + AU = U^*(U - A) - (U^* - A)U \in \mathcal{J}.$$

Следовательно,

$$I - A^2 = (U^* - A)(U + A) - U^*A + AU \in \mathcal{J}, \quad I - A = (I - A^2)(I + A)^{-1} \in \mathcal{J}.$$

Таким образом, $I - U = I - A - (U - A) \in \mathcal{J}$.

$2 \Rightarrow 1$. Имеем $U - A = (I - A) - (I - U) \in \mathcal{J}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть φ – след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$, изометрия $U \in \mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$ такие, что оператор $I + A$ обратим в $\mathcal{A}$ и $U - A \in \mathfrak{M}_\varphi$ с $\varphi(U - A) \in \mathbb{R}$. Тогда $I - A, I - U \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(I - U) \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\dim \mathcal{H} = 2n + 1$. Если $P, Q, R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{id}}$, то $P + Q + R \neq 3I/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P + Q + R = 3I/2$. Тогда для канонического следа имеем $\text{tr}(P) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$\frac{3}{2}(2n + 1) = \text{tr}(P + Q + R) = \text{tr}(P) + \text{tr}(Q) + \text{tr}(R) \in \mathbb{N},$$

т. е. получаем противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\dim \mathcal{H} = 2n + 1$, операторы $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sym}}$ и $W \equiv U - V$. Тогда

- 1) оператор $W \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sym}}$;
- 2) если $V = V^*$, то оператор $W \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{u}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Предположим, что $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sym}}$. Тогда операторы

$$P = \frac{U + I}{2}, \quad Q = \frac{V + I}{2}, \quad R = \frac{W + I}{2}$$

лежат в $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{id}}$ и равенство $U - V = W$ равносильно равенству $2P + 2Q^\perp + 2R^\perp = 3I$, что противоречит лемме 3.

2. Предположим, что $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{u}}$, и пусть

$$U = 2P - I \quad \text{с} \quad P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{id}} \quad \text{и} \quad V = 2Q - I \quad \text{с} \quad Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}.$$

Поскольку

$$\frac{W + 2Q}{2} = P = P^2 = \frac{W^2 + 4Q + 2WQ + 2QW}{4},$$

имеем $2W = W^2 + 2WQ + 2QW$. Умножив обе части этого равенства слева на оператор W^* , получаем

$$2I = W + 2Q + 2W^*QW. \quad (5)$$

Поэтому $2I - W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и $W = W^*$. Следовательно, $W = 2R - I$ с $R = (W + I)/2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$. Из (5) получаем

$$3I = 2R + 2Q + 2W^*QW,$$

что противоречит лемме 3. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\dim \mathcal{H} = 2n + 1$, операторы $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{u}} \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$. Тогда оператор $U - V \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{u}}$.

ПРИМЕР 1. Условие $\dim \mathcal{H} = 2n + 1$ существенно в теореме 2 и следствии 4. Положим $x = 1/2 + \sqrt{3}/16$ и рассмотрим в $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ операторы $U = 2P - I$, $V = 2Q - I$, где

$$P = \begin{pmatrix} x & 1/4 \\ 1/4 & 1 - x \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} x & -1/4 \\ -1/4 & 1 - x \end{pmatrix}.$$

Тогда $P, Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\text{pr}}$ и оператор $U - V$ унитарен.

Список литературы

- [1] J. J. Koliha, V. Rakočević, “Invertibility of the difference of idempotents”, *Linear Multilinear Algebra*, **51**:1 (2003), 97–110.
- [2] J. J. Koliha, V. Rakočević, I. Straškraba, “The difference and sum of projectors”, *Linear Algebra Appl.*, **388** (2004), 279–288.
- [3] J. J. Koliha, V. Rakočević, “Fredholm properties of the difference of orthogonal projections in a Hilbert space”, *Integr. Equ. Oper. Theory*, **52**:1 (2005), 125–134.
- [4] А. М. Бикчентаев, “Об идемпотентных τ -измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана”, *Матем. заметки*, **100**:4 (2016), 492–503.
- [5] J. Avron, R. Seiler, B. Simon, “The index of a pair of projections”, *J. Funct. Anal.*, **120**:1 (1994), 220–237.
- [6] N. J. Kalton, “A note on pairs of projections”, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3), **3**:2 (1997), 309–311.
- [7] А. М. Бикчентаев, R. S. Yakushev, “Representation of tripotents and representations via tripotents”, *Linear Algebra Appl.*, **435**:9 (2011), 2156–2165.
- [8] А. М. Бикчентаев, “Tripotents in algebras: invertibility and hyponormality”, *Lobachevskii J. Math.*, **35**:3 (2014), 281–285.
- [9] J. Bellissard, A. van Elst, H. Schulz-Baldes, “The noncommutative geometry of the quantum Hall effect”, *J. Math. Phys.*, **35**:10 (1994), 5373–5451.
- [10] F. Gesztesy, “From mathematical physics to analysis: a walk in Barry Simon’s mathematical garden. II”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **63**:8 (2016), 878–889.
- [11] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.
- [12] А. М. Бикчентаев, “Разности идемпотентов в C^* -алгебрах”, *Сиб. матем. журн.*, **58**:2 (2017), 243–250.
- [13] А. М. Бикчентаев, “Об одном свойстве L_p -пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана”, *Матем. заметки*, **64**:2 (1998), 185–190.
- [14] А. М. Бикчентаев, “Перестановочность проекторов и характеристика следа на алгебрах фон Неймана”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:6 (2010), 1228–1236.
- [15] А. М. Бикчентаев, “Перестановочность проекторов и характеристика следа на алгебрах фон Неймана. II”, *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 483–494.
- [16] А. М. Бикчентаев, “Commutation of projections and characterization of traces on von Neumann algebras. III”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **54**:12 (2015), 4482–4493.

Поступила в редакцию 9.02.2017