Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Ваджахат А. Риаз, М. Хассан, Преобразование Дарбу для полудискретного уравнения коротких импульсов, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 3, 418–435

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:22:16

© 2018 г.

Х. Ваджахат А. Риаз*, М. Хассан*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ ПОЛУДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

Преобразование Дарбу на решениях полудискретного уравнения коротких импульсов выражено через квазидетерминантные матрицы Дарбу. Также для N -петлевого солитонного решения приведена квазидетерминантная формула. Получено общее выражение для многопетлевого решения через квазидетерминанты. С использованием свойства квазидетерминантов найдены явные решения. В качестве примера вычислены в явном виде одно- и двухпетлевые солитонные решения.

Ключевые слова: дискретные интегрируемые системы, солитоны, преобразование Дарбу, квазидетерминанты.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9352>

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наблюдается рост интереса к изучению дискретных интегрируемых систем и их приложений во многих областях естественных наук и математики. Абловиц и Ладик предложили идею интегрируемой дискретизации линейной системы уравнений вида уравнений Абловица–Каупа–Ньюэла–Сигура (АКНС), связанной с нелинейными интегрируемыми системами. В то же время Хирота ввел дискретизацию интегрируемых нелинейных уравнений посредством билинеаризации и использовал этот метод для построения солитонных решений [1]–[6]. Совсем недавно была предложена дискретизация уравнения коротких импульсов (КИ) с помощью метода Хироты, а также найдены петлевые решения этого уравнения [7], [8].

Уравнение коротких импульсов для скалярной функции $u = u(x, t)$

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx} \quad (1.1)$$

*Department of Physics, University of the Punjab, Lahore, Pakistan.
E-mail: ahmed.phyy@gmail.com, mhassan.physics@pu.edu.pk

впервые было исследовано Шафером и Вайнером в задаче распространения ультракоротких волн в нелинейной оптике [9], [10]. Преобразование годографа от независимых переменных (x, t) к новым переменным (X, T)

$$dX = \omega dx + \frac{1}{2}u^2\omega dt, \quad dT = dt,$$

где $\omega^2 = 1 + (u_x)^2$, преобразует уравнение (1.1) к следующему виду:

$$x_{XT} = -\frac{1}{2}(u^2)_X, \quad (1.2)$$

$$u_{XT} = x_X u, \quad (1.3)$$

где нижние индексы X, T означают производные соответственно по X и T . Уравнение КИ является полностью интегрируемой системой, поскольку оно имеет представление Лакса и обнаруживает много аспектов интегрируемости [11], [12]. Уравнение КИ связано с модифицированным уравнением Кортевега–де Фриза (мКдФ), спаренной бездисперсионной системой и уравнением синус-Гордона с помощью преобразования годографа [7], [8], [13]. К непрерывному уравнению КИ применялись различные методы построения решений, и были найдены петлевые солитонные решения [11], [12], [14]–[17].

Целью данной работы является изучение преобразований Дарбу полудискретного уравнения коротких импульсов (уравнения ПДКИ). Мы выражаем преобразование Дарбу через матрицу Дарбу на решениях пары Лакса, а также на решениях уравнения ПДКИ. Мы показываем, что N -солитонное решение можно выразить через квазидетерминанты. Построены петлевые солитонные решения уравнения ПДКИ и в явном виде вычислены одно- и двухпетлевые решения.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПДКИ

Рассмотрим пару Лакса для полудискретной версии уравнений (1.2), (1.3) [8]

$$\Xi_{j+1}(\lambda) = U_j(\lambda)\Xi_j(\lambda), \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dT}\Xi_j(\lambda) = V_j(\lambda)\Xi_j(\lambda), \quad (2.2)$$

в которых матрицы U_j и V_j имеют вид

$$U_j = I + \lambda(S_{j+1} - S_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_{j+1} - x_j & u_{j+1} - u_j \\ u_{j+1} - u_j & -(x_{j+1} - x_j) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$V_j = W_j + \lambda^{-1}G = \begin{pmatrix} 0 & -u_j/2 \\ u_j/2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где T – непрерывная независимая переменная, а j – дискретный индекс. При этом $x_j(T)$, $u_j(T)$ – скалярные функции, а Ξ_j – собственная матрица размера 2×2 , зависящая от T и спектрального параметра λ . Условие совместности пары Лакса (2.1), (2.2), т.е. равенство $dU_j/dT + U_j V_j - V_{j+1} U_j = 0$, приводит к полудискретной версии уравнений (1.2), (1.3) (см. статьи [7], [8], [13])

$$\frac{d}{dT}(x_{j+1} - x_j) + \frac{u_{j+1} + u_j}{2}(u_{j+1} - u_j) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dT}(u_{j+1} - u_j) - \frac{u_{j+1} + u_j}{2}(x_{j+1} - x_j) = 0. \quad (2.6)$$

Набор переменных (x_j, u_j) представляет собой решение уравнения ПДКИ. В непрерывном пределе имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{j+1} - x_j}{h} \rightarrow x_x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \rightarrow u_x,$$

при этом система уравнений (2.5), (2.6) сводится к непрерывному уравнению КИ (1.2), (1.3).

Можно также записать эквивалентное представление уравнения ПДКИ (2.5), (2.6), используя соответствующую дискретную версию преобразования годографа. Сначала выпишем уравнения (2.5), (2.6) в следующем виде:

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{x_{j+1} - x_j} \right) = \frac{1}{2}(u_{j+1} + u_j) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{x_{j+1} - x_j} \right)^2 (u_{j+1} + u_j), \quad (2.7)$$

а далее, воспользовавшись преобразованием годографа, получаем дискретную версию уравнений (1.1), как это было сделано в работах [7], [8]. В непрерывном пределе уравнение (2.7) можно свести к уравнению КИ (1.1), применяя преобразование годографа к нужному набору переменных.

С помощью первого интеграла $(x_{j+1} - x_j)^2 + (u_{j+1} - u_j)^2 = \text{const}$, который можно получить из определителя матрицы (2.3), уравнения ПДКИ (2.5), (2.6) можно сделать эквивалентными цепочке преобразований Беклунда для мКдФ

$$\frac{d}{dT}(u_{j+1} - u_j) = \frac{1}{2} \sqrt{c - (u_{j+1} - u_j)^2} (u_{j+1} + u_j). \quad (2.8)$$

Матрица (2.4) используется в представлении нулевой кривизны для мКдФ. Она не имеет следа, и поэтому детерминант матрицы (2.3) является константой.

Аналогично, чтобы обеспечить эквивалентность уравнений ПДКИ (2.5), (2.6) и цепочки преобразований Беклунда для уравнения синус-Гордона, введем переменные

$$x_j = x_0 + 2 \sum_{l=0}^{j-1} \cos \frac{\theta_{l+1} + \theta_l}{2}, \quad u_j = -\frac{d}{dT} \theta_j. \quad (2.9)$$

Преобразование (2.9) превращает систему уравнений (2.5), (2.6) в цепочку преобразований Беклунда для уравнения синус-Гордона

$$\frac{d}{dT}(\theta_{j+1} - \theta_j) = 2 \sin \frac{\theta_{j+1} + \theta_j}{2}. \quad (2.10)$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ

Преобразование Дарбу является важным способом построения решений солитонных уравнений (см., например, работы [18]–[20]). Далее мы применяем преобразование Дарбу к паре Лакса (2.1), (2.2) и получаем решения уравнения ПДКИ.

Выразим преобразование Дарбу на паре Лакса (2.1), (2.2) через матрицу Дарбу. Для этого введем (2×2) -матрицу Дарбу $D_j(\lambda)$, которая, действуя на решение Ξ_j пары Лакса (2.1), (2.2), порождает другое решение $\Xi_j[1]$, т. е.

$$\Xi_j(\lambda)[1] = D_j(\lambda) \Xi_j(\lambda). \quad (3.1)$$

Новое решение $\Xi_j[1]$ подчиняется уравнениям Лакса (2.1), (2.2) с матрицами $U_j[1]$ и $V_j[1]$

$$\Xi_{j+1}(\lambda)[1] = U_j(\lambda)[1]\Xi_j(\lambda)[1], \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dT}\Xi_j(\lambda)[1] = V_j(\lambda)[1]\Xi_j(\lambda)[1]. \quad (3.3)$$

Ковариантность пары Лакса относительно преобразования Дарбу порождает преобразование Дарбу матриц U_j и V_j

$$U_j[1] = I[1] + \lambda(S_{j+1} - S_j)[1], \quad (3.4)$$

$$V_j[1] = W_j[1] + \lambda^{-1}G[1]. \quad (3.5)$$

Построим теперь матрицу Дарбу, выразив ее через решения пары Лакса (2.1), (2.2). Для этого возьмем следующий анзац для матрицы Дарбу:

$$D_j(\lambda) = \lambda^{-1}I - \Theta_j, \quad (3.6)$$

где I , Θ_j – соответственно единичная матрица и обратимая (2×2) -матрица, не зависящая от λ . Применяя это преобразование к системе уравнений (3.2), (3.3) и сравнивая коэффициенты перед λ , получаем преобразование Дарбу для матриц S_j и W_j

$$\begin{aligned} S_j[1] &= S_j - \Theta_j, \\ W_j[1] &= W_j + [G, \Theta_j], \\ I[1] &= I, \quad G[1] = G, \end{aligned} \quad (3.7)$$

с матрицей Θ_j , удовлетворяющей следующим условиям:

$$(\Theta_{j+1} - \Theta_j)\Theta_j = (S_{j+1} - S_j)\Theta_j - \Theta_{j+1}(S_{j+1} - S_j), \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dT}\Theta_j = [W_j, \Theta_j] + [G, \Theta_j]\Theta_j. \quad (3.9)$$

Возьмем для нашего случая $\Theta_j = H_j\Lambda^{-1}H_j^{-1}$, где H_j – частное матричное (обратимое) решение пары Лакса (2.1), (2.2). Матрица Λ – постоянная диагональная (2×2) -матрица (матрица собственных значений). Матрицу H_j можно выразить через решения пары Лакса (2.1), (2.2) в виде столбцов $|h_m\rangle_j$, $m = 1, 2$. Столбцы $|h_m\rangle_j$ удовлетворяют уравнениям

$$|h_m\rangle_{j+1} = |h_m\rangle_j + \lambda_m(S_{j+1} - S_j)|h_m\rangle_j, \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dT}|h_m\rangle_j = W_j|h_m\rangle_j + \lambda_m^{-1}G|h_m\rangle_j. \quad (3.11)$$

Для $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ и частного матричного решения H_j пару Лакса (3.10), (3.11) можно записать в виде

$$H_{j+1} = H_j + (S_{j+1} - S_j)H_j\Lambda, \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dT}H_j = W_jH_j + GH_j\Lambda^{-1}, \quad (3.13)$$

где H_j – частное матричное решение при частном выборе диагональной матрицы Λ . Покажем теперь, что при выборе $\Theta_j = H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1}$ выполнены условия (3.8), (3.9). Для этого вычислим

$$\begin{aligned} (\Theta_{j+1} - \Theta_j) \Theta_j &= H_{j+1} \Lambda^{-1} H_{j+1}^{-1} H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1} - H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1} H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1} + \\ &\quad + H_{j+1} \Lambda^{-1} H_j^{-1} H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1} - H_{j+1} \Lambda^{-1} H_{j+1}^{-1} H_{j+1} \Lambda^{-1} H_j^{-1} = \\ &= (H_{j+1} \Lambda^{-1} H_j^{-1} - H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1}) H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1} - \\ &\quad - H_{j+1} \Lambda^{-1} H_{j+1}^{-1} (H_{j+1} \Lambda^{-1} H_j^{-1} - H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1}) = \\ &= (S_{j+1} - S_j) \Theta_j - \Theta_{j+1} (S_{j+1} - S_j), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \Theta_j &= \left(\frac{d}{dT} H_j \right) \Lambda^{-1} H_j^{-1} - H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1} \left(\frac{d}{dT} H_j \right) H_j^{-1} = \\ &= (W_j H_j + G H_j \Lambda^{-1}) \Lambda^{-1} H_j^{-1} - H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1} (W_j H_j + G H_j \Lambda^{-1}) H_j^{-1} = \\ &= [W_j, \Theta_j] + [G, \Theta_j] \Theta_j. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Поскольку матрица Дарбу выражена через частные матричные решения H_j пары Лакса, представляется уместным выразить матрицу Дарбу через квазидетерминанты¹⁾. Матричное решение $\Xi_j[1]$ пары Лакса (2.1), (2.2) можно записать через частные матричные решения H_j в виде квазидетерминантов

$$\begin{aligned} \Xi_j[1] &\equiv D_j(\lambda) \Xi_j = (\lambda^{-1} I - H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1}) \Xi_j = \\ &= \lambda^{-1} \Xi_j + \begin{vmatrix} H_j & \Xi_j \\ H_j \Lambda^{-1} & \boxed{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_j & \Xi_j \\ H_j \Lambda^{-1} & \boxed{\lambda^{-1} \Xi_j} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Аналогично, выражение для $S_j[1]$ можно представить в виде

$$S_j[1] = S_j - H_j \Lambda^{-1} H_j^{-1} = S_j + \begin{vmatrix} H_j & I \\ H_j \Lambda^{-1} & \boxed{0} \end{vmatrix}. \quad (3.17)$$

Полученные результаты можно обобщить для N -кратного преобразования Дарбу. Для этого, полагая $\Lambda = \Lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots, N$), введем обратимые матричные решения $H_{j,m}$ пары Лакса уравнения ПДКИ. N -Кратное матричное решение $S_j[N]$ выражается через квазидетерминанты следующим образом:

$$\begin{aligned} S_j[N] &= S_j - \sum_{m=1}^N H_{j,m}[m-1] \Lambda_m^{-1} (H_{j,m}[m-1])^{-1} = \\ &= S_j + \sum_{m=1}^N \begin{vmatrix} H_{j,m}[m-1] & I \\ H_{j,m}[m-1] \Lambda_m^{-1} & \boxed{0} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

¹⁾В данной работе используются квазидетерминанты, разложенные относительно матрицы размера $n \times n$. Выражение для квазидетерминанта матрицы размера $N \times N$, разложенного относительно матрицы размера $n \times n$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{23} & \boxed{M_{21}} \end{vmatrix} = M_{21} - M_{23} M_{11}^{-1} M_{12}.$$

Дальнейшие подробности, а также свойства квазидетерминантов излагаются, например, в статьях [21], [22].

$$= S_j + \begin{vmatrix} H_{j,1} & H_{j,2} & \cdots & H_{j,N} & 0 \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-1} & H_{j,2}\Lambda_2^{-1} & \cdots & H_{j,N}\Lambda_N^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-(N-1)} & H_{j,2}\Lambda_2^{-(N-1)} & \cdots & H_{j,N}\Lambda_N^{-(N-1)} & I \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-N} & H_{j,2}\Lambda_2^{-N} & \cdots & H_{j,N}\Lambda_N^{-N} & \boxed{0} \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

Доказательство результатов, аналогичных представленных формулами (3.18), методом индукции можно найти, например, в работах [20], [23].

Аналогично, выражение для $\Xi_j[N]$ имеет вид

$$\Xi_j[N] = \begin{vmatrix} H_{j,1} & H_{j,2} & \cdots & H_{j,N} & \Xi_j \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-1} & H_{j,2}\Lambda_2^{-1} & \cdots & H_{j,N}\Lambda_N^{-1} & \lambda^{-1}\Xi_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-(N-1)} & H_{j,2}\Lambda_2^{-(N-1)} & \cdots & H_{j,N}\Lambda_N^{-(N-1)} & \lambda^{-(N-1)}\Xi_j \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-N} & H_{j,2}\Lambda_2^{-N} & \cdots & H_{j,N}\Lambda_N^{-N} & \boxed{\lambda^{-N}\Xi_j} \end{vmatrix}. \quad (3.19)$$

Представляется удобным выписать N -кратное преобразование (3.19) в следующем виде:

$$\Xi_j[N] = \mathcal{T}_j^{(N)} \Xi_j, \quad (3.20)$$

где (2×2) -матрица $\mathcal{T}_j^{(N)}$ является квазидетерминантом

$$\mathcal{T}_j^{(N)} = \begin{vmatrix} \mathcal{H}_j & \widetilde{E}^{(N)} \\ \widehat{\mathcal{H}}_j & \boxed{\lambda^{-N} I} \end{vmatrix}, \quad (3.21)$$

а $\widetilde{E}^{(N)}$, $\widehat{\mathcal{H}}_j$ и $\mathcal{H}_j$ суть матрицы размера $2N \times 2$, $2 \times 2N$ и $2N \times 2N$ соответственно. Эти матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{E}^{(N)} &= (I, \lambda^{-1}I, \dots, \lambda^{-(N-1)}I)^T, \\ \widehat{\mathcal{H}}_j &= (H_{j,1}\Lambda_1^{-N}, H_{j,2}\Lambda_2^{-N}, \dots, H_{j,N}\Lambda_N^{-N}), \\ \mathcal{H}_j &= \begin{pmatrix} H_{j,1} & H_{j,2} & \cdots & H_{j,N} \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-1} & H_{j,2}\Lambda_2^{-1} & \cdots & H_{j,N}\Lambda_N^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-(N-1)} & H_{j,2}\Lambda_2^{-(N-1)} & \cdots & H_{j,N}\Lambda_N^{-(N-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогичным образом можно переписать выражение (3.18) как равенство

$$S_j[N] = S_j + \mathcal{M}_j^{(N)}, \quad (3.23)$$

где (2×2) -матрица $\mathcal{M}_j^{(N)}$ имеет вид

$$\mathcal{M}_j^{(N)} = \begin{vmatrix} \mathcal{H}_j & E^{(N)} \\ \widehat{\mathcal{H}}_j & \boxed{0} \end{vmatrix}, \quad (3.24)$$

а $E^{(N)} = (0, 0, \dots, I)^T$ – матрица размера $2N \times 2$. Матричные элементы матриц $\mathcal{T}_j^{(N)}$ и $\mathcal{M}_j^{(N)}$ можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_j^{(N)})_{pq} &= \left(\left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_j & \widetilde{E}^{(N)} \\ \widehat{\mathcal{H}}_j & \lambda^{-N} I \end{array} \right| \right)_{pq} = \left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_j & \widetilde{E}_q^{(N)} \\ (\widehat{\mathcal{H}}_j)_p & 0 \end{array} \right|, & p \neq q, \quad p, q = 1, 2, \\ (\mathcal{T}_j^{(N)})_{pp} &= \left(\left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_j & \widetilde{E}^{(N)} \\ \widehat{\mathcal{H}}_j & \lambda^{-N} I \end{array} \right| \right)_{pp} = \left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_j & \widetilde{E}_p^{(N)} \\ (\widehat{\mathcal{H}}_j)_p & \lambda^{-N} \end{array} \right|, & p = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_j^{(N)})_{pq} &= \left(\left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_j & E^{(N)} \\ \widehat{\mathcal{H}}_j & 0 \end{array} \right| \right)_{pq} = \left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_j & E_q^{(N)} \\ (\widehat{\mathcal{H}}_j)_p & 0 \end{array} \right|, & p \neq q, \quad p, q = 1, 2, \\ (\mathcal{M}_j^{(N)})_{pp} &= \left(\left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_j & E^{(N)} \\ \widehat{\mathcal{H}}_j & 0 \end{array} \right| \right)_{pp} = \left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_j & E_p^{(N)} \\ (\widehat{\mathcal{H}}_j)_p & 0 \end{array} \right|, & p = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $(\widehat{\mathcal{H}}_j)_p$ является p -й строкой матрицы $\mathcal{H}_j$, а $(\widetilde{E}^{(N)})_q$, $(E^{(N)})_q$ – q -ми столбцами матриц $\widetilde{E}^{(N)}$, $E^{(N)}$ соответственно. Выражения (3.25) и (3.26) можно использовать для явного вычисления преобразования Дарбу на скалярных решениях пары Лакса (2.1), (2.2), а также на скалярных функциях x_j , u_j , которые являются решениями уравнения ПДКИ.

4. ПЕТЛЕВЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПДКИ

В настоящем разделе мы вычисляем преобразования Дарбу на скалярных решениях пары Лакса и на решениях уравнения ПДКИ, а также выражаем эти решения через отношения простых определителей. Чтобы получить преобразование Дарбу на скалярных функциях x_j , u_j уравнения ПДКИ, введем калибровочное преобразование пары Лакса (2.1), (2.2). Для этого определим постоянную матрицу вида

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

при этом матрицы Лакса U_j , V_j преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} U_j &\rightarrow \widehat{U}_j = F^{-1} U_j F = I + \lambda (\widehat{S}_{j+1} - \widehat{S}_j), \\ V_j &\rightarrow \widehat{V}_j = F^{-1} V_j F = \widehat{W}_j + \lambda^{-1} \widehat{G}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\widehat{S}_j = \begin{pmatrix} 0 & x_j + i u_j \\ x_j - i u_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_j = \begin{pmatrix} -u_j/2 & 0 \\ 0 & u_j/2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

После калибровочного преобразования пара Лакса (2.1), (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{j+1} \\ \phi_{j+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix} + \\ &+ \lambda \begin{pmatrix} 0 & x_{j+1} - x_j + i(u_{j+1} - u_j) \\ x_{j+1} - x_j - i(u_{j+1} - u_j) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dT} \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_j/2 & 0 \\ 0 & u_j/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Введем теперь частное решение пары Лакса (4.4), (4.5) в виде вектор-столбца, т.е. $|h_1\rangle_j = \begin{pmatrix} \psi_{j,1} \\ \phi_{j,1} \end{pmatrix}$ при $\lambda = \lambda_1$ и $|h_2\rangle_j = \begin{pmatrix} \psi_{j,1} \\ -\phi_{j,1} \end{pmatrix}$ при $\lambda = -\lambda_1$, при этом (2×2) -матрица H_j выражается через эти решения следующим образом:

$$H_j = (|h_1\rangle_j, |h_2\rangle_j) = \begin{pmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Различные матричные решения $H_{j,m}$ ($m = 1, 2, \dots, N$) пары Лакса для конкретных матриц собственных чисел Λ_m можно представить в виде

$$H_{j,m} = \begin{pmatrix} \psi_{j,m} & \psi_{j,m} \\ \phi_{j,m} & -\phi_{j,m} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 \\ 0 & -\lambda_m \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Далее мы вычисляем преобразование Дарбу на скалярных решениях ψ_j, ϕ_j пары Лакса (4.4), (4.5) и на скалярных функциях x_j, u_j уравнения ПДКИ. Для этого возьмем $N = 1$ и выберем матрицы $\tilde{E}^{(1)}, E^{(1)}, H_{j,1}$ и Λ_1 следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{(1)} = E^{(1)} = I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & H_{j,1} &= \begin{pmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} \end{pmatrix}, \\ \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}, & H_{j,1}\Lambda_1^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставляя выражения (4.8) в систему уравнений (3.20), (3.21) с (3.25), а также в систему (3.23), (3.24) с (3.26), представляем однократное преобразование Дарбу на скалярном решении ψ_j пары Лакса и на скалярной функции x_j уравнения ПДКИ как

$$\begin{aligned} \psi_j[1] &= (\mathcal{T}^{(1)})_{11}\psi_j + (\mathcal{T}^{(1)})_{12}\phi_j = \\ &= \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & 1 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \boxed{\lambda^{-1}} \end{vmatrix} \psi_j + \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & 1 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \boxed{0} \end{vmatrix} \phi_j, \\ x_j[1] &= x_j + \frac{1}{2}((\mathcal{M}^{(1)})_{12} + (\mathcal{M}^{(1)})_{23}) = \\ &= x_j + \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & 1 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \boxed{0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & 1 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \boxed{0} \end{vmatrix} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \phi_j[1] &= \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & 1 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \boxed{0} \end{vmatrix} \psi_j + \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & 1 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \boxed{\lambda^{-1}} \end{vmatrix} \phi_j, \\ u_j[1] &= u_j - \frac{i}{2} \left(\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & 1 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \boxed{0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & 1 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \boxed{0} \end{vmatrix} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

После упрощения выражений однократное преобразование Дарбу (4.9), (4.10) можно выразить через отношения определителей

$$\begin{aligned}\psi_j[1] &= \psi_j^{(1)} - \frac{\psi_{j,1}^{(1)}}{\phi_{j,1}} \psi_j = \frac{\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_j, \phi_j)[1]}{\Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1})}, \\ \phi_j[1] &= \phi_j^{(1)} - \frac{\phi_{j,1}^{(1)}}{\psi_{j,1}} \psi_j = \frac{\Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_j, \phi_j)[1]}{\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1})}, \\ x_j[1] &= x_j - \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_{j,1}^{(1)}}{\phi_{j,1}} + \frac{\phi_{j,1}^{(1)}}{\psi_{j,1}} \right) = x_j - 2 \frac{d}{dT} \ln(\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}) \Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1})), \\ u_j[1] &= u_j + \frac{i}{2} \left(\frac{\psi_{j,1}^{(1)}}{\phi_{j,1}} - \frac{\phi_{j,1}^{(1)}}{\psi_{j,1}} \right) = u_j - 2i \frac{d}{dT} \ln \left(\frac{\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1})}{\Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1})} \right),\end{aligned}\tag{4.11}$$

где $\psi_{j,1}, \phi_{j,1}$ – частные скалярные решения пары Лакса уравнения ПДКИ при $\lambda = \lambda_1$, а Γ_1, Γ_2 – приведенные ниже определители:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}) &= \psi_{j,1}, \quad \Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_j, \phi_j)[1] = \begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_j \\ \psi_{j,1}^{(1)} & \psi_j^{(1)} \end{vmatrix}, \\ \Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}) &= \phi_{j,1}, \quad \Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_j, \phi_j)[1] = \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_j \\ \phi_{j,1}^{(1)} & \phi_j^{(1)} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

где $\psi_j^{(1)} = \lambda^{-1} \psi_j, \phi_j^{(1)} = \lambda^{-1} \phi_j$. Аналогично, двукратные преобразования Дарбу можно получить с помощью повторного применения матрицы Дарбу к скалярным решениям ψ_j, ϕ_j пары Лакса (4.4), (4.5) и к скалярным функциям уравнения ПДКИ.

Матрицы $\tilde{E}^{(2)}, E^{(2)}, H_{j,1}$ и $H_{j,2}$ для двукратного преобразования Дарбу ($N = 2$) выберем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{E}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad E^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ H_{j,1} &= \begin{pmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} \end{pmatrix}, \quad H_{j,2} = \begin{pmatrix} \psi_{j,2} & \psi_{j,2} \\ \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} \end{pmatrix}, \\ \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Выразим матрицы $\mathcal{H}_j$ и $\hat{\mathcal{H}}_j$ через частные скалярные решения $\psi_{j,1}, \phi_{j,1}$ и $\psi_{j,2}, \phi_{j,2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_j &= \begin{pmatrix} H_{j,1} & H_{j,2} \\ H_{j,1}\Lambda_1^{-1} & H_{j,2}\Lambda_2^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \vdots & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \vdots & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} \\ \hline \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \vdots & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \vdots & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathcal{H}}_j &= (H_{j,1}\Lambda_1^{-2}, H_{j,2}\Lambda_2^{-2}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \vdots & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-2}\psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \vdots & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Теперь можно выписать двукратное преобразование Дарбу на решениях ψ_j , ϕ_j пары Лакса и на скалярных функциях x_j , u_j :

$$\begin{aligned}
 \psi_j[2] &= \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} & 1 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & \lambda^{-1} \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & \boxed{\lambda^{-2}} \end{vmatrix} \psi_j + \\
 &+ \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} & 1 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda^{-1} \\ \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & \boxed{0} \end{vmatrix} \phi_j, \\
 \phi_j[2] &= \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} & 1 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & \lambda^{-1} \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \boxed{0} \end{vmatrix} \psi_j + \\
 &+ \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} & 1 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda^{-1} \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \boxed{\lambda^{-2}} \end{vmatrix} \phi_j, \\
 x_j[2] &= x_j + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & 1 \\ \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & \boxed{0} \end{vmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & 1 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \boxed{0} \end{vmatrix}, \\
 u_j[2] &= u_j - \frac{i}{2} \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & 1 \\ \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-2}\psi_{j,2} & \boxed{0} \end{vmatrix} + \\
 &+ \frac{i}{2} \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_{j,2} & 0 \\ \phi_{j,1} & -\phi_{j,1} & \phi_{j,2} & -\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & -\lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & -\lambda_2^{-1}\psi_{j,2} & 1 \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} & 0 \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} & \boxed{0} \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Двукратные преобразования Дарбу на функциях ψ_j , ϕ_j и x_j , u_j после упрощения выражаются через обычные отношения определителей:

$$\begin{aligned}
 \psi_j[2] &= \left(\lambda^{-2} + \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} \end{vmatrix}} \right) \psi_j + \left(-\lambda^{-1} \frac{\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} \end{vmatrix}} \right) \phi_j = \\
 &= \frac{\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2}, \psi_j, \phi_j)[2]}{\Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2})[1]}, \\
 \phi_j[2] &= \left(\lambda^{-2} + \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} \end{vmatrix}} \right) \phi_j + \left(-\lambda^{-1} \frac{\begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} \end{vmatrix}} \right) \psi_j = \\
 &= \frac{\Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2}, \psi_j, \phi_j)[2]}{\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2})[1]}, \\
 x_j[2] &= x_j - \frac{1}{2} \left(\frac{\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} \end{vmatrix}} \right) = \\
 &= x_j - 2 \frac{d}{dT} \ln(\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2})[1] \Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2})[1]), \\
 u_j[2] &= u_j + \frac{i}{2} \left(\frac{\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\psi_{j,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\phi_{j,2} \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} \\ \lambda_1^{-2}\phi_{j,1} & \lambda_2^{-2}\phi_{j,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} \\ \lambda_1^{-1}\psi_{j,1} & \lambda_2^{-1}\psi_{j,2} \end{vmatrix}} \right) = \\
 &= u_j - 2i \frac{d}{dT} \ln \left(\frac{\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2})[1]}{\Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2})[1]} \right).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Новые решения $\psi_j[2]$, $\phi_j[2]$ содержат два частных набора скалярных решений, т. е. $(\psi_{j,1}, \phi_{j,1})$ при λ_1 и $(\psi_{j,2}, \phi_{j,2})$ при λ_2 , а определители Γ_1 и Γ_2 имеют вид

$$\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2})[1] = \begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} \\ \psi_{j,1}^{(1)} & \psi_{j,2}^{(1)} \end{vmatrix}, \tag{4.15}$$

$$\Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2})[1] = \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} \\ \phi_{j,1}^{(1)} & \phi_{j,2}^{(1)} \end{vmatrix},$$

$$\Gamma_1(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2}, \psi_j, \phi_j)[2] = \begin{vmatrix} \psi_{j,1} & \psi_{j,2} & \psi_j \\ \phi_{j,1}^{(1)} & \phi_{j,2}^{(1)} & \phi_j^{(1)} \\ \psi_{j,1}^{(2)} & \psi_{j,2}^{(2)} & \psi_j^{(2)} \end{vmatrix}, \tag{4.16}$$

$$\Gamma_2(\psi_{j,1}, \phi_{j,1}, \psi_{j,2}, \phi_{j,2}, \psi_j, \phi_j)[2] = \begin{vmatrix} \phi_{j,1} & \phi_{j,2} & \phi_j \\ \psi_{j,1}^{(1)} & \psi_{j,2}^{(1)} & \psi_j^{(1)} \\ \phi_{j,1}^{(2)} & \phi_{j,2}^{(2)} & \phi_j^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Аналогичным образом представленные в формулах (4.11) результаты можно расширить и обобщить для N -кратного преобразования Дарбу на решениях ψ_j , ϕ_j и x_j , u_j . Введем обозначения $\Psi_j = (\psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,N})$, $\Phi_j = (\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,N})$ и $\Psi_j^{(N)} = (\psi_{j,1}^{(N)}, \dots, \psi_{j,N}^{(N)}) = (\lambda_1^{-N} \psi_{j,1}, \dots, \lambda_N^{-N} \psi_{j,N})$, $\Phi_j^{(N)} = (\lambda_1^{-N} \phi_{j,1}, \dots, \lambda_N^{-N} \phi_{j,N})$ и запишем соотношения

$$\begin{aligned} \psi_j[N] &= \frac{\Gamma_1(\Psi_j, \Phi_j, \psi_j, \phi_j)[N]}{\Gamma_2(\Psi_j, \Phi_j)[N-1]}, \quad \phi_j[N] = \frac{\Gamma_2(\Psi_j, \Phi_j, \psi_j, \phi_j)[N]}{\Gamma_1(\Psi_j, \Phi_j)[N-1]}, \\ x_j[N] &= x_j - 2 \frac{d}{dT} \ln(\Gamma_1(\Psi_j, \Phi_j)[N-1] \Gamma_2(\Psi_j, \Phi_j)[N-1]), \\ u_j[N] &= u_j - 2i \frac{d}{dT} \ln \left(\frac{\Gamma_1(\Psi_j, \Phi_j)[N-1]}{\Gamma_2(\Psi_j, \Phi_j)[N-1]} \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где определители $\Gamma_1[N]$ и $\Gamma_2[N]$ для нечетного N имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\Psi_j, \Phi_j, \psi_j, \phi_j)[N] &= \begin{vmatrix} \Phi_j & \phi_j \\ \Psi_j^{(1)} & \psi_j^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_j^{(N-1)} & \phi_j^{(N-1)} \\ \Psi_j^{(N)} & \psi_j^{(N)} \end{vmatrix}, \\ \Gamma_2(\Psi_j, \Phi_j, \psi_j, \phi_j)[N] &= \begin{vmatrix} \Psi_j & \psi_j \\ \Phi_j^{(1)} & \phi_j^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \Psi_j^{(N-1)} & \psi_j^{(N-1)} \\ \Phi_j^{(N)} & \phi_j^{(N)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Выпишем также определители для четного N :

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\Psi_j, \Phi_j, \psi_j, \phi_j)[N] &= \begin{vmatrix} \Psi_j & \psi_j \\ \Phi_j^{(1)} & \phi_j^{(1)} \\ \Psi_j^{(2)} & \psi_j^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_j^{(N-1)} & \phi_j^{(N-1)} \\ \Psi_j^{(N)} & \psi_j^{(N)} \end{vmatrix}, \\ \Gamma_2(\Psi_j, \Phi_j, \psi_j, \phi_j)[N] &= \begin{vmatrix} \Phi_j & \phi_j \\ \Psi_j^{(1)} & \psi_j^{(1)} \\ \Phi_j^{(2)} & \phi_j^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ \Psi_j^{(N-1)} & \psi_j^{(N-1)} \\ \Phi_j^{(N)} & \phi_j^{(N)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Уравнение (4.17) представляет собой N -кратное преобразование Дарбу на скалярных решениях ψ_j , ϕ_j пары Лакса и на скалярных функциях x_j , u_j , которые являются решениями уравнения ПДКИ. Поэтому можно сказать, что N -кратное преобразование Дарбу на матричных решениях Ξ_j , S_j выражается через квазидетерми-

Рис. 1. Численное представление полудискретного однопетлевого решения уравнения ПДКИ при $\lambda_1 = -0.26$ и $a = 1.1$.

нанты (см. уравнения (3.20), (3.23)), а преобразование Дарбу на скалярных решениях ψ_j , ϕ_j , x_j , u_j выражается через отношения обычных определителей. Чтобы получить выражения для односолитонного решения, возьмем затравочное решение $x_{j+1} - x_j = a \neq 0$, $u_j = 0$, где a – вещественная постоянная, тогда решения ψ_j , ϕ_j пары Лакса (4.4), (4.5) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\psi_j &= (1 + \lambda a)^j e^{T/4\lambda} + i(1 - \lambda a)^j e^{-T/4\lambda}, \\ \phi_j &= (1 + \lambda a)^j e^{T/4\lambda} - i(1 - \lambda a)^j e^{-T/4\lambda}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Подставляя выражения (4.20) в формулы (4.11) и вычисляя односолитонное решение уравнения ПДКИ, получаем равенства

$$x_j[1] = x_j - \lambda_1^{-1} \frac{R_{j,1} - Q_{j,1}}{R_{j,1} + Q_{j,1}}, \quad (4.21)$$

$$u_j[1] = -2\lambda_1^{-1} \frac{T_{j,1}}{R_{j,1} + Q_{j,1}}, \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned}R_{j,1} &= (1 + \lambda_1 a)^j (1 + \lambda_1 a)^j e^{T/2\lambda_1}, \\ Q_{j,1} &= (1 - \lambda_1 a)^j (1 - \lambda_1 a)^j e^{-T/2\lambda_1}, \quad T_{j,1} = (1 + \lambda_1 a)^j (1 - \lambda_1 a)^j.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Однопетлевое решение (4.21), (4.22) уравнения ПДКИ изображено на рис. 1. Аналогичным образом, явное выражение для двухпетлевого решения уравнения ПДКИ

Рис. 2. Численное представление упругого рассеяния солитонов двухпетлевого солитонного решения уравнения ПДКИ при $\lambda_1 = -0.49$, $\lambda_2 = 0.59$ и $a = 1.2$.

Рис. 3. Численное представление упругого рассеяния однопетлевого и анти-однопетлевого солитонов решения уравнения ПДКИ при $\lambda_1 = -0.49$, $\lambda_2 = -0.59$ и $a = 1.2$.

с двумя различными значениями спектрального параметра λ_1, λ_2 имеет вид

$$x_j[2] = x_j - (\lambda_2^{-2} - \lambda_1^{-2}) \frac{\xi_n}{\omega_n}, \quad (4.24)$$

$$u_j[2] = 2(\lambda_2^{-2} - \lambda_1^{-2}) \frac{\zeta_n}{\omega_n}, \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda_2^{-1}(R_{j,2} - Q_{j,2})(R_{j,1} + Q_{j,1}) - \lambda_1^{-1}(R_{j,1} - Q_{j,1})(R_{j,2} + Q_{j,2}), \\ \zeta &= -\lambda_2^{-1}(R_{j,1} + Q_{j,1})T_{j,2} + \lambda_1^{-1}(R_{j,2} + Q_{j,2})T_{j,1}, \\ \omega &= (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2})(R_{j,1} + Q_{j,1})(R_{j,2} + Q_{j,2}) - \\ &\quad - 2\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}[(R_{j,1} - Q_{j,1})(R_{j,2} - Q_{j,2}) + 4T_{j,1}T_{j,2}], \end{aligned}$$

а $R_{j,1}, Q_{j,1}, T_{j,1}$ и $R_{j,2}, Q_{j,2}, T_{j,2}$ – скалярные функции, полученные соответственно при λ_1 и λ_2 . Графики двухпетлевого солитонного решения показаны на рис. 2 и рис. 3.

На рис. 2 и 3 изображены графики рассеяния двух петлевых солитонов и петлевого с антипетлевым солитоном при различных значениях T соответственно. Изначально при $T = -15, -10$, когда солитоны двухпетлевого решения находятся на большом удалении друг от друга, они не взаимодействуют. Однако при $T = -2, 2$, когда два петлевых солитона приближаются друг к другу с противоположных направлений, их форма деформируется и они сливаются друг с другом. После взаимодействия каждый петлевой солитон расщепляется на два однопетлевых солитона, которые движутся в своем направлении, сохраняя форму.

В непрерывном пределе произведем замену $a \rightarrow ha$ и возьмем предел $h \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, в котором значение $X = jh$ остается конечным, где X – непрерывная переменная вдоль x . Применяя этот предел к системам уравнений (4.21), (4.22) и (4.24), (4.25) и полагая $a = 1$, получаем соответственно, что

$$x[1] = x - \lambda_1^{-1} \operatorname{th} z_1, \quad (4.26)$$

$$u[1] = -\lambda_1^{-1} \operatorname{sech} z_1 \quad (4.27)$$

и

$$x[2] = x - (\lambda_2^{-2} - \lambda_1^{-2}) \frac{\lambda_2^{-1} \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1 - \lambda_1^{-1} \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2}{(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2}) \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - 2\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(1 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2)}, \quad (4.28)$$

$$u[2] = (\lambda_2^{-2} - \lambda_1^{-2}) \frac{\lambda_1^{-1} \operatorname{ch} z_2 - \lambda_2^{-1} \operatorname{ch} z_1}{(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2}) \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - 2\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(1 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2)}, \quad (4.29)$$

где

$$z_{1,2} = 2\lambda_{1,2}X + \frac{1}{2\lambda_{1,2}}T. \quad (4.30)$$

Мы получили выражения для петлевых солитонов непрерывного уравнения КИ. Аналогично, вычисляя явные выражения для отношений определителей в формулах (4.17), можно получить многопетлевое солитонное решение уравнения ПДКИ.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной работе построено преобразование Дарбу на решениях уравнения ПДКИ. Мы применили калибровочное преобразование к паре Лакса уравнения ПДКИ. Многопетлевые солитонные решения уравнения ПДКИ выражены через отношения определителей. Алгебраически получены одно- и двухпетлевые солитонные решения. Наконец, в непрерывном пределе воспроизведено стандартное непрерывное решение уравнения КИ. Результаты, полученные для уравнения ПДКИ, можно в дальнейшем распространить на случай интегрируемого дискретного обобщения уравнения КИ.

Благодарности. Х. В. А. Риаз выражает благодарность У. Салему за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] B. Grammaticos, T. Tamizhmani, Y. Kosmann-Schwarzbach (eds.), *Discrete Integrable Systems* (Pondicherry, February 2–14, 2003), Lecture Notes in Physics, **644**, Springer, Berlin, 2004.
- [2] Y. B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Progress in Mathematics, **219**, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [3] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis”, *J. Math. Phys.*, **17**:6 (1976), 1011–1018.
- [4] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “A nonlinear difference scheme and inverse scattering”, *Stud. Appl. Math.*, **55**:3 (1976), 213–229.
- [5] R. Hirota, “Nonlinear partial difference equations. I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **43**:4 (1977), 1424–1433.
- [6] R. Hirota, “Nonlinear partial difference equations. II. Discrete-time Toda equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **43**:6 (1977), 2074–2078.
- [7] B. F. Feng, K. Maruno, Y. Ohta, “Integrable discretizations of the short pulse equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:8 (2010), 085203, 14 pp.
- [8] B.-F. Feng, K. Maruno, Y. Ohta, “Self-adaptive moving mesh schemes for short pulse type equations and their Lax pairs”, *Pac. J. Math. Ind.*, **6** (2014), 8, 14 pp.
- [9] T. Schäfer, C. E. Wayne, “Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media”, *Phys. D*, **196**:1–2 (2004), 90–105.
- [10] Y. Chung, C. K. T. Jones, T. Schäfer, C. E. Wayne, “Ultra-short pulses in linear and nonlinear media”, *Nonlinearity*, **18**:3 (2005), 1351–1374.
- [11] A. Sakovich, S. Sakovich, “The short pulse equation is integrable”, *J. Phys. Soc. Japan*, **74**:1 (2005), 239–241.
- [12] A. Sakovich, S. Sakovich, “Solitary wave solutions of the short pulse equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:22 (2006), L361–L367.
- [13] B.-F. Feng, J. Inoguchi, K. Kajiwara, K. Maruno, Y. Ohta, “Discrete integrable systems and hodograph transformations arising from motions of discrete plane curves”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:39 (2011), 395201, 19 pp.
- [14] V. K. Kuetche, T. B. Bouetou, T. C. Kofane, “On two-loop soliton solution of the Schäfer–Wayne short-pulse equation using Hirota’s method and Hodnett–Moloney approach”, *J. Phys. Soc. Japan*, **76**:2 (2007), 024004, 7 pp.
- [15] Y. Matsuno, “Multiloop soliton and multibreather solutions of the short pulse model equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **76**:8 (2007), 084003, 6 pp.
- [16] U. Saleem, M. Hassan, “Darboux transformation and multisoliton solutions of the short pulse equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **81**:9 (2012), 094008, 9 pp.

- [17] L. Ling, B.-F. Feng, Z. Zhu, “Multi-soliton, multi-breather and higher order rogue wave solutions to the complex short pulse equation”, *Phys. D*, **327** (2016), 13–29.
- [18] H. Wajahat A. Riaz, M. ul Hassan, “Darboux transformation of a semi-discrete coupled dispersionless integrable system”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **48** (2017), 387–397.
- [19] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin, 1991.
- [20] M. Hassan, “Darboux transformation of the generalized coupled dispersionless integrable system”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:6 (2009), 065203, 11 pp.
- [21] И. М. Гельфанд, В. С. Петак, “Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами”, *Функци. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 13–25.
- [22] I. M. Gelfand, S. Gelfand, V. M. Retakh, R. L. Wilson, “Quasideterminants”, *Adv. Math.*, **193**:1 (2005), 56–141.
- [23] C. X. Li, J. J. C. Nimmo, “Quasideterminant solutions of a non-Abelian Toda lattice and kink solutions of a matrix sine-Gordon equation”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **464**:2092 (2008), 951–966, arXiv: 0711.2594.

Поступила в редакцию 16.02.2017,
после доработки 28.03.2017