Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Ильичев, А. С. Савин, Процесс установления системы плоских волн на ледовом покрове над диполем, равномерно движущимся в толще идеальной жидкости, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 455–465

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:50:05

© 2017 г.

А. Т. Ильичев^{*†}, А. С. Савин[†]

ПРОЦЕСС УСТАНОВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ЛЕДОВОМ ПОКРОВЕ НАД ДИПОЛЕМ, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИМСЯ В ТОЛЩЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается плоская задача об эволюции возмущений ледового покрова диполем, начинающим равномерное и прямолинейное движение по горизонтали в толще изначально неподвижной жидкости. При помощи асимптотического фурье-анализа показано, что для сверхкритических скоростей формируются волны двух типов на поверхности раздела вода–лед. Описан процесс установления этих волн в процессе движения диполя. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, а ее движение – потенциальным. Ледовый покров моделируется пластиной Кирхгофа–Лява.

Ключевые слова: жидкость под ледовым покровом, диполь, установление волны.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9356>

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание динамики жидкости под ледовым покровом последние три десятка лет привлекает значительное внимание исследователей. Это внимание вызвано как успешным развитием математических методов для теоретических задач, возникающих в данной области, так и возможными геофизическими и практическими приложениями. Пожалуй, наиболее изученными являются различные проблемы волнового движения в жидкости под ледовым покровом. Обзор главных результатов этой теории можно найти в работе [1]. Библиография обзора [1] содержит работы, в которых рассматриваются только свободные волны, а вопрос их генерации различными источниками не обсуждается. Тем не менее задачи о генерации волн

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-05-06969).

^{*}Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: ilichev@mi.ras.ru

[†]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

в жидкой среде как с ледовым покровом, так и без него вызывают значительный теоретический и практический интерес. В классической гидромеханике были разработаны методы решения подобных задач, основанные на моделировании источников возмущений, расположенных в толще жидкости, точечными гидродинамическими особенностями [2]–[7].

В последнее время возник интерес к обобщению этих известных результатов о генерации волн на случай наличия ледового покрова. Классическими являются работы о движении нагрузки по поверхности упругой пластины – ледового покрова. Для краткости ограничимся цитированием только тех работ, которые мы считаем наиболее важными по этой тематике. В работе [8] изучаются стационарные волны, сгенерированные равномерно движущейся нагрузкой (источником) по поверхности ледового покрова при стремлении времени к бесконечности. Показано, что в общем случае короткая упругая волна распространяется впереди источника, а более длинная гравитационная волна – вслед за источником. В работе [9] анализируется задача о линейной импульсной нагрузке на поверхности ледовой пластины. Получено точное выражение для смещения ледового покрова при больших временах в окрестности источника. В работе [10] методом Винера–Хопфа решена задача о поведении плавающей упругой пластины в виде полосы под действием периодической поверхностной нагрузки. В работе [11], имеющей прикладную направленность, рассматривается прямолинейное нестационарное движение самолета Ил-76ТД по ледовому покрову. Исследуется влияние толщины и модуля упругости ледовой пластины, режимов взлета и посадки самолета на напряженно-деформированное состояние ледяного покрова, используемого в качестве взлетно-посадочной полосы.

В работах [12], [13] рассматривается задача о генерации волн на ледовом покрове от неподвижного источника переменной интенсивности, расположенного в жидкости под покровом. Получены общие выражения для потенциала скорости, а также рассмотрены частные случаи импульсного, постоянного и гармонически осциллирующего источника. Представлены асимптотические выражения для потенциала скорости течения при длительной работе осциллирующего источника, а также для потенциала вдали от источника. В работе [14] изучены изгибные волны, возникающие в ледовом покрове при мгновенном выбросе некоторой массы точечным источником, расположенным в жидкости. Обобщение на случай источника с переменной интенсивностью рассматривается в [15]. Для описания волн, формирующихся в ледовом покрове под влиянием подобного источника, авторы используют метод стационарной фазы для нахождения асимптотического представления вдоль характеристик.

Установившиеся стационарные волны в результате равномерного движения гидродинамической особенности n -го порядка из состояния покоя на свободной поверхности для жидкости со свободной поверхностью найдено в [16], а на ледовом покрове для жидкости под ледовым покровом – в [17]. В работе [18] проведено исследование трехмерной нестационарной задачи о гидроупругом поведении плавающей бесконечной пластины под воздействием волн, генерируемых при горизонтальном прямолинейном движении тонкого твердого тела в жидкости бесконечной глубины. На основе полученных формул численно анализируется влияние толщины пластины, глубины погружения тела, его размеров и скорости равномерного движения на амплитуду прогибов плавающей пластины. В работе [19] построено решение ли-

нейной стационарной задачи об обтекании сферы равномерным потоком невязкой, несжимаемой и бесконечно глубокой жидкости под ледяным покровом, который моделируется тонкой упругой напряженной пластиной постоянной толщины. Показано, что все характеристики течения существенно зависят от отношения скорости движения тела к критической скорости изгибно-гравитационных волн. Задачи излучения изгибно-гравитационных волн погруженным цилиндром рассмотрены в [20]. Процесс установления волн на свободной поверхности от гидродинамической особенности n -го порядка, равномерно движущейся в толще жидкости, для жидкости со свободной поверхностью описан в [21].

Однако, насколько нам известно, задача о процессе установления возмущений на ледовом покрове от движущегося источника в толще жидкости под покровом в полном объеме не рассматривалась. В работе [22] приведено лишь качественное рассмотрение процесса установления возмущений в этом случае. Целью настоящей статьи является анализ временной эволюции волн возмущений на ледовом покрове, возникающих в результате равномерного горизонтального движения диполя (моделирующего компактное тело в гидромеханике) в толще изначально неподвижной жидкости для плоской задачи, которая соответствует движению бесконечного цилиндра в жидкости. Установлено, что изначально генерируются четыре волны, и показано, что две из них затухают со временем. Ранее было показано [17], что в результате эволюции образуются две волны: одна впереди движущегося диполя, другая сзади. Отсюда следует, что две из четырех упомянутых волн не затухают, а стремятся к стационарной асимптотике при $t \rightarrow \infty$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводится формулировка задачи, раздел 3 посвящен сокращенному изложению известного результата о стационарном пределе процесса установления волновой конфигурации при $t \rightarrow \infty$. В разделе 4 дается описание процесса установления асимптотической волновой конфигурации, что и является результатом статьи. В разделе 5 представлено обсуждение результатов.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим жидкость под ледовым покровом. Направим ось x декартовой системы координат направо вдоль невозмущенной поверхности раздела жидкости и льда, а ось y – вверх. Предположим, что в жидкости на конечной глубине l налево вдоль оси x движется диполь с моментом M . Предположим, что волны на поверхности раздела лед–жидкость являются линейными и что течение везде, кроме точки $z_0 = x_0 - il$ локализации диполя, является потенциальным. Будем искать потенциал течения в виде

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_1(x, y, t) + \varphi(x, y, t), \quad (1)$$

где Φ_1 – потенциал скорости течения, вызванного в неограниченной жидкости рассматриваемым диполем и диполем с тем же моментом, расположенным в сопряженной точке $\bar{z}_0$. Комплексный потенциал течения, вызванный такой парой диполей, имеет форму

$$W_1 = \Phi_1 + i\Psi_1 = m \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right), \quad z = x + iy, \quad m = \frac{M}{2\pi}. \quad (2)$$

Функция $\varphi(x, y, t)$ представляет собой часть потенциала скорости и в области течения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0. \quad (3)$$

Применяя преобразование Фурье

$$f(\lambda, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, t) e^{-i\lambda x} dx \quad (4)$$

к обеим частям (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_{yy} - \lambda^2 f = 0,$$

имеющее общее решение

$$f(\lambda, y, t) = a(\lambda, t) e^{|\lambda|y} + b(\lambda, t) e^{-|\lambda|y}. \quad (5)$$

Будем считать жидкость бесконечно глубокой. Условие убывания возмущений на бесконечности означает, что $b(\lambda, t) = 0$, и решение (5) принимает вид

$$f(\lambda, y, t) = a(\lambda, t) e^{|\lambda|y}. \quad (6)$$

Обозначим через $\eta = \eta(x, t)$ отклонение поверхности раздела вода–лед от равновесного состояния $y = 0$. В приближении волн малой амплитуды граничные условия для упругой пластины, моделирующей ледовый покров [1], выставляются при $y = 0$ и имеют вид

$$\Phi_t + g\eta - C\eta_{xx} + B\eta_{xxx} + A\eta_{tt} = 0, \quad \eta_t = \Phi_y, \quad (7)$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты, зависящие от упругих свойств льда, а g – ускорение свободного падения. Постоянную C , которая выражает безразмерное натяжение упругой пластины, считаем положительной, что соответствует растяжению пластины, хотя устойчивое волновое движение возможно в состоянии небольшого сжатия (когда значение коэффициента C отрицательно; см., например, [23]).

Принимая во внимание выражения (1), (2), представим (7) как граничное условие для волновой части потенциала скорости при $y = 0$:

$$\varphi_t + g\eta - C\eta_{xx} + B\eta_{xxx} + A\eta_{tt} = -(\Phi_1)_t, \quad \eta_t = \varphi_y. \quad (8)$$

Применяя преобразование Фурье (4) к (8) и используя (6), получим систему уравнений

$$a_t + (g + C\lambda^2 + B\lambda^4)S + AS_{tt} = -(F_1)_{tt}, \quad S_t = |\lambda|a,$$

где S и F_1 – преобразования Фурье функций $\eta(x, t)$ и $\Phi_1(x, 0, t)$ соответственно.

Исключая a из системы уравнений, получим

$$S_{tt} + \omega^2 S = F(\lambda, t), \quad (9)$$

$$\omega^2 = (g + C\lambda^2 + B\lambda^4)|\lambda|(1 + A|\lambda|)^{-1}, \quad (10)$$

$$F(\lambda, t) = -|\lambda|(1 + A|\lambda|)^{-1}(F_1)_t. \quad (11)$$

Для определения величины (11) имеем

$$\Phi_1(x, 0, t) = W_1|_{y=0} = \frac{2m(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + l^2}. \quad (12)$$

Если диполь возникает в точке $(0, -l)$ в момент времени $t = 0$ и в дальнейшем движется со скоростью $-V$ на постоянной глубине l , сохраняя свой момент $M = 2\pi m$, то

$$m(t) = m\theta(t), \quad x_0(t) = -Vt\theta(t), \quad (13)$$

где $\theta(t) = 0$ при $t < 0$, $\theta(t) = 1$ при $t > 0$.

Из (12), (13) следует, что

$$[\Phi_1(x, 0, t)]_t = 2m \left\{ \frac{x\delta(t)}{x^2 + l^2} - V\theta(t) \frac{(x + Vt)^2 - l^2}{(x + Vt)^2 + l^2} \right\}, \quad (14)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция. Вычисляя преобразование Фурье (14), определим правую часть (9):

$$F(\lambda, t) = 2\pi m(1 + A|\lambda|)^{-1} e^{l|\lambda|} [i\lambda\delta(t) - V\lambda^2 e^{i\lambda Vt} \theta(t)]. \quad (15)$$

Если диполь возникает в изначально неподвижной жидкости, то для любого $t_0 < 0$ естественно положить $S(t_0) = 0$, $S_t(t_0) = 0$. Решение (9) для этих начальных данных имеет вид

$$S(\lambda, t) = \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t F(\lambda, \tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (16), находим, что для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} S(\lambda, t) &= S_0(\lambda, t) + S_1(\lambda, t), \quad S_0(\lambda, t) = \frac{2i\pi\lambda e^{-l|\lambda|} \sin(\omega t)}{\omega(1 + A|\lambda|)}, \\ S_1(\lambda, t) &= \frac{\pi m V \lambda^2 e^{-l|\lambda| + i\lambda Vt}}{\omega(1 + A|\lambda|)} \{f_1(-\lambda, t) + f_1(\lambda, t) + i[f_2(-\lambda, t) - f_2(\lambda, t)]\}, \\ f_1(\lambda, t) &= \frac{\cos[(\omega + \lambda V)t] - 1}{\omega + \lambda V}, \quad f_2(\lambda, t) = \frac{\sin[(\omega + \lambda V)t]}{\omega + \lambda V}. \end{aligned} \quad (17)$$

Волна на поверхности раздела вода–лед находится при помощи обратного преобразования Фурье (17):

$$\eta(x, t) = \eta_0(x, t) + \eta_1(x, t), \quad \eta_n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad n = 0, 1. \quad (18)$$

3. УСТАНОВИВШАЯСЯ ВОЛНОВАЯ КОНФИГУРАЦИЯ В ПРЕДЕЛЕ $t \rightarrow +\infty$

Будем искать волну, которая устанавливается на поверхности раздела вода–лед в процессе длительного движения диполя. Перейдем в систему координат, связанную с диполем, полагая $x' = x + Vt$, $y' = y$. Компонента $\eta_0(x, t)$ в общем выражении для волнового отклонения поверхности (18) связана с эффектом мгновенного возникновения диполя в жидкости. Используя лемму Римана–Лебега, можно показать, что при $t \rightarrow +\infty$ величина $\eta_0 \rightarrow 0$ в любой точке x' . Наличие в (18) компоненты $\eta_1(x, t)$ вызвано движением диполя.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [17]. Из (17) следует, что

$$\begin{aligned}\eta(x', +\infty) &= -mV \int_0^\infty \frac{\lambda^2 e^{-\lambda} U(\lambda)}{1 + A\lambda} d\lambda, \\ U(\lambda, t) &= \frac{2 \cos(\lambda x')}{\omega^2 - \lambda^2 V^2} + \frac{\pi}{\omega} [\delta(\omega - \lambda V) - \delta(\omega + \lambda V)] \sin(\lambda x').\end{aligned}\quad (19)$$

Из (19) следует, что в результате длительного движения диполя устанавливается стационарная волна $\eta(x') = \eta_1(x', +\infty)$ в системе координат, связанной с диполем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [17]. Выражение (19) записывается в виде

$$\eta(x') = -2mV \left[I(x') + \pi \sum_j \lambda_j e^{-\lambda_j} |P'(\lambda_j)|^{-1} \sin(\lambda_j x') \right], \quad (20)$$

где

$$I(x') = \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda} \cos(\lambda x')}{P(\lambda)} d\lambda, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}\omega^2 - \lambda^2 V^2 &= \lambda(1 + A\lambda)^{-1} P(\lambda), \\ P(\lambda) &= B\lambda^4 + (C - AV^2)\lambda^2 - V^2\lambda + g,\end{aligned}\quad (22)$$

а λ_j – простые положительные корни полинома (22).

Форма решений (20) существенно зависит от наличия положительных корней полинома (22), который находится в знаменателе подынтегрального выражения (21).

ЛЕММА 1 [17]. При $V < V_c$ полином (22) не имеет положительных корней, при $V > V_c$ имеются два положительных простых корня полинома $P(\lambda)$, λ_1 и λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$). Значение критической скорости V_c находится численно.

Из леммы 1 следует, что если значение скорости V меньше критического, то выражение (20) для отклонения поверхности раздела вода–лед от положения равновесия в координатной системе, связанной с диполем, принимает вид

$$\eta(x') = -2mV \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda} \cos(\lambda x')}{P(\lambda)} d\lambda. \quad (23)$$

Используя известные свойства преобразования Фурье [24], легко показать, что $\eta(x') \rightarrow 0$ при $x' \rightarrow \pm\infty$ в (23).

Из леммы 1 также следует, что при $V > V_c$ отклонения поверхности раздела вода–лед даются выражениями (20), (21). В этом случае суммирование в (20) производится для $1 \leq j \leq 2$ и интеграл (21) понимается в смысле главного значения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 [17]. При $V > V_c$ сингулярный интеграл (21) принимает вид

$$\begin{aligned}I(x') &= -\sigma \sum_{j=1}^2 \chi(\lambda_j) \sin(\lambda_j x') - \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\mu e^{-(|x'|+i\ell)\mu}}{P(i\mu)} d\mu, \\ \sigma &= \operatorname{sgn} x', \quad \chi(\lambda) = \pi \lambda [P'(\lambda)]^{-1} e^{-\lambda},\end{aligned}\quad (24)$$

а отклонения поверхности раздела вода–лед

$$\begin{aligned}\eta(x') &= 2mV[(\sigma + 1)\chi(\lambda_1)\sin(\lambda_1 x') + (\sigma - 1)\chi(\lambda_2)\sin(\lambda_2 x') + K(x')], \\ K(x') &= \int_0^\infty \frac{\mu[G(\mu)\cos(l\mu) + V^2\mu\sin(l\mu)]e^{-|x'|\mu}}{[G(\mu)]^2 + V^4\mu^2} d\mu, \\ G(\mu) &= B\mu^2 + (AV^2 - C)\mu^2 + g.\end{aligned}\quad (25)$$

Так как далеко от диполя $K(x') \rightarrow 0$, из (25) следует, что при $x' \rightarrow \pm\infty$ на поверхности раздела в системе отсчета, связанной с диполем, формируются две гармонические волны

$$\eta(x') = \pm 4mV\chi(\lambda_j)\sin(\lambda_j x'),$$

где $j = 1$ для $x' \rightarrow +\infty$ и в случае $j = 2$ выбирается знак плюс, а в случае $x' \rightarrow -\infty$ — знак минус.

Коэффициенты в (7) и (22) приводятся, например, в работе [1]:

$$A = \frac{\rho_i h}{\rho_w}, \quad B = \frac{Eh^3}{12\rho_w(1 - \nu^2)}, \quad C = \frac{\sigma_0 h}{\rho_w},$$

где ρ_i — плотность льда, ρ_w — плотность воды, h — толщина ледовой пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, σ_0 — начальное напряжение в ледовой пластине. Характерные значения этих величин следующие:

$$\rho_w = 1025 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_i = 0.9\rho_w, \quad E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu = 0.3, \quad \sigma_0 = 10^5 \text{ Н/м}^2. \quad (26)$$

В работе [17] приведены значения критической скорости в зависимости от толщины ледового покрова, а также формы установившихся при $t \rightarrow \infty$ волн для $V < V_c$ и $V > V_c$ в зависимости от толщины ледового покрова.

4. ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ВОДА–ЛЕД

В случае $V < V_c$ на ледовом покрове образуется быстроубывающее возвышение, которое является реакцией на движение диполя, причем минимум этого возвышения находится непосредственно над диполем (см. рис. 3 в [17]). Более интересен случай формирования волнового возмущения поверхности раздела вода–лед, имеющий место при $V > V_c$. Его и рассмотрим далее.

Легко видеть, что решение (17) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\eta &= -2mVI(x') + I_0(x) + I_1(x') + I_2(x'), \\ I_0(x) &= -2m \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-l\lambda} \sin \omega t \sin \lambda x}{\omega(1 + A\lambda)} d\lambda, \\ I_1(x') &= mV \int_0^\infty \lambda^2 e^{-l\lambda} \frac{\cos[\lambda(x' - Vt) + \omega t]}{\omega(\omega - \lambda V)(1 + A\lambda)} d\lambda, \\ I_2(x') &= mV \int_0^\infty \lambda^2 e^{-l\lambda} \frac{\cos[\lambda(x' - Vt) - \omega t]}{\omega(\omega + \lambda V)(1 + A\lambda)} d\lambda.\end{aligned}\quad (27)$$

Интегралы I_0 и I_2 в (27) являются несингулярными, и их убывание с ростом времени оценивается, как это сделано в [21], при помощи метода перевала.

ЛЕММА 2. При $x' - Vt > 0$ сингулярный интеграл I_1 при $t \rightarrow \infty$ стремится к величине

$$-2mV \sum_j \chi(\lambda_j) \sin(\lambda_j x').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функция $\omega(\lambda)$ аналитична внутри некоторого угла

$$\Gamma = \{\lambda = x + iy, x > 0, 0 < y < \alpha(V)x\}$$

на комплексной плоскости переменной λ , где $\alpha(V) > 0$ – некоторая постоянная (для $V = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, например, $0.999 < \alpha(V) < 1$); $\text{Im } \omega(\lambda) > 0$ для $\lambda \in \Gamma$, кроме точки $\lambda = 0$, где $\omega = 0$. Эта нулевая точка ветвления может быть удалена преобразованием $\lambda = u^2$. Для вычисления интеграла I_1 используем контур γ , состоящий из отрезка $(0, R)$ длины R положительной полуоси с началом в начале координат, контура $\gamma_1 = \{y = \alpha(V)x\}$, замыкающей дуги окружности γ_2 и двух полуокружностей $C_{1,2}$ в первой четверти комплексной плоскости λ вокруг точек $\lambda_{1,2}$ радиуса ρ . Используя теорему о вычетах, лемму Жордана для установления факта убывания интеграла по γ_2 при росте R , экспоненциальное убывание по времени при $t \rightarrow \infty$ несингулярного интеграла по γ_1 и устремляя $R \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$, а также замечая, что

$$\omega_{1,2} = \lambda_{1,2}V, \quad \frac{d\omega}{d\lambda}(\lambda_{1,2}) = \frac{dP/d\lambda(\lambda_{1,2})}{2V}(1 + A\lambda_{1,2})^{-1},$$

получим утверждение леммы.

Из (24) и (27) тогда имеем

$$\eta(x') = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad x' > Vt. \quad (28)$$

Обозначим через $D = \{(x, t): V_4 t < x' < V_1 t\}$ сектор, где $V_4 < 0$, $V_1 > 0$ – известные скорости, которые будут определены ниже. После начала движения диполя со сверхкритической скоростью V возникают четыре волны, распространяющиеся в системе отсчета, связанной с диполем, со скоростями, асимптотически стремящимися при $t \rightarrow \infty$ к скоростям

$$V_{1,2} = V \pm \frac{d\omega(\lambda_1)}{d\lambda}, \quad V_{3,4} = V \pm \frac{d\omega(\lambda_2)}{d\lambda},$$

где $V_1 > 0$, $V_2 > V$, $V_3 > V_2$, $V_4 < 0$.

Например, для значений физических постоянных (26) и $h = 0.5 \text{ м}$, $V = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ имеем $\lambda_1 \approx 0.04365 \text{ м}^{-1}$, $\lambda_2 \approx 0.17449 \text{ м}^{-1}$, $V_1 \approx 7.14086 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $V_2 \approx 22.8591 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $V_3 \approx 44.4846 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $V_4 \approx -14.4846 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Из (28) следует, что при $x' > Vt$ рассматриваемые волны затухают. Следовательно, вне сектора D волны, инициируемые диполем, затухают. Другая пара волн распространяется внутри сектора D , и эти волны стремятся к стационарному профилю (25) (т. е. пара волн с групповыми скоростями V_4 и V_1). Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Волны с волновыми числами λ_2 , распространяющиеся вправо от диполя с максимальными групповыми скоростями V_2 и V_3 , затухают со временем, подвергаясь дисперсионному расплыванию. (В случае отсутствия ледовой пластины $V_1 = V/2 < V_2 = 3V/2$ [21].) При $(x', t) \in D$ форма поверхности раздела вода–лед

Рис. 1. Схема эволюции профиля поверхности раздела для достаточно больших t : $t_2 > t_1$. Процесс установления стационарного профиля в заданной точке x'_0 .

поточечно сходится к стационарному профилю (25) (см. рис. 1). Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки x'_0 существует $T(x'_0)$ такое, что для всех $t > T(x'_0)$ выполняется неравенство $|\eta(x', +\infty) - \eta(x', t)| < \varepsilon$. Возмущения вне сектора D (т.е. пара волн с групповыми скоростями V_2 и V_3) стремятся к нулю как $O(1/\sqrt{t})$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Из изложенного выше следует, что диполь, моделирующий цилиндр, равномерно движущийся внутри жидкости, может вызывать различные возмущения на поверхности раздела вода–лед в зависимости от скорости его движения. Здесь следует заметить, что в силу того факта, что ледовый покров моделируется упругой пластиной, полученной в результате осреднения по толщине упругого слоя, возмущение поверхности раздела эквивалентно возмущению собственно пластины, и настоящее исследование относится к реакции ледового покрова на движение диполя в жидкости под этим покровом.

Для скоростей $V < V_c$ (докритических скоростей движения диполя) изгибное возмущение ледового покрова быстро убывает по пространству при удалении от диполя и имеет очень незначительную амплитуду, даже при значительных толщинах ледового покрова (см. рис. 3 в [17]). При $V > V_c$ (сверхкритических скоростях движения диполя) на ледовом покрове возникают возмущения волнового типа, которые при $t \rightarrow \infty$ стремятся к двум стационарным (в системе отсчета, связанной с диполем) волнам. Это изгибная волна “предвестник”, которая распространяется вперед от диполя, и гравитационная волна, распространяющаяся вслед за диполем. Описанию процесса установления этих волн и посвящена настоящая работа.

Показано, что при начале движения диполя внутри жидкости возникают четыре волны. С течением времени две из них затухают, а две стремятся к стационарному распределению. Логика рассуждений такова: использован известный результат [17],

что при $t \rightarrow \infty$ формируются две волны, затем показано, что волны, групповая скорость которых больше скорости диполя V в системе отсчета, связанной с диполем, затухают. Но такими волнами являются пара волн из четырех. Закон их затухания определяется при помощи метода перевала.

Известно, что при движении тела в жидкости при учете поверхностных капиллярных эффектов также формируется короткая капиллярная волна “предвестник” (этот результат, кстати, получается из настоящих рассмотрений при $B = 0$). Однако пространственные масштабы этой волны существенно отличаются от масштабов соответствующей изгибной волны при наличии ледового покрова. Так, амплитуда капиллярной волны для физически реальных условий имеет порядок миллиметров, а амплитуда изгибной волны – нескольких десятков сантиметров (см. [17]), что существенно упрощает детектирование этих волн.

В статье [8] речь идет о движении нагрузки по льду, в частности когда на лед садится самолет. В настоящей работе рассматривается след на ледовом покрове от обтекания тела. При этом речь идет о разных значениях скорости V : если в первом случае она порядка полусотни метров в секунду, то в последнем случае для толщины покрова один метр критическая скорость составляет около пятнадцати метров в секунду. В рассматриваемом здесь случае эта скорость зависит от толщины ледового покрова и убывает с убыванием толщины.

Выражения для скоростей V_i , $i = 1, \dots, 4$, полинома $P(\lambda)$ и его положительных корней определяются только параметрами дисперсионного соотношения (10) и значениями скорости V . Следовательно, количество волн, распространяющихся от гидродинамических особенностей при $t \rightarrow \infty$ (предельный стационарный режим), а также описанный выше характер стабилизации волн сходны для любых гидродинамических особенностей постоянной интенсивности и имеющих произвольный порядок N , движущихся в толще жидкости под ледовым покровом.

Рассмотренная плоская задача имеет не только методическое значение. В физически реальной ситуации трехмерного движения подводной особенности, моделирующей компактное тело, формирование волновых структур в плоскостях лучей внутри волнового конуса движущегося тела оказывается аналогичным рассмотренному здесь двумерному случаю [25], [26] (в первой статье обсуждается нестационарное движение источника подо льдом и полученные интегральные формулы проанализированы численно, во второй статье рассмотрена асимптотика решения для случая только докритических скоростей движения диполя). Более того, в работе [26] установлено, что критическая скорость движения компактного тела в жидкости под ледовым покровом совпадает с критической скоростью движения бесконечного цилиндра, рассмотренного в настоящей работе. Эти соображения дают основания предполагать наличие общих свойств для обоих измерений, а также указывает на необходимость изучения плоского случая перед детальным исследованием трехмерного случая, имеющего физическое значение.

Список литературы

- [1] А. Т. Ильичев, “Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода–лед”, *УМН*, **70:6**(426) (2015), 85–138.
- [2] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, т. 1, Физматгиз, Л.–М., 1963.

- [3] Н. Е. Кочин, “О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел”: Н. Е. Кочин, *Собрание сочинений*, т. 2, Изд. АН СССР, М.–Л., 1949, 105–182.
- [4] М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, “О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости”: М. В. Келдыш, *Избранные труды. Механика*, Наука, М., 1985, 120–151.
- [5] М. В. Келдыш, “Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости”: М. В. Келдыш, *Избранные труды. Механика*, Наука, М., 1985, 100–103.
- [6] Л. Н. Сретенский, *Теория волновых движений жидкости*, Наука, М., 1977.
- [7] Л. М. Милн-Томпсон, *Теоретическая гидродинамика*, Мир, М., 1964.
- [8] J. W. Davys, R. J. Hosking, A. D. Sneyd, “Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate”, *J. Fluid Mech.*, **158** (1985), 269–287.
- [9] R. M. S. M. Schulkes, A. D. Sneyd, “Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load”, *J. Fluid Mech.*, **186** (1988), 25–46.
- [10] Л. А. Ткачева, “Воздействие периодической нагрузки на плавающую упругую пластину”, *Изв. РАН. МЖГ*, **40:2** (2005), 132–146.
- [11] А. В. Погорелова, В. М. Козин, А. А. Матюшина, “Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета”, *ПМТФ*, **56:5** (2015), 66–74.
- [12] R. G. Chowdhury, B. N. Mandal, “Motion due to fundamental singularities in finite depth water with an elastic solid cover”, *Fluid Dynam. Res.*, **38:4** (2006), 224–240.
- [13] А. А. Савин, А. С. Савин, “Генерация волн на ледяном покрове пульсирующим в жидкости источником”, *Изв. РАН. МЖГ*, 2013, № 3, 24–30.
- [14] D. Q. Lu, S. Q. Dai, “Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice-cover”, *Arch. Appl. Mech.*, **76:1–2** (2006), 49–63.
- [15] D. Q. Lu, S. Q. Dai, “Flexural- and capillary-gravity waves due to fundamental singularities in an inviscid fluid of finite depth”, *Internat. J. Eng. Sci.*, **46:11** (2008), 1183–1193.
- [16] А. С. Савин, “Установление поверхностных волн, вызываемых гидродинамическими особенностями в плоском потоке”, *Изв. РАН. МЖГ*, **37:3** (2002), 78–81.
- [17] А. А. Савин, А. С. Савин, “Возмущение ледяного покрова движущимся в жидкости диполем”, *Изв. РАН. МЖГ*, **47:2** (2012), 3–10.
- [18] А. В. Погорелова, В. М. Козин, В. Л. Земляк, “Движение тонкого тела в жидкости под плавающей пластиной”, *ПМТФ*, **53:1** (2012), 32–44.
- [19] И. В. Стурова, “Движение погруженной сферы в жидкости под ледяным покровом”, *ПММ*, **3** (2012), 406–417.
- [20] I. V. Sturova, “Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya”, *J. Fluid Mech.*, **784** (2015), 373–395.
- [21] А. Т. Ильичев, А. С. Савин, “О характере процесса установления поверхностных волн в плоском потоке”, *Изв. РАН. МЖГ*, 2004, № 4, 75–83.
- [22] А. Т. Ильичев, А. А. Савин, А. С. Савин, “Установление волны на ледяном покрове над движущимся в жидкости диполем”, *Докл. РАН*, **444:2** (2012), 156–159.
- [23] А. Т. Ильичев, “Уединенные волновые пакеты под сжатым ледовым покровом”, *Изв. РАН. МЖГ*, 2016, № 3, 32–42.
- [24] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1976.
- [25] А. В. Погорелова, “Нестационарное движение источника в жидкости под плавающей пластиной”, *ПМТФ*, **52:5** (2011), 49–59.
- [26] А. А. Савин, А. С. Савин, “Пространственная задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем”, *Изв. РАН. МЖГ*, **50:5** (2015), 16–23.