Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Акхтар, Т. Хуссейн, А. Х. Бокхари, Ф. Хан, Кон-
формные коллинеации тензоров
Риччи и энергии-импульса в статическом плоском сим-
метричном пространстве-времени, *ТМФ*, 2018, том 195,
номер 1, 117–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:51:37

© 2018 г. С. С. Ахтар*, Т. Хуссейн*, А. Х. Бокари†, Ф. Хан*

КОНФОРМНЫЕ КОЛЛИНЕАЦИИ ТЕНЗОРОВ РИЧЧИ И ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В СТАТИЧЕСКОМ ПЛОСКОМ СИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Проведена полная классификация статических плоских симметричных пространств-времен по их конформным коллинеациям Риччи и конформным коллинеациям материи как в вырожденном, так и в невырожденном случаях. Для невырожденного тензора Риччи найден общий вид векторного поля, генерирующего конформные коллинеации Риччи, в терминах неизвестных функций от t и x , которые подчиняются некоторым условиям интегрируемости. Приведено решение этих условий в различных случаях, зависящих от природы тензора Риччи, и сделан вывод о том, что статическое плоское пространство-время обладает семи-, десяти- или пятнадцатимерной алгеброй Ли конформных коллинеаций Риччи. Кроме того, обнаружено, что если тензор Риччи вырожден, то такое пространство-время допускает бесконечное число конформных коллинеаций Риччи. Аналогичная процедура применяется для конформных коллинеаций материи в случае вырожденного или невырожденного тензора материи. Получен точный вид некоторой метрики статического плоского пространства-времени, допускающей нетривиальные конформные коллинеации Риччи и конформные коллинеации материи. Представлены некоторые физические применения полученных результатов: в качестве источника тензора энергии-импульса рассмотрена идеальная жидкость.

Ключевые слова: конформные коллинеации Риччи, конформные коллинеации материи, коллинеации Риччи, коллинеации материи.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9359>

1. ВВЕДЕНИЕ

В общей теории относительности (ОТО) симметрии – это векторные поля, которые сохраняют определенные интересные особенности геометрии пространства-времени, например метрический тензор, тензоры Римана, энергии-импульса, Риччи.

*Department of Mathematics, University of Peshawar, Khyber Pakhtunkhwa, Pakistan.
E-mail: tahirhussain@uop.edu.pk

†Department of Mathematics and Statistics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia

Точнее говоря, если эти симметрии применяются к тензорам (помимо метрического), то они называются коллинеациями. С математической точки зрения коллинеация – это векторное поле ξ такое, что производная Ли $\mathcal{L}_\xi$ вдоль поля ξ от некоторого тензора Ω равна нулю [1]:

$$\mathcal{L}_\xi \Omega = 0. \quad (1.1)$$

Если Ω – метрический тензор, то данное уравнение представляет собой хорошо известное уравнение Киллинга $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$, решения которого называются векторами Киллинга (ВК), возможными в данной метрике пространства-времени. Коллинеации Риччи (КР) получаются, если положить в (1.1) $\Omega = R_{ab}$, где R_{ab} есть тензор Риччи. Аналогично, если выбрать в качестве Ω тензор Римана и тензор энергии-импульса, определяются коллинеации кривизны и коллинеации материи (КМ).

В дополнение, если поток индуцирован векторным полем ξ , то метрический тензор g_{ab} , тензор Риччи R_{ab} или тензор энергии-импульса T_{ab} сохраняют только свой конформный класс, и тогда ξ называется конформным ВК (КВК), конформной КР (ККР) или конформной КМ (ККМ) соответственно. Коллинеации данного типа не обязательно сохраняют сами тензоры. В частности, ККР удовлетворяет соотношению [2]

$$\mathcal{L}_\xi R_{ab} = R_{ab,c} \xi^c + R_{bc} \xi_{,a}^c + R_{ac} \xi_{,b}^c = 2\lambda R_{ab}, \quad (1.2)$$

где λ – гладкая действительнoзначная функция на пространстве-времени M , называемая конформным множителем. Если $\lambda = \text{const}$, то ККР называется гомотетичной КР, а если $\lambda = 0$, то ККР сводится к обычной КР. Определение ККМ аналогично, нужно только заменить в (1.2) тензор Риччи R_{ab} на тензор энергии-импульса T_{ab} . Если заменить в (1.2) тензор R_{ab} на g_{ab} , то аналогичные замечания справедливы для КВК. Если ξ является одновременно КВК с конформным множителем α и ККР с конформным множителем λ , то α и λ связаны уравнением [3]

$$\alpha_{;ab} = -\lambda \left(R_{ab} - \frac{R}{6} g_{ab} \right). \quad (1.3)$$

Множество всех ККР (множество всех ККМ) пространства-времени, метрически представляющего многообразие M , образует векторное пространство, которое может иметь бесконечную размерность, если вырожден тензор Риччи (соответственно тензор энергии-импульса). Однако в невырожденном случае эти множества векторов коллинеации образуют конечномерные алгебры Ли, размерность каждой из которых не превосходит 15, причем верхняя граница размерности достигается тогда и только тогда, когда пространство-время является конформно плоским [4].

Интерес к изучению симметрий пространства-времени в ОТО не исчезает на протяжении длительного времени. Большой объем публикаций посвящен классификации пространств-времен по их различным симметриям, так как симметрии описывают законы сохранения энергии, импульса или момента импульса в виде первых интегралов динамической системы (см., например, [5], [6]).

В частности, поскольку $R_{ab} = R_{acb}^c$, где R_{acb}^c – риманов тензор кривизны, симметрии тензора Риччи имеют естественную геометрическую интерпретацию [7]–[9]. Что касается их физических следствий, то в работах [10], [11] этот аспект обсуждался в деталях на основании анализа законов сохранения, допускающихся различными типами полей материи. Также в указанных работах обсуждались некоторые

интересные применения полученных результатов в релятивистской гидродинамике и физике плазмы. В работе [12] с использованием КР были получены законы сохранения для идеальной жидкости. В работе [13] изучались некоторые свойства жидкого пространства-времени, допускающего КР, а также свойства разнообразных неидеальных жидкостей с ненулевой космологической постоянной и анизотропным давлением. Помимо таких физических выводов, использование КР также позволяет найти новые точные решения или провести классификацию известных решений полевых уравнений Эйнштейна [14]–[22].

Конформные симметрии представляют особый интерес, поскольку они дают возможность более глубоко понять геометрию пространства-времени и тем самым имеют большое физическое значение. КВК переводят нулевые геодезические в нулевые геодезические и сохраняют световой конус. Также они порождают интегралы движения вдоль нулевых геодезических для безмассовых частиц. Это свойство связывает конформную симметрию с хорошо определенной сохраняющейся величиной, имеющей физический смысл. Эффекты конформной симметрии также можно увидеть на кинематическом и динамическом уровнях [23].

Как и метрика пространства-времени, тензоры Риччи и энергии-импульса имеют важное значение, поскольку они играют существенную роль в теории относительности, приближая нас к пониманию геометрической и физической структуры пространства-времени. В то время как конформные симметрии хорошо представлены в литературе [24]–[29], тензоры Риччи и энергии-импульса не так широко исследовались с точки зрения их симметрий [4], [30]. Учитывая тот факт, что классификация пространств-времен по конформным коллинеациям тензоров Риччи и энергии-импульса представляет интерес, в настоящей статье мы даем такую полную классификацию статических плоских симметричных пространств.

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы выписываем десять связанных уравнений ККР и ККМ для статического плоского симметричного пространства-времени. В разделе 3 мы классифицируем такие пространства-времена в соответствии с их ККР и ККМ, считая тензор энергии-импульса невырожденным. В разделе 4 уравнения ККР и ККМ решаются в случае вырожденного тензора энергии-импульса. Точный вид метрики статического плоского симметричного пространства-времени, допускающей нетривиальные ККР и ККМ, приведен в разделе 5. Последний раздел 6 содержит заключение и краткие выводы, а также некоторые физические следствия из полученных результатов.

2. УРАВНЕНИЯ ККР И ККМ

Плоское симметричное пространство-время является лоренцевым многообразием, допускающим трехмерную группу изометрий G_3 такую, что орбиты этой группы суть пространственноподобные поверхности постоянной кривизны. В статическом случае такое пространство-время имеет времениподобный ВК. Наиболее общий вид элемента длины задается как [31]

$$ds^2 = e^{2\alpha(x)} dt^2 - dx^2 - e^{2\beta(x)} [dy^2 + dz^2], \quad (2.1)$$

где функции α и β зависят только от x . Данная метрика допускает четыре ВК:

$$\xi_{(1)} = \partial_t, \quad \xi_{(2)} = \partial_y, \quad \xi_{(3)} = \partial_z, \quad \xi_{(4)} = z\partial_y - y\partial_z. \quad (2.2)$$

Ненулевые компоненты тезора Риччи для метрики (2.1) суть

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{2\alpha}(\alpha'' + 2\alpha'\beta' + \alpha'^2) = A(x), \\ R_{11} &= -2(\beta'' + \beta'^2) - (\alpha'' + \alpha'^2) = B(x), \\ R_{22} &= R_{33} = -e^{2\beta}(\beta'' + \alpha'\beta' + 2\beta'^2) = C(x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где штрих означает производную функции по x . Скаляр Риччи R определяется как

$$R = 2(\alpha'' + \alpha'^2) + 4(\alpha'\beta' + \beta'') + 6\beta'^2. \quad (2.4)$$

Используя полевые уравнения Эйнштейна $R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} = kT_{ab}$, получаем компоненты тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} T_{00} &= -e^{2\alpha}(2\beta'' + 3\beta'^2), & T_{11} &= \beta'^2 + 2\alpha'\beta', \\ T_{22} &= T_{33} = e^{2\beta}(\beta'' + \alpha'\beta' + \beta'^2 + \alpha'' + \alpha'^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя компоненты (1.2) тензора Риччи, выводим следующие уравнения ККР:

$$A'\xi^1 + 2A\xi_{,0}^0 = 2\lambda A, \quad (2.6)$$

$$A\xi_{,1}^0 + B\xi_{,0}^1 = 0, \quad (2.7)$$

$$A\xi_{,2}^0 + C\xi_{,0}^2 = 0, \quad (2.8)$$

$$A\xi_{,3}^0 + C\xi_{,0}^3 = 0, \quad (2.9)$$

$$B'\xi^1 + 2B\xi_{,1}^1 = 2\lambda B, \quad (2.10)$$

$$B\xi_{,2}^1 + C\xi_{,1}^2 = 0, \quad (2.11)$$

$$B\xi_{,3}^1 + C\xi_{,1}^3 = 0, \quad (2.12)$$

$$C'\xi^1 + 2C\xi_{,2}^2 = 2\lambda C, \quad (2.13)$$

$$C(\xi_{,3}^2 + \xi_{,2}^3) = 0, \quad (2.14)$$

$$C'\xi^1 + 2C\xi_{,3}^3 = 2\lambda C. \quad (2.15)$$

Уравнения ККМ получаются из данной системы путем замен $A(x) = T_{00}$, $B(x) = T_{11}$ и $C(x) = T_{22} = T_{33}$. Чтобы найти явный вид ККР и ККМ в статическом плоском симметричном пространстве-времени, необходимо решить эти системы уравнений. В следующем разделе мы получим решение для ККР, решение для ККМ получается аналогично.

3. ККР В СЛУЧАЕ НЕВЫРОЖДЕННОГО ТЕНЗОРА РИЧЧИ

Получим решение уравнений (2.6)–(2.15), считая тензор Риччи R_{ab} невырожденным, т. е. полагая $\det R_{ab} \neq 0$. Это означает, что A , B и C отличны от нуля. Продифференцируем уравнения (2.8), (2.11) по z , уравнения (2.9), (2.12) – по y , а уравнение (2.14) – по t и по x , получим

$$\xi_{,03}^2 = \xi_{,23}^0 = \xi_{,23}^1 = \xi_{,13}^2 = \xi_{,02}^3 = \xi_{,12}^3 = 0. \quad (3.1)$$

Разделим уравнения (2.10) и (2.13) на $2B$ и $2C$ соответственно, вычтем получившиеся уравнения одно из другого и затем продифференцируем результат по y и z , в итоге получим $\xi_{,223}^2 = 0$. Таким образом, имеем

$$\xi_{,3}^2 = yF^1(t, x, z) + F^2(t, x, z), \quad (3.2)$$

где $F^1(t, x, z)$ и $F^2(t, x, z)$ – постоянные интегрирования (по y). Подставим $\xi_{,3}^2$ в (2.14) и проинтегрируем это уравнение по y , получим

$$\xi^3 = -\frac{y^2}{2}F^1(t, x, z) - yF^2(t, x, z) + F^3(t, x, z), \quad (3.3)$$

где $F^3(t, x, z)$ – постоянная интегрирования. Вычитая уравнение (2.15) из (2.13), получаем

$$\xi_{,2}^2 = \xi_{,3}^3. \quad (3.4)$$

После дифференцирования этого уравнения один раз по z и дважды по y имеем

$$\begin{aligned} F^1(t, x, z) &= zf^1(t, x) + f^2(t, x), & F^2(t, x, z) &= zf^3(t, x) + f^4(t, x), \\ F^3(t, x, z) &= \frac{z^3}{6}f^1(t, x) + \frac{z^2}{2}f^2(t, x) + zf^5(t, x) + f^6(t, x), \end{aligned}$$

где $f^i(t, x)$ – постоянные интегрирования, $i = 1, \dots, 6$. Если подставить F^2 и F^3 в (3.2) и проинтегрировать это уравнение по z , то мы получим

$$\xi^2 = y\left(\frac{z^2}{2}f^1(t, x) + zf^2(t, x)\right) + \frac{z^2}{2}f^3(t, x) + zf^4(t, x) + F^4(t, x, y), \quad (3.5)$$

где $F^4(t, x, y)$ – постоянная интегрирования. Используя выражения (3.5) и (3.3) для ξ^2 и ξ^3 в уравнении (3.4) и интегрируя его по y , имеем

$$F^4(t, x, y) = -\frac{y^3}{6}f^1(t, x) - \frac{y^2}{2}f^3(t, x) + yf^5(t, x) + f^7(t, x),$$

где $f^7(t, x)$ – постоянная интегрирования. Наконец, компоненты ξ^2 (3.5) и ξ^3 (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \xi^2 &= y\left(\frac{z^2}{2}f^1(t, x) + zf^2(t, x)\right) + \frac{z^2}{2}f^3(t, x) + zf^4(t, x) - \frac{y^3}{6}f^1(t, x) - \\ &\quad - \frac{y^2}{2}f^3(t, x) + yf^5(t, x) + f^7(t, x), \\ \xi^3 &= -\frac{y^2}{2}(zf^1(t, x) + f^2(t, x)) - y(zf^3(t, x) + f^4(t, x)) + \frac{z^3}{6}f^1(t, x) + \\ &\quad + \frac{z^2}{2}f^2(t, x) + zf^5(t, x) + f^6(t, x). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Используя получившееся выражение для ξ^2 в уравнении (2.8) и интегрируя его по y , имеем

$$\begin{aligned} \xi^0 &= -\frac{C}{A}\left[\frac{y^2}{2}\left(\frac{z^2}{2}f_t^1(t, x) + zf_t^2(t, x)\right) + y\left(\frac{z^2}{2}f_t^3(t, x) + zf_t^4(t, x)\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y^4}{24}f_t^1(t, x) - \frac{y^3}{6}f_t^3(t, x) + \frac{y^2}{2}f_t^5(t, x) + yf_t^7(t, x)\right] + F^5(t, x, z), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $F^5(t, x, z)$ – постоянная интегрирования. Подставляя ξ^0 и ξ^3 в уравнение (2.9), после несложных алгебраических преобразований мы получаем, что

$$\begin{aligned} f_t^1(t, x) &= f_t^2(t, x) = f_t^3(t, x) = f_t^4(t, x) = 0, \\ F^5(t, x, z) &= -\frac{C}{A}\left(\frac{z^2}{2}f_t^5(t, x) + zf_t^6(t, x)\right) + f^8(t, x). \end{aligned}$$

С этими функциями выражение (3.7) принимает вид

$$\xi^0 = -\frac{C}{A} \left(\frac{y^2}{2} f_t^5(t, x) + y f_t^7(t, x) + \frac{z^2}{2} f_t^5(t, x) + z f_t^6(t, x) \right) + f^8(t, x), \quad (3.8)$$

где $f^8(t, x)$ – постоянная интегрирования.

Аналогично, после подстановки ξ^2 из (3.6) в уравнение (2.11) непосредственные вычисления приводят к $f_x^1(t, x) = f_x^2(t, x) = f_x^3(t, x) = f_x^4(t, x) = 0$ и

$$\xi^1 = -\frac{C}{B} \left(\frac{y^2}{2} f_x^5(t, x) + y f_x^7(t, x) + \frac{z^2}{2} f_x^5(t, x) + z f_x^6(t, x) \right) + f^9(t, x), \quad (3.9)$$

где через $f^9(t, x)$ обозначена функция, возникшая в результате интегрирования. Отсюда $f^i(t, x) = a_i$, где $a_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, 4$, и мы получаем следующие компоненты порождающего ККР векторного поля, которые содержат некоторые неизвестные функции от t и x :

$$\begin{aligned} \xi^0 &= -\frac{C}{A} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} f_t^5(t, x) + y f_t^7(t, x) + z f_t^6(t, x) \right) + f^8(t, x), \\ \xi^1 &= -\frac{C}{B} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} f_x^5(t, x) + y f_x^7(t, x) + z f_x^6(t, x) \right) + f^9(t, x), \\ \xi^2 &= a_1 \left(\frac{y z^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) + a_2 y z + a_3 \left(\frac{z^2 - y^2}{2} \right) + a_4 z + y f^5(t, x) + f^7(t, x), \\ \xi^3 &= a_1 \left(\frac{z^3}{6} - \frac{y^2 z}{2} \right) + a_2 \left(\frac{z^2 - y^2}{2} \right) - a_3 y z - a_4 y + z f^5(t, x) + f^6(t, x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Конформный множитель λ с учетом уравнения (2.13) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{C'}{2B} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} f_x^5(t, x) + y f_x^7(t, x) + z f_x^6(t, x) \right) + \\ &+ \frac{C'}{2C} f^9(t, x) + a_1 \left(\frac{z^2 - y^2}{2} \right) + a_2 z - a_3 y + f^5(t, x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подставим ξ^a (3.10) и λ (3.11) в уравнения (2.6), (2.7) и (2.10), получим $a_1 = 0$ и следующие условия интегрируемости:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{C'}{C} - \frac{A'}{A} \right) f_x^5(t, x) - \frac{B}{A} f_{tt}^5(t, x) &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{C'}{C} - \frac{A'}{A} \right) f_x^6(t, x) - \frac{B}{A} f_{tt}^6(t, x) - a_2 \frac{B}{C} &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{C'}{C} - \frac{A'}{A} \right) f_x^7(t, x) - \frac{B}{A} f_{tt}^7(t, x) + a_3 \frac{B}{C} &= 0, \\ 2C f_{tx}^5(t, x) + A \left(\frac{C}{A} \right)' f_t^5(t, x) &= 0, \quad 2C f_{tx}^6(t, x) + A \left(\frac{C}{A} \right)' f_t^6(t, x) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2Cf_{tx}^7(t, x) + A\left(\frac{C}{A}\right)'f_t^7(t, x) &= 0, & \frac{C}{B}f_{xx}^5(t, x) + \frac{1}{2}\left(\frac{C}{B}\right)'f_x^5(t, x) &= 0, \\
 \frac{C}{B}f_{xx}^6(t, x) + \frac{1}{2}\left(\frac{C}{B}\right)'f_x^6(t, x) + a_2 &= 0, \\
 \frac{C}{B}f_{xx}^7(t, x) + \frac{1}{2}\left(\frac{C}{B}\right)'f_x^7(t, x) - a_3 &= 0, \\
 \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C}\right)f^9(t, x) + f_t^8(t, x) - f^5(t, x) &= 0, \\
 \frac{1}{2}\left(\frac{B'}{B} - \frac{C'}{C}\right)f^9(t, x) + f_x^9(t, x) - f^5(t, x) &= 0, & Af_x^8(t, x) + Bf_t^9(t, x) &= 0.
 \end{aligned}$$

Решив эту систему, мы получим окончательный вид ККР (3.10) и соответствующего конформного множителя (3.11).

Чтобы записать ККР, конформный множитель и условия интегрируемости в более компактной форме, введем новые переменные

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \left(\frac{y^2 + z^2}{2}, z, y\right), \quad (P^1, P^2, P^3) = (f^5, f^6, f^7), \quad P^0 = f^8, \quad P^4 = f^9.$$

В этих переменных можно записать систему (3.10) и конформный множитель (3.11) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \xi^0 &= -\frac{C}{A}\eta_i P_t^i + P^0, & \xi^1 &= -\frac{C}{B}\eta_i P_x^i + P^4, \\
 \xi^2 &= (\eta_i)_{,2} P^i + a_2 y z + a_3 \left(\frac{z^2 - y^2}{2}\right) + a_4 z, \\
 \xi^3 &= (\eta_i)_{,3} P^i + a_2 \left(\frac{z^2 - y^2}{2}\right) - a_3 y z - a_4 y, \\
 \lambda &= -\frac{C'}{2B}\eta_i P_x^i + \frac{C'}{2C}P^4 + P^1 + a_2 z - a_3 y,
 \end{aligned}$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. При этом условия интегрируемости сводятся к

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\left(\frac{C'}{C} - \frac{A'}{A}\right)P_x^i(t, x) - \frac{B}{A}P_{tt}^i(t, x) + k_i \frac{B}{C} &= 0, \\
 2CP_{tx}^i(t, x) + A\left(\frac{C}{A}\right)'P_t^i(t, x) &= 0, \\
 \frac{C}{B}P_{xx}^i(t, x) + \frac{1}{2}\left(\frac{C}{B}\right)'P_x^i(t, x) - k_i &= 0, \\
 \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C}\right)P^4(t, x) + P_t^0(t, x) - P^1(t, x) &= 0, \\
 \frac{1}{2}\left(\frac{B'}{B} - \frac{C'}{C}\right)P^4(t, x) + P_x^4(t, x) - P^1(t, x) &= 0, \\
 AP_x^0(t, x) + BP_t^4(t, x) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $k_i = 0, -a_2, a_3$ для $i = 1, 2, 3$ соответственно. Для полной классификации ККР при невырожденном тензоре Риччи решим уравнения (3.12), рассматривая следующие случаи:

$$\begin{array}{ll}
 \text{ND1)} & A' = B' = C' = 0, \\
 \text{ND3)} & A' = C' = 0, \quad B' \neq 0, \\
 \text{ND5)} & A' = 0, \quad B' \neq 0, \quad C' \neq 0, \\
 \text{ND7)} & A' \neq 0, \quad B' \neq 0, \quad C' = 0, \\
 \text{ND2)} & B' = C' = 0, \quad A' \neq 0, \\
 \text{ND4)} & A' = B' = 0, \quad C' \neq 0, \\
 \text{ND6)} & A' \neq 0, \quad B' = 0, \quad C' \neq 0, \\
 \text{ND8)} & A' \neq 0, \quad B' \neq 0, \quad C' \neq 0.
 \end{array}$$

Хорошо известно, что всякий ВК является КР, поэтому множество ККР, получающихся в результате решения системы (3.12) в каждом из вышеупомянутых случаев, содержит четыре ВК, образующих базис пространства-времени, упомянутый в (2.2).

В приложении А к электронной версии [32] настоящей статьи приведены результаты, полученные в каждом из указанных выше случаев, и представлены ККР, соответствующие конформные множители и ограничения, налагаемые на компоненты тензора Риччи. Заметим, что в некоторых случаях, когда в тензоре Риччи производные компонент A, B, C равны нулю, эти компоненты полагаются равными единице.

В силу математического сходства уравнений для ККР и ККМ можно напрямую записать явный вид ККМ, не решая уравнения. Разумеется, если заменить A, B и C на T_{00}, T_{11} и T_{22} , то, повторив ту же процедуру, что и выше, мы получим те же явные выражения для ККМ, что и для ККР, с единственным отличием, что ограничения налагаются на компоненты тензора энергии-импульса.

4. ККР В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕННОГО ТЕНЗОРА РИЧЧИ

Для вырожденного тензора Риччи мы имеем $\det R_{ab} = ABC^2 = 0$, что приводит к следующим возможным случаям:

$$\begin{array}{ll}
 \text{D1)} & A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C = 0, \\
 \text{D3)} & A = 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0, \\
 \text{D5)} & A = C = 0, \quad B \neq 0, \\
 \text{D2)} & A \neq 0, \quad B = 0, \quad C \neq 0, \\
 \text{D4)} & A \neq 0, \quad B = C = 0, \\
 \text{D6)} & A = B = 0, \quad C \neq 0.
 \end{array}$$

В каждом из случаев мы непосредственно решаем систему уравнений (2.6)–(2.15). В случае D1 остаются следующие уравнения:

$$A'\xi^1 + 2A\xi_{,0}^0 = 2\lambda A, \quad (4.1)$$

$$A\xi_{,1}^0 + B\xi_{,0}^1 = 0, \quad (4.2)$$

$$\xi_{,2}^0 = \xi_{,3}^0 = \xi_{,2}^1 = \xi_{,3}^1 = 0, \quad (4.3)$$

$$B'\xi^1 + 2B\xi_{,1}^1 = 2\lambda B. \quad (4.4)$$

Решив уравнения (4.2) и (4.3), мы имеем

$$\xi^0 = f_t(t, x), \quad \xi^1 = -\frac{A}{B}f_x(t, x) + g(x), \quad (4.5)$$

где $f(t, x)$ и $g(x)$ – неизвестные постоянные интегрирования. Конформный множитель λ после подстановки (4.5) в уравнение (4.4) принимает вид

$$\lambda = \left(\frac{AB' - 2A'B}{2B^2} \right) f_x(t, x) - \frac{A}{B} f_{xx}(t, x) + \frac{B'}{2B} g(x) + g_x(x). \quad (4.6)$$

Подставляя (4.5) и (4.6) в уравнение (4.1), получаем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A}{B} \right)' f_x(t, x) + \frac{A}{B} f_{xx}(t, x) + f_{tt}(t, x) + \left(\frac{A'}{2A} - \frac{B'}{2B} \right) g(x) - g_x(x) = 0. \quad (4.7)$$

Это уравнение существенно нелинейно и в общем случае не может быть решено аналитически. Однако можно выбрать специфические функции $f(t, x)$ и $g(x)$ так, что уравнение будет выполнено. При таком выборе $f(t, x)$ и $g(x)$ мы можем получить окончательный вид компонент ξ^0 и ξ^1 ККР из (4.5). Две другие компоненты ξ^2 и ξ^3 являются произвольными функциями от t, x, y и z . Таким образом, в данном случае мы имеем бесконечное число ККР, удовлетворяющих дифференциальному ограничению (4.7).

Решения уравнений (2.6)–(2.15) в оставшихся пяти случаях получаются непосредственно, и в каждом из этих случаев мы имеем бесконечное число ККР (см. электронный препринт [32], где выписаны соответствующие ККР).

Аналогично решаются уравнения ККМ при вырожденном тензоре энергии-импульса, и мы приходим к заключению, что существует бесконечно много ККМ. Как и в невырожденном случае, явный вид ККМ совпадает с ККР с той лишь разницей, что A, B и C заменяются на T_{00}, T_{11} и T_{22} , и это дает ограничения, отличные от условий для ККР.

5. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ, ДОПУСКАЮЩЕЕ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ККР И ККМ

Из таблиц 1–9 в [32] мы видим, что статическое плоское симметричное пространство-время допускает семь, десять или пятнадцать ККР и ККМ для невырожденных тензоров Риччи и энергии-импульса. Но в случае вырожденных тензоров ККР и ККМ имеют бесконечно много степеней свободы. Чтобы показать, что классы ККР и ККМ непустые, необходимо построить некоторые специальные плоские метрики, которые удовлетворяют в каждом случае необходимым ограничениям. В данном разделе мы приводим примеры таких метрик.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим следующую статическую симметричную плоскую метрику, допускающую семь КР [20]:

$$ds^2 = x^2 dt^2 - dx^2 - x^4(dy^2 + dz^2). \quad (5.1)$$

Эта метрика удовлетворяет условиям случая ND5 с $B = C'^2/4kC^2$ при $k = -1/4$ и, следовательно, допускает пятнадцать ККР, из которых семь являются КР. Компоненты тензора энергии-импульса для метрики (5.1) таковы: $T_{00} = -8$, $T_{11} = 8/x^2$ и $T_{22} = T_{33} = 4x^2$, что отвечает случаю ND5 при $k = 1/8$, если мы заменим A, B и C на T_{00}, T_{11} и T_{22} . Следовательно мы имеем пятнадцать ККМ, из которых семь являются КМ. Нетрудно проверить, что метрика (5.1) конформно плоская.

ПРИМЕР 5.2. Теперь рассмотрим следующую статическую плоскую симметричную метрику:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - e^x(dy^2 + dz^2). \quad (5.2)$$

Компоненты тензора энергии-импульса для метрики (5.2) таковы: $T_{00} = -3/4$, $T_{11} = 1/4$ и $T_{22} = T_{33} = e^x/4$. Эти значения, очевидно, отвечают случаю ND4 с $C = ke^x$ при $k = 1/4$ (см. случай ND4с в [32]), если мы заменим A , B и C на T_{00} , T_{11} и T_{22} . Следовательно мы имеем пятнадцать ККМ, из которых семь являются КМ. Компоненты тензора Риччи для метрики (5.2) суть $A = 0$, $B = -1/2$ и $C = -e^x/2$, что дает случай D3 для вырожденного тензора Риччи. Следовательно, в данном случае мы имеем бесконечно много ККР.

ПРИМЕР 5.3. Рассмотрим следующую статическую плоскую симметричную метрику:

$$ds^2 = x^{4/3}(dt^2 - dy^2 - dz^2) - dx^2. \quad (5.3)$$

Компоненты тензора энергии-импульса для метрики (5.3) суть $T_{00} = T_{22} = T_{33} = 0$ и $T_{11} = 4/3x^2$ и отвечают случаю D5. Следовательно, здесь мы имеем бесконечно много ККМ. Компоненты тензора Риччи для метрики (5.3) суть $A(x) = 14/9x^{2/3}$, $B(x) = -2/9x^2$ и $C(x) = -4/9x^{2/3}$. Они отвечают случаю ND8a при $k = -7/2$, и мы имеем пятнадцать ККР.

ПРИМЕР 5.4. Для $\alpha = \text{const}$ и $\beta = (2/3) \ln x$ статическая плоская симметричная метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - x^{4/3}(dy^2 + dz^2). \quad (5.4)$$

Для этой метрики мы имеем компоненты тензора Риччи $A(x) = 0$, $B(x) = 4/9x^2$ и $C(x) = -2x^{-2/3}/9$, которые удовлетворяют условиям D3, следовательно, существует бесконечно много ККР. Скаляр Риччи для данной метрики равен нулю, поэтому компоненты тензора энергии-импульса совпадают с компонентами тензора Риччи. Таким образом, мы имеем бесконечно много ККМ, как и ККР.

6. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Мы представили полную классификацию статических плоских симметричных пространств-времен в соответствии с их ККР и ККМ, рассмотрев при этом невырожденный и вырожденный случаи. Наш результат является обобщением результата статьи [20]. На основании нашей работы также можно получить классификацию в случае, когда конформный множитель $\lambda = \text{const}$.

Наш анализ показал, что если тензор Риччи вырожден, то ККР имеют бесконечное число степеней свободы. Следует заметить, что рассмотренные нами пространства допускают конечное число КР, если $A \neq 0$, $C \neq 0$ и $B = 0$ [20], в то время как мы в данном случае получили бесконечно много ККР (см. случай D2). Положив в случае D2a (см. приложение В в [32]) $\lambda = 0$, мы без труда получаем в точности десять КР, которые представлены в работе [20] при тех же ограничениях. Однако, если рассмотреть $\lambda = 0$ в случае D2b, мы имеем четыре базисных ВК в статическом плоском симметричном пространстве-времени при $C' \neq 0$ и бесконечно много ВК при $C' = 0$. При тех же ограничениях в работе [20] были получены соответствующие КР вместе с четырьмя ВК, которые, как оказалось, неверны (см. систему (2.2)

в указанной работе). Аналогичные замечания остаются справедливыми и в случае вырожденных ККМ.

В случае невырожденных тензоров Риччи и энергии-импульса наша классификация показывает, что статическое плоское симметричное пространство-время допускает семи-, десяти- или пятнадцатимерную алгебру Ли ККР или ККМ. При $\lambda = 0$ во всех невырожденных случаях мы можем заметить, что число независимых ККР и ККМ равно 4, 5, 6, 7 или 10, и это совпадает с результатами работы [20].

Каждому набору ККР и ККМ, представленному в настоящей работе, отвечают определенные ограничения на компоненты тензоров Риччи и энергии-импульса. Решение этих уравнений дает точный вид метрики пространства-времени, допускающей данные ККР и ККМ. Вследствие высокой нелинейности уравнений в общем случае их решение получить сложно. Однако мы нашли некоторые специальные метрики, удовлетворяющие этим ограничениям.

Хотя уравнения для ККР и ККМ выглядят аналогично, наша классификация показывает, что их решения могут порождать разные алгебры Ли. Это видно из примеров раздела 5.

Чтобы продемонстрировать физические следствия из полученных нами результатов, рассмотрим идеальную жидкость как источник тензора энергии-импульса. Мы имеем $T_{ab} = (p + \rho)u_a u_b - pg_{ab}$, где p , ρ и u^a – давление, плотность энергии и 4-скорость идеальной жидкости. Зададим скорость как $u^a = e^{-\alpha}\delta_0^a$, тогда $T_{00} = \rho e^{2\alpha}$, $T_{11} = p$ и $T_{22} = T_{33} = pe^{2\beta}$. Следовательно, мы имеем следующий метрический тензор полей материи:

$$ds_{\text{Perfect}}^2 = \rho e^{2\alpha} dt^2 + p dx^2 + pe^{2\beta}(dy^2 + dz^2); \quad (6.1)$$

он положительно определен, если $\rho > 0$ и $p > 0$. Используя (2.5), мы можем записать компоненты тензора Риччи:

$$A(x) = \frac{3p + \rho}{2} e^{2\alpha}, \quad B(x) = \frac{\rho - p}{2}, \quad C(x) = \frac{\rho - p}{2} e^{2\beta}. \quad (6.2)$$

Метрическая форма тензора Риччи такова:

$$2ds_{\text{Ricci}}^2 = (3p + \rho)e^{2\alpha} dt^2 + (\rho - p) dx^2 + (\rho - p)e^{2\beta}(dy^2 + dz^2). \quad (6.3)$$

Тензор Риччи положительно определен, если $\rho > 0$, $3p + \rho > 0$ или $\rho > |p|$. Эти неравенства задают соответственно слабое, сильное условия или условие энергодоминантности. Как следствие баротропное уравнение состояния $p = p(\rho)$ имеет линейный вид $p = (\gamma - 1)\rho$ [16], где $\gamma = \text{const}$ отвечает при $\gamma = 1$, $\gamma = 2$ и $\gamma = 4/3$ моделям Вселенной, наполненной пылью, с жесткой материей и с некогерентным излучением соответственно. Кроме того, $\gamma = 0$ приводит к модели вакуумной жидкости. Для идеальной жидкости энергетические условия таковы [16]:

$$\rho > 0, \quad 0 \leq p \leq \rho, \quad 0 \leq \frac{dp}{d\rho} \leq 1. \quad (6.4)$$

Из выражений (6.2) ясно, что $B = 0$, если и только если $C = 0$. Аналогично для идеальной жидкости $T_{11} = 0$, если и только если $T_{22} = 0$. Следовательно, идеальная жидкость невозможна в случаях D1, D2, D5 и D6. Условия D3 дают уравнение

состояния $3p + \rho = 0$, которое нарушает строгое энергетическое условие. Наконец, ограничения в случае D4 влекут $p = \rho = (A/2)e^{-2\alpha}$, и это отвечает условию жесткой материи. Кроме того, ограничения в случае D3 дают $\alpha'' + 2\alpha'\beta' + \alpha'^2 = 0$. Мы можем выбрать некоторые специальные функции α и β , удовлетворяющие этому условию. В результате получается точный вид статической плоской симметричной метрики для идеальной жидкости. Наиболее простой пример такой метрики дается формулой (5.2), где давление и плотность энергии имеют вид $p = 1/4$ и $\rho = -3/4$. Аналогично, условия D4 влекут $2(\beta'' + \beta'^2) + (\alpha'' + \alpha'^2) = 0$ и $\beta'' + \alpha'\beta' + 2\beta'^2 = 0$. Можно подобрать специальные α и β , чтобы получить точный вид статической плоской симметричной метрики для идеальной жидкости.

Если рассматривать невырожденный случай, идеальная жидкость невозможна в случае ND1 и ND2, поскольку при $B = C = \text{const}$ мы должны положить $\beta = 0$, следовательно, $C = 0$, что противоречит условию невырожденности тензора Риччи. В остальных невырожденных случаях условия, задающие модель идеальной жидкости, устанавливают связь между p и ρ , однако анализ системы (2.3) приводит к решению сильно нелинейных уравнений, содержащих функции α и β . Можно попытаться решить эти уравнения и получить точный вид плоской симметричной метрики, допускающей нетривиальные ККР и ККМ.

Благодарности. С. С. Ахтар благодарит Highes Education Comission of Pakistan за финансовую поддержку во время работы над диссертацией.

Список литературы

- [1] G. S. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, Lecture Notes in Physics, **46**, World Sci., Singapore, 2004.
- [2] M. Tsamparlis, P. S. Apostolopoulos, "Ricci and matter collineations of locally rotationally symmetric space-times", *Gen. Relat. Grav.*, **36**:1 (2004), 47–69.
- [3] U. Camci, "Conformal collineations and Ricci inheritance symmetry in string cloud and string fluids", *Internat. J. Modern Phys. D*, **11**:3 (2002), 353–366.
- [4] U. Camci, A. Qadir, K. Saifullah, "Conformal Ricci collineations of static spherically symmetric spacetimes", *Commun. Theor. Phys.*, **49**:6 (2008), 1527–1532.
- [5] G. H. Katzin, J. Levine, W. R. Davis, "Curvature collineations: a fundamental symmetry property of the space-times of general relativity defined by the vanishing Lie derivative of the Riemann curvature tensor", *J. Math. Phys.*, **10**:4 (1969), 617–629.
- [6] А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Физматгиз, М., 1961.
- [7] İ. Yavuz, U. Camci, "Ricci collineations of the Bianchi type II, VIII, and IX space-times", *Gen. Relat. Grav.*, **28**:6 (1996), 691–700.
- [8] U. Camci, H. Baysal, İ. Tarhan, İ. Yilmaz, İ. Yavuz, "Ricci collineations of the bianchi types I and III, and Kantowski–Sachs spacetimes", *Internat. J. Modern Phys. D*, **10**:5 (2001), 751–765.
- [9] U. Camci, İ. Yavuz, "Classifications of Kantowski–Sachs, Bianchi Types I and III space-times according to Ricci collineations", *Internat. J. Modern Phys. D*, **12**:1 (2003), 89–100.
- [10] W. R. Davis, G. H. Katzin, "Mechanical conservation laws and the physical properties of groups of motions in flat and curved space-times", *Amer. J. Phys.*, **30**:10 (1962), 750–764.
- [11] W. R. Davis, L. H. Green, L. K. Norris, "Relativistic matter fields admitting Ricci collineations and related conservation laws", *Nuovo Cimento B*, **34**:2 (1976), 256–280.
- [12] D. R. Oliver Jr., W. R. Davis, "Perfect fluids and symmetry mappings leading to conservation laws", *J. Math. Phys.*, **17**:10 (1976), 1790–1792.

- [13] M. Tsamparlis, D.P. Mason, “Ricci collineation vectors in fluid space-times”, *J. Math. Phys.*, **31**:7 (1990), 1707–1722.
- [14] A. Qadir, K. Saifullah, M. Ziad, “Classification of cylindrically symmetric static spacetimes according to their Ricci collineations”, *Gen. Relat. Grav.*, **35**:11 (2003), 1927–1975.
- [15] A. H. Bokhari, A. Qadir, “Collineations of the Ricci tensor”, *J. Math. Phys.*, **34**:8 (1993), 3543–3552.
- [16] U. Camci, İ. Türkyilmaz, “Ricci collineations in perfect fluid Bianchi V spacetime”, *Gen. Relat. Grav.*, **36**:9 (2004), 2005–2019.
- [17] M. J. Amir, A. H. Bokhari, A. Qadir, “Ricci collineations of static spherically symmetric spacetimes”, *J. Math. Phys.*, **35**:6 (1994), 3005–3012; Erratum **37**:2 (1996), 1089.
- [18] G. Contreras, L. A. Núñez, U. Percoco, “Ricci collineations for non-degenerate, diagonal and spherically symmetric Ricci tensors”, *Gen. Relat. Grav.*, **32**:2 (2000), 285–294.
- [19] U. Camci, A. Barnes, “Ricci collineations in Friedmann–Robertson–Walker spacetimes”, *Class. Quantum Grav.*, **19**:2 (2002), 393–404.
- [20] T. B. Farid, A. Qadir, M. Ziad, “The classification of static plane symmetric space-times according to their Ricci collineations”, *J. Math. Phys.*, **36**:10 (1995), 5812–5828.
- [21] A. H. Bokhari, “Ricci tensor with six collineations”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **31**:12 (1992), 2091–2094.
- [22] J. Llosa, “Collineations of a symmetric 2-covariant tensor: Ricci collineations”, *J. Math. Phys.*, **54**:7 (2013), 072501, 13 pp.
- [23] M. Tsamparlis, A. Paliathanasis, L. Karpapoulos, “Exact solutions of Bianchi I spacetimes which admit conformal Killing vectors”, *Gen. Relat. Grav.*, **47**:2 (2015), 15, 21 pp.
- [24] S. Moopanar, S. D. Maharaj, “Conformal symmetries of spherical spacetimes”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **49**:8 (2010), 1878–1885.
- [25] S. Moopanar, S. D. Maharaj, “Relativistic shear-free fluids with symmetry”, *J. Eng. Math.*, **82** (2013), 125–131.
- [26] K. L. Duggal, R. Sharma, “Conformal Killing vector fields on spacetime solutions of Einstein’s equations and initial data”, *Nonlinear Anal.*, **63**:5–7 (2005), e447–e454.
- [27] R. Maartens, S. D. Maharaj, B. O. J. Tupper, “General solution and classification of conformal motions in static spherical spacetimes.”, *Class. Quantum Grav.*, **12**:10 (1995), 2577–2586.
- [28] S. Khan, T. Hussain, A. H. Bokhari, G. A. Khan, “Conformal Killing vectors in LRS Bianchi type V spacetimes”, *Commun. Theor. Phys.*, **65**:3 (2016), 315–320.
- [29] S. Khan, T. Hussain, A. H. Bokhari, G. A. Khan, “Conformal Killing vectors of plane symmetric four dimensional lorentzian manifolds”, *Eur. Phys. J. C*, **75** (2015), 523, 9 pp.
- [30] M. Sharif, N. Tehseen, “Conformal Ricci and matter collineations for an anisotropic fluid”, *Chinese J. Phys.*, **45**:6-I (2007), 592–605, arXiv: 0707.2989.
- [31] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [32] S. S. Akhtar, T. Hussain, A. H. Bokhari, F. Khan, *Conformal collineations of the Ricci and energy-momentum tensors in static plane symmetric spacetimes*, arXiv: 1702.04637.

Поступила в редакцию 21.02.2017