Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Гетманов, П. М. Сатклифф, Динамика солитонов в теории Янга–Миллса–Хиггса в $(2 + 1)$ измерениях, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 3, 339–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf936>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:26:17

© 1998 г.

Б. С. Гетманов*, П. М. Сатклифф†

ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА–ХИГГСА В $(2 + 1)$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Размерная редукция уравнения самодуальности в теории Янга–Миллса в $(2 + 2)$ измерениях дает интегрируемое уравнение Янга–Миллса–Хиггса–Богомольного в $(2 + 1)$ измерениях. Для калибровочной группы $SU(1, 1)$ с помощью анзаца типа Тофта получены солитон типа монополя и решение N -солитонного типа, которое описывает как статические деформированные монополи, так и экзотическую динамику монополей, включая трансмутацию. Показано, как найденное монополярное решение получается в рамках твисторного формализма, и приведено несколько замечаний относительно многомонополярных решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитонные решения интересны для многих полевых теорий как классической, так и квантовой физики. Такие солитонные системы удобно классифицировать с помощью понятия интегрируемости. Интегрируемые уравнения встречаются, главным образом, в $(1 + 1)$ измерениях и характеризуются рядом специальных свойств, таких как наличие бесконечного числа сохраняющихся величин. Многосолитонные решения могут быть построены явно с помощью методов, подобных методу обратной задачи рассеяния. Обобщение интегрируемых систем на высшие размерности оказалось менее плодотворным. Известно ограниченное число примеров интегрируемых систем в $(2 + 1)$ измерениях, но все они нерелятивистские.

Что касается неинтегрируемых систем, существует множество примеров многомерных солитонов, таких как скирмионы, монополи, вихри и сгустки. Соответствующие теории являются релятивистскими, а солитоны имеют топологическую природу. Неинтегрируемость этих систем означает, что для изучения динамики солитонов нужно использовать численное моделирование и приближенные аналитические методы. Несмотря на их ограниченность очень многое уже известно, например, о динамике монополей Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ) [1–3]. Оказывается, что динамика солитонов в этих системах в высшей степени нетривиальна.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: bget@get.jinr.dubna.su

†Department of Mathematics, Heriot-Watt University, Riccarton, Edinburgh, U.K. E-mail: paul@cara.ma.hw.ac.uk

Одним из важных примеров интегрируемой системы в высших измерениях является уравнение самодуальности в теории Янга–Миллса (ЯМ). Исследование этого уравнения и его размерная редукция не только привели к унификации известных низкоразмерных интегрируемых систем [4], но и дали новые примеры интегрируемых уравнений в высших измерениях [5]. Именно при исследовании одной из таких интегрируемых моделей в $(2 + 1)$ измерениях недавно было показано [6], что динамика солитонов в интегрируемых моделях может быть очень сложной. При этом открывается область, в которой могут встретиться новые явления, отсутствующие в низших измерениях, и которая обеспечивает связь между солитонами интегрируемых и неинтегрируемых систем. В настоящей работе построены решения монопольного типа для интегрируемых релятивистских уравнений в теории Янга–Миллса–Хиггса. Хотя уравнения интегрируемы, динамика монополей может быть весьма нетривиальной.

2. ИНСТАНТОННАЯ КОНСТРУКЦИЯ БПЗ-МОНОПОЛЯ

В этом разделе мы даем краткий обзор инстантонной конструкции Мантона для БПЗ-монополя [7]. Рассмотрим калибровочную теорию $SU(2)$ в евклидовом четырехмерном пространстве. Пространственно-временные координаты обозначим через x_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, метрику – через $\eta^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$. Пусть A_μ – калибровочный потенциал, принимающий значения в алгебре $su(2)$, калибровочное поле $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$. Тогда уравнение самодуальности ЯМ имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.1)$$

где $e_{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный тензор. Если мы проводим размерную редукцию, налагая требование независимости калибровочных потенциалов от координаты x_3 , т.е. $\partial_3 A_\mu = 0$, и отождествляя остаточный калибровочный потенциал с полем Хиггса, т.е. $\Phi = A_3$, то (2.1) переходит в уравнение Богомольного для статических БПЗ-монополей в трехмерном пространстве:

$$D_\mu \Phi = -\frac{1}{2} e_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

где $D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \cdot]$ – ковариантная производная, а индексы пробегает значения 0, 1, 2.

Решения уравнений самодуальности ЯМ могут быть получены с помощью анзаца Корригана–Фэрли–Тофта–Вильчека (КФТВ) [8–11]

$$A_\mu = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \log \rho, \quad (2.3)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = (e_{0\mu\nu\alpha} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{0\nu} - \delta_{0\mu}\delta_{\nu\alpha})\sigma^\alpha$ и σ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, – матрицы Паули. Действительная функция $\rho(x_\mu)$ называется суперпотенциалом. Подставляя анзац (2.3) в (2.1), мы получим решение уравнений самодуальности ЯМ, если суперпотенциал удовлетворяет уравнению

$$\square \rho = 0, \quad (2.4)$$

где $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ – волновой оператор в $(4 + 0)$ измерениях.

Для выполнения размерной редукции к монополю уравнению необходимо, чтобы калибровочные потенциалы не зависели от x_3 . Этого можно добиться, полагая

$$\rho = e^{\lambda x_3} \zeta(x_0, x_1, x_2), \quad (2.5)$$

где λ – действительная константа. Тогда уравнение для ζ является уравнением Гельмгольца

$$\nabla^2 \zeta + \lambda^2 \zeta = 0, \quad (2.6)$$

где ∇^2 – волновой оператор в $(3 + 0)$ измерениях. Однако решения (2.6) приводят к сингулярным калибровочным потенциалам, т.к., чтобы калибровочные поля были не-сингулярными, ρ не должен обращаться в нуль. После замены λ на $i\lambda$ уравнение (2.6) приобретает вид

$$\nabla^2 \zeta - \lambda^2 \zeta = 0. \quad (2.7)$$

Решения уравнения (2.7) приводят к несингулярным, но комплексным калибровочным потенциалам. Радиально-симметричное решение уравнения (2.7) дается выражением

$$\zeta = \frac{1}{r} \operatorname{sh} \lambda r, \quad (2.8)$$

и хотя калибровочные потенциалы являются комплексными, комплексным калибровочным преобразованием их можно привести к действительному виду, отвечающему БПЗ-монополю [7]. Именно эта конструкция БПЗ-монополя стала отправным пунктом нашей работы по построению монополей в $(2 + 1)$ измерениях.

Это построение БПЗ-монополя можно переформулировать таким образом, чтобы избежать комплексификации; при этом монополь можно интерпретировать как возникающий из бесконечной инстантонной цепочки [12]. Эта интерпретация имеет двумерный аналог, в котором солитоны уравнения синус-Гордон могут быть бесконечными пределами $\mathbb{CP}^1$ -инстантонных цепочек [13].

3. УРАВНЕНИЕ ЯНГА–МИЛЛСА–ХИГГСА–БОГОМОЛЬНОГО

Рассмотрим уравнение самодуальности ЯМ (2.1) в $(2 + 2)$ измерениях. Запишем координаты x_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, как $x_\mu = (t, x, y, s)$, и пусть метрика имеет вид

$$dx_\mu dx^\mu = dt^2 - dx^2 - dy^2 + ds^2 \quad (3.1)$$

с временными координатами t и s и пространственными координатами x и y . Если провести размерную редукцию так, чтобы все калибровочные потенциалы не зависели от второй временной координаты s , т.е. $\partial_s A_\mu = 0$, и отождествить остаточный калибровочный потенциал с полем Хиггса, т.е. $\Phi = A_s$, то уравнение самодуальности ЯМ принимает вид

$$D_\mu \Phi = \frac{1}{2} e_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (3.2)$$

где метрика есть метрика Минковского $g^{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1)$.

Уравнение (3.2) – интегрируемое уравнение Янга–Миллса–Хиггса–Богомольного (ЯМХБ) в $(2 + 1)$ измерениях. Оно является аналогом уравнения Богомольного (2.2)

для статических монополей в трехмерном евклидовом пространстве. Заметим, что (3.2) имеет желаемое свойство лоренцевской инвариантности, т.е. обладает $SO(2, 1)$ -пространственно-временной симметрией. Уравнение Богомольного (2.2) – это уравнение первого порядка (для калибровочных потенциалов), которое дает подмножество решений уравнения второго порядка, полученного из лагранжиана. Этот лагранжиан состоит из члена, квадратичного по калибровочному полю, и члена, квадратичного по ковариантной производной поля Хиггса. Точно так же можно считать, что уравнение ЯМХБ (3.2) дает подмножество решений уравнения второго порядка, полученного из лагранжиана. Лагранжиан имеет тот же вид, что и лагранжиан, отвечающий уравнению Богомольного, только с противоположным знаком между двумя членами. Одно из следствий этого – отсутствие положительной определенности энергии. Действительно, легко видеть, что для решений (3.2) энергия обращается в нуль. Заметим, что полезной калибровочно-инвариантной величиной, описывающей эту систему, является квадрат длины поля Хиггса $\|\Phi\|^2 = -\det(\Phi)$, который, вообще говоря, в нуль не обращается.

Солитонные решения уравнения (3.2) для калибровочной группы $\mathcal{G} = SU(2)$, описывающие динамику конфигураций из многих сгустков, были построены ранее с использованием твисторных методов [14, 15] и (на основе формализма киральных полей, который нарушает лоренцевскую инвариантность) с помощью метода Римана с нулями [5]. Численное моделирование в формализме киральных полей показало, что существуют также решения, для которых динамика и рассеяние таких солитонов-сгустков очень сложны [6], несмотря на то что уравнение интегрируемо.

Уравнение (3.2) является интегрируемым для любой калибровочной группы, так что можно, например, рассматривать комплексную калибровочную группу, такую как $\mathcal{G} = SL(2, \mathbb{C})$. В упомянутых выше предыдущих работах выбиралась вещественная форма $\mathcal{G} = SU(2)$, в этой же работе мы выбираем другую вещественную форму $\mathcal{G} = SU(1, 1)$. Поэтому калибровочные потенциалы и поле Хиггса принимают значения в алгебре $su(1, 1)$, так что $A_\mu = A_\mu^\alpha T^\beta \delta_{\alpha\beta}$, $\Phi = \Phi^\alpha T^\beta \delta_{\alpha\beta}$, где T^α , $\alpha = 0, 1, 2$, являются генераторами $su(1, 1)$:

$$T^0 = \frac{i}{2}\sigma_3, \quad T^1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad T^2 = \frac{1}{2}\sigma_2.$$

В следующем разделе мы построим решение (3.2) монопольного типа, используя анзац типа КФТВ, а также приведем решения, которые описывают статические деформированные монополи и экзотическую динамику монополей.

4. МОНОПОЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Введем ковариантный лоренцевский аналог анзаца КФТВ для случая калибровочной группы $SU(1, 1)$ после редукции к $(2 + 1)$ измерениям. Определим ортонормированный базис в $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени Минковского M^3 с помощью трех векторов n_μ^α , где $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$ относятся к M^3 , а $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2$ – к внутреннему пространству. Векторы определяются следующими свойствами: $g_{\alpha\beta} n_\mu^\alpha n_\nu^\beta = g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} n_\mu^\alpha n_\nu^\beta = g^{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta\gamma} n_\mu^\alpha n_\nu^\beta n_\sigma^\gamma = e_{\mu\nu\sigma}$. Будем искать решения уравнения (3.2)

в виде

$$\begin{aligned} A_\nu^\alpha &= n_\mu^\alpha e_{\nu\sigma}^\mu \partial^\sigma \log \rho, \\ \Phi^\alpha &= n_\mu^\alpha \partial^\mu \log \rho, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\rho(t, x, y)$ – вещественнозначный суперпотенциал. Подставляя (4.1) в (3.2), получаем уравнение для суперпотенциала

$$\square \rho = 0, \quad (4.2)$$

где $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2$ – волновой оператор в $(2 + 1)$ измерениях. При этой подстановке квадрат длины поля Хиггса простым образом выражается через суперпотенциал:

$$\|\Phi\|^2 = -\frac{1}{4} \square \log \rho. \quad (4.3)$$

Построим теперь вещественные решения монопольного типа. Для удобства обозначений, следуя [16], переобозначим времениподобный вектор $n_\mu^0 = n_\mu$, пространственно-подобные векторы $n_\mu^i = k_\mu^i$, $i = 1, 2$, и введем переменную

$$\omega = \sqrt{(k^i \tilde{x})^2} = \sqrt{(n\tilde{x})^2 - \tilde{x}_\mu^2},$$

где $\tilde{x}_\mu = x_\mu - x_\mu^{(0)}$, $x_\mu^{(0)}$ – константы, а (ab) обозначает пространственно-временное внутреннее произведение $a_\mu b^\mu$. Положим также $\tau = (n\tilde{x})$. Выберем несингулярное решение уравнения (4.2) в виде

$$\rho = e^{\delta \lambda \tau} I_0(\lambda \omega), \quad (4.4)$$

где λ – вещественная константа, $\delta = \pm 1$, а I_p означает модифицированную функцию Бесселя порядка p (в [17] приведены основные свойства I_p). Это дает решение монопольного типа в произвольной системе отсчета:

$$\begin{aligned} A_\nu^\alpha &= \lambda n_\mu^\alpha e_{\nu\sigma}^\mu \left(\frac{I_1(\lambda \omega)}{I_0(\lambda \omega)} \partial^\sigma \omega + \delta n^\sigma \right), \\ \Phi^\alpha &= \lambda n_\sigma^\alpha \left(\frac{I_1(\lambda \omega)}{I_0(\lambda \omega)} \partial^\sigma \omega + \delta n^\sigma \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Хиггсовская плотность для этого решения имеет вид

$$\|\Phi\|^2 = \frac{\lambda^2}{4} \left(1 - \left(\frac{I_1(\lambda \omega)}{I_0(\lambda \omega)} \right)^2 \right). \quad (4.6)$$

Скорость монополя определяется формулой $\mathbf{v} = \mathbf{n}/n_0$, где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$. Используем стандартную параметризацию $n = (\text{ch } \beta, \text{sh } \beta \cos \phi, \text{sh } \beta \sin \phi)$ в терминах быстроты β и угла ϕ . Решение, отвечающее статическому монополю, получается, если выбрать систему покоя $n_\mu = (1, 0, 0)$, в которой $(k^i k^j) = -\delta^{ij}$, $i, j = 1, 2$, и

$$\omega = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2} = |r - r_0|.$$

Рис. 1

На рис. 1а изображена хиггсовская плотность (4.6) для статического монополя с $\lambda = 1$ и $x_\mu^{(0)} = 0$. (На всех графиках данной статьи оси x и y имеют протяженность $[-40, 40]$.) Видно, что $\|\Phi\|^2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Асимптотическое поведение статического монопольного решения имеет вид

$$\|\Phi\|^2 \sim \frac{\lambda}{4r} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Мы называем такое решение монополем размера λ . Заметим, что этот монополю не удовлетворяет граничному условию предела БПЗ ($\|\Phi\|^2 \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$) и не является топологическим солитоном.

Рассмотрим теперь решение, которое получается, если в качестве ρ взять линейную суперпозицию монопольных решений. Можно предположить сначала, что это будут обобщенные многомонопольные решения, но в данном случае это не так.

Общий “ N -солитонный” суперпотенциал есть

$$\rho = \sum_{a=1}^N e^{\delta_a \lambda_a \tau_a} I_0(\lambda_a \omega_a), \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_a &= \sqrt{(n_a [x - x_a^{(0)}])^2 - [x_\mu - x_{\mu a}^{(0)}]^2}, \\ \tau_a &= (n_a [x - x_a^{(0)}]). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Множество векторов $n_{\mu a}^\alpha$ вводится для каждой компоненты $a = 1, \dots, N$ солитонного типа. Это решение имеет $6N$ вещественных параметров, определяющих размер, скорость, угол движения и пространственно-временное положение (при $t = 0$) для каждой компоненты солитонного типа и набор параметров $\delta_a = \pm 1$. По-прежнему решение не обращается в нуль и соответственно калибровочные потенциалы не сингулярны.

Рис. 2

В данной работе мы детально анализируем случай $N = 2$. Обозначим $\delta_1/\delta_2 = \delta$. Сначала будем рассматривать случай $v_1 = v_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\delta = 1$, для которого решение (4.8) дает статический калибровочный потенциал. Если $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x^{(0)}$ и $y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = y^{(0)}$, то решение представляет собой монополю размера λ , характеризуемый положением $(x^{(0)}, y^{(0)})$ (заметим, что умножение ρ на константу не влияет на калибровочные потенциалы или поле Хиггса). Если мы теперь положим $y_1^{(0)} \neq y_2^{(0)}$, то обнаружим, что решение представляет собой статический деформированный монополю. Хиггсовская плотность всегда локализована в одной области (но не в двух отдельных областях), и максимум хиггсовской плотности расположен в точке на линии $x = x^{(0)}$ между точками $y = y_1^{(0)}$ и $y = y_2^{(0)}$. Ширина монополя уменьшается в направлении y и увеличивается в направлении x . На рис. 1б приведен график хиггсовской плотности для значений параметров $\lambda = 1$, $x^{(0)} = 0$ и $y_1^{(0)} = -y_2^{(0)} = 5$.

Теперь рассмотрим решение, зависящее от времени. Далее будем считать, что $\delta_1 = 1$ (случай $\delta_1 = -1$ может быть получен путем обращения времени). Для начала рассмотрим радиально-симметричный случай. Это потребует следующего выбора значений параметров: $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = v_1 = v_2 = 0$. При $\delta = 1$ (чтобы калибровочные потенциалы зависели от времени, необходимо, чтобы $\lambda_1 \neq \lambda_2$) мы находим, что при всех временах хиггсовская плотность представляет собой недеформированный монополю, причем размер монополя есть монотонно возрастающая функция t . Размер монополя $\lambda(t)$ как функция времени имеет асимптотические пределы $\lambda(t = -\infty) = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ и $\lambda(t = +\infty) = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Ясно, что за такое поведение ответственны аргументы в экспоненциальных множителях двух членов в (4.8). Таким образом, указанное решение описывает динамическую эволюцию монополя переменного размера. При этом имеется также эффект асимметричного во времени поведения. При отрицательных значениях времени монополю сопровождается радиальным кольцом, которое сжимается при увеличении времени и исчезает при положительных временах. Было бы интересно про-

Рис. 3

интерпретировать это кольцо как излучение. Однако это сделать невозможно, потому что скорость сжатия кольца не равна единице.

Рис. 4

На рис. 2 показана хиггсовская плотность при возрастании времени для решения со значениями параметров $\delta = 1$, $\lambda_1 = 0.4$ и $\lambda_2 = 1.0$. Показан также первый график ($t = -20$) в увеличенном виде, на котором ясно различимо кольцо. Если теперь мы рассмотрим радиально-симметричный случай с $\delta = -1$, $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 1.5$ (рис. 3), то найдем, что при $|t| \rightarrow \infty$ получается результат, аналогичный случаю $\delta = 1$ с преобладанием того или иного из складываемых монопольных решений. Однако, как и следовало ожидать из рассмотрения аргументов экспонент в (4.8), при $t \rightarrow -\infty$ получается

монополь размера λ_1 , а при $t \rightarrow +\infty$ — монополь размера λ_2 . И снова существует кольцо, которое сжимается, если время растет, и исчезает при положительных временах. Это кольцо отличается от случая $\delta = 1$ тем, что оно имеет отрицательную хиггсовскую плотность и гораздо больше по величине.

Откажемся теперь от условия радиальной симметрии и рассмотрим общее решение (4.8). Для $\delta = -1$ общая ситуация состоит в том, что для больших положительных времен решение описывает монополь с параметрами, значения которых связаны со вторым членом (4.8). Для больших отрицательных времен решение представляет собой монополь с параметрами, определяемыми первым членом (4.8). Вблизи $t = 0$ решение может быть очень сложным и даже вовсе не похожим на монополь. Поэтому такое решение, по-видимому, описывает динамику эволюции трансмутирующего монополя, который может менять размер, положение, скорость и направление.

На рис. 4 показана хиггсовская плотность при возрастании времени для решений с параметрами $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\nu_1 = 0.1$, $\phi_1 = 0$, $\nu_2 = 0.2$, $\phi_2 = \pi/2$ и $\delta = -1$. График описывает монополь, который движется вдоль оси x и переходит в монополь, движущийся вдоль оси y с удвоенной скоростью.

Рис. 5

Возвращаясь к общему случаю с $\delta = 1$, находим, что ситуация очень сильно усложнилась. В частности, решение никогда (кроме случая $\nu_1 = \nu_2 = 0$) не описывает недеформированные монополи, даже в пределе $|t| \rightarrow \infty$. Поэтому случай $\delta = 1$ труден для интерпретации.

На рис. 5 представлен график для одного из самых простых случаев, демонстрирующий экзотическую природу решения. Параметры графика таковы: $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \phi_1 = \phi_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\nu_1 = -\nu_2 = 0.9$ и $\delta = 1$. На этом графике (в отличие от предыдущих) масштаб вертикальной оси z не один и тот же для всех временных графиков, поскольку с ростом времени наблюдается увеличение размеров структур. Хиггсовская плотность представляет собой плоскую волну, которая становится со временем

выше и тоньше. При больших отрицательных временах ситуация еще более необычна. Видны две структуры, которые располагаются в точках, где наивно можно было бы ожидать наличие двух монополей, даваемых решением (4.8). Насколько правильна такая интерпретация, мы сказать пока не можем.

5. ТВИСТОРНАЯ КОНСТРУКЦИЯ ПЛАНАРНОГО МОНОПОЛЯ

В этом разделе мы покажем, насколько просто найденное монопольное решение получается в рамках твисторного формализма. Интересны не только простота решения, но и то, что твисторная формулировка может служить первым шагом в получении много-монопольного решения.

Хорошо известно, что самодуальные поля ЯМ в 4-мерном пространстве-времени соответствуют определенным голоморфным векторным расслоениям над стандартным 3-мерным пространством твисторов [18]. Поскольку уравнение ЯМХБ (3.2) есть редукция уравнений самодуальности, существует редуцированная версия стандартного твисторного соответствия для 3-мерного пространства-времени; а именно, калибровочные поля, удовлетворяющие (3.2), соответствуют определенным голоморфным векторным расслоениям над минитвисторным пространством [19, 14, 20] Π , которое является 2-мерным комплексным многообразием, изоморфным голоморфному касательному расслоению над сферой Римана, т.е. $\Pi \cong T\mathbb{CP}^1$.

Кратко опишем это соответствие, а потом используем его в явном виде, чтобы получить монопольное решение (3.2).

Пространство Π является расслоением над $\mathbb{CP}^1$ со слоем $\mathbb{C}$. Пусть ξ — стандартные координаты на базе $\mathbb{CP}^1$. Покроем это базовое пространство двумя картами $U = (\xi: |\xi| \leq 1)$, $\hat{U} = (\xi: |\xi| \geq 1)$. Координаты слоев γ над U и $\hat{\gamma}$ над $\hat{U}$ связаны функцией склейки $\hat{\gamma} = \xi^{-2}\gamma$. На базовом пространстве вводится вещественная структура посредством определения антиголоморфной инволюции $\sigma(\xi) = \bar{\xi}^{-1}$, которая может быть продолжена на Π следующим образом: $(\xi, \gamma) \xrightarrow{\sigma} (\bar{\xi}^{-1}, \bar{\gamma})$. Вещественные (т.е. сохраняющиеся при инволюции) сечения даются соотношением

$$\gamma = -\frac{i}{2}z\xi + t + \frac{i}{2}\bar{z}\xi^{-1}, \quad (5.1)$$

где $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$.

Тогда решения уравнения (3.2) соответствуют голоморфным векторным расслоениям E ранга два над Π , удовлетворяющим условию, что E тривиально, когда оно ограничено на вещественные сечения. Кроме того, E должно иметь вещественную структуру, описанную ниже, чтобы калибровочные поля принимали значения в $su(1, 1)$.

Пусть F — (2×2) -матрица функций склейки, которая склеивает $E|_U$ с $E|_{\hat{U}}$. Тогда требуемая вещественная структура определяется тем, что

$$F^\dagger = -F, \quad \det F = 1, \quad (5.2)$$

где $F^\dagger(\xi, \gamma) = F(\xi^{-1}, \bar{\gamma})^*$, $*$ означает комплексное сопряжение и транспонирование.

Калибровочные потенциалы и поле Хиггса выделяются из F путем представления его в расщепленной форме

$$F = \hat{H}H^{-1}, \quad (5.3)$$

где H голоморфно в U , а $\hat{H}$ голоморфно в $\hat{U}$. Выбор H и $\hat{H}$ не однозначен и соответствует выбору калибровки.

Для построения монопольного решения можно брать матрицу функций склейки в виде анзаца Атьи–Уорда A_n [21], а именно

$$F(\xi, \gamma) = \begin{pmatrix} \xi^n & \Gamma(\xi, \gamma) \\ 0 & \xi^{-n} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

где n – положительное целое число, а Γ – элемент группы когомологий $H^1(\Pi, \mathcal{O}(-2n))$.

Эта матрица функций склейки не удовлетворяет условию вещественности (5.2), но для некоторых Γ она может быть эквивалентной матрице, которая ему удовлетворяет. Действительно, может существовать унимодулярная матрица K , которая голоморфна на $\hat{U}$, так что $\tilde{F} = KF$ удовлетворяет уравнениям (5.2). Умножение на K равносильно изменению координат в расслоении и не меняет калибровочных полей. В частности, если Γ вещественно в том смысле, что $\Gamma^\dagger = \Gamma$, то $\tilde{F} = i\sigma_1 F$ удовлетворяет уравнениям (5.2).

Для анзаца A_1 поле Хиггса имеет простую форму

$$\|\Phi\|^2 = -\frac{1}{4}\square \log \Delta, \quad (5.5)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Gamma(\xi, \gamma)}{\xi} d\xi \quad (5.6)$$

и контур интегрирования $|\xi| = 1$. Заметим, что Δ автоматически удовлетворяет волновому уравнению $\square \Delta = 0$ и соответствует (в некоторой калибровке) суперпотенциалу.

Установив твисторный механизм, мы находим, что решение, отвечающее статическому монополю размера λ получается из простой функции

$$\Gamma = e^{\lambda\gamma}. \quad (5.7)$$

Отметим, что эта функция вещественна, так что калибровочные потенциалы принимают значения в $su(1, 1)$ в некоторой калибровке. Контурное интегрирование (5.6) можно выполнить, используя производящую функцию для модифицированных функций Бесселя

$$G(u, k) = \exp\left(\frac{u}{2}(k + k^{-1})\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(u)k^m, \quad (5.8)$$

и показать, что

$$e^{\lambda\gamma} = e^{\lambda t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\lambda r)(-ie^{i\theta}\xi)^m, \quad (5.9)$$

где $z = re^{i\theta}$. В результате мы получаем монопольное решение

$$\Delta = e^{\lambda t} I_0(\lambda r). \quad (5.10)$$

В твисторном формализме БПЗ-монополь заряда n может быть получен [22–24] из анзаца A_n . Простота твисторной формы (5.7) монопольного решения является обнадеживающей, и мы надеемся путем рассмотрения анзацев более высокого порядка получить аналогичным образом многомонопольные решения. Этот вопрос сейчас находится в стадии исследования.

6. ВЫВОД

Мы видим, что решения монопольного типа существуют в релятивистской интегрируемой теории Янга–Миллса–Хиггса в $(2 + 1)$ измерениях. Более того, введение определенного анзаца сводит уравнение к линейному уравнению для суперпотенциала. Решения, представляющие собой статические деформированные монополи, а также динамику деформирующихся монополей, могут быть построены простой процедурой суперпозиции. Интересно, что могут быть найдены точные решения, которые описывают экзотическую динамику солитонов в интегрируемой системе.

Остается еще много открытых вопросов, касающихся описанных выше монопольных решений, и они требуют дальнейших исследований. Наиболее очевидный из них — построение многомонопольных решений, как статических, так и зависящих от времени. Кроме того, существует интересное сходство между решениями, описанными в настоящей работе, и решениями монопольного типа комплексных уравнений самодуальности в $(3 + 1)$ измерениях [25].

П. М. Сатклифф хотел бы поблагодарить Стива Бричера за полезные замечания.

Список литературы

- [1] *N. S. Manton.* Phys. Rev. Lett. B. 1988. V. 60. P. 1916.
- [2] *M. F. Atiyah, N. J. Hitchin.* The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles. Princeton: Princeton University Press, 1988.
- [3] *G. W. Gibbons, N. S. Manton.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 274. P. 183.
- [4] *R. S. Ward.* Phil. Trans. R. Soc. A. 1985. V. 315. P. 451.
- [5] *R. S. Ward.* Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 671.
- [6] *P. M. Sutcliffe.* J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2269.
- [7] *N. S. Manton.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 135. P. 319.
- [8] *E. F. Corrigan, D. B. Fairlie.* Phys. Lett. 1977. V. 67. P. 69.
- [9] *G. 't Hooft.* (unpublished).
- [10] *F. Wilczek.* Quark confinement and field theory. Ed. D. Stump and D. Weingarten. New York: John Wiley, 1977.
- [11] *E. Witten.* Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 121.
- [12] *H. Boutaleb-Joutei, A. Chakrabarti, A. Comtet.* Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 1781.
- [13] *P. M. Sutcliffe.* Instanton chains with soliton limits. (To appear in Phys. Lett. B.)
- [14] *R. S. Ward.* J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2246.
- [15] *P. M. Sutcliffe.* Yang–Mills–Higgs solitons in $(2+1)$ -dimensions. (To appear in Phys. Rev. D.)
- [16] *B. S. Getmanov.* Phys. Lett. B. 1990. V. 244. P. 455.
- [17] *G. Arfken.* Mathematical methods for physicists. New York: Academic Press, 1985.
- [18] *R. S. Ward, R. O. Wells.* Twistor Geometry and Field Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [19] *N. J. Hitchin.* Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 579.
- [20] *R. S. Ward.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 319.
- [21] *M. F. Atiyah, R. S. Ward.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 55. P. 117.
- [22] *R. S. Ward.* Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 317.
- [23] *R. S. Ward.* Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 136.
- [24] *E. F. Corrigan, P. Goddard.* Commun. Math. Phys. 1981. V. 80. P. 575.
- [25] *Р. К. Буллоф, Б. С. Гетманов, П. М. Сатклифф.* ТМФ. 1994. Т. 99. С. 201.

Поступила в редакцию 28.I.1998 г.