Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, О разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения динамической теории струны, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 1, 44–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:46:30

© 2018 г.

А. Х. Хачатрян*, Х. А. Хачатрян*

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРУНЫ

Исследуется интегральное уравнение типа свертки с кубической нелинейностью на всей числовой прямой. Рассматриваемое уравнение имеет прямое применение в теории поля открытых струн, в p -адической теории струн и описывает нелокальные взаимодействия. Доказывается существование однопараметрического семейства ограниченных и монотонных решений. Вычисляются пределы построенных решений на бесконечностях.

Ключевые слова: ограниченное решение, нелокальное взаимодействие, предел решения, итерации, монотонность.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9363>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$a\varphi^3(x) + b\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x-t)\varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

относительно искомой измеримой функции $\varphi(x)$. В уравнении (1) ядро $T(\tau)$ имеет следующий вид:

$$T(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} (\tau^2 + c - 1), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

а коэффициенты $a > 0$, $b \geq 0$ и $c > 0$ – числовые параметры. Уравнение (1) выводится из следующего нелокального скалярного уравнения с потенциалом и с кубической

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 16YR-1A002.

*Институт математики НАН Республики Армения, Ереван, Армения.
E-mail: aghavard59@mail.ru, khach82@rambler.ru

нелинейностью [1]–[3]:

$$(\Delta + cI)e^{\Delta/2}\varphi = a\varphi^3 + b\varphi. \quad (3)$$

Здесь I – единичный оператор, $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ – одномерный оператор Лапласа.

Формальная запись $e^{\Delta/2}f = f$ представляет собой нелинейное псевдодифференциальное уравнение с символом $e^{-s^2/2}$ (см. статью [4]):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(s) e^{-s^2/2} e^{-isx} ds = f(x), \quad (4)$$

где $\bar{f}(s)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$:

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} e^{-isx} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad (5)$$

из уравнения (3) получаем, что

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + c \right) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) \varphi(t) dt = a\varphi^3(x) + b\varphi(x). \quad (6)$$

Здесь

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Дифференцирование правой части уравнения (6) сводит его к основному уравнению (1).

Уравнение (1) возникает в теории струн, которая лежит в основе современной единой теории элементарных частиц. Она имеет непосредственное применение в теории нелокального взаимодействия открытых и p -адических струн, а также в космологии (см. работы [1]–[9]).

Настоящая работа посвящена построению нетривиальных монотонных и ограниченных решений для уравнения (1). В частности, при определенных ограничениях на числовые параметры a , b и c доказывается, что уравнение (1) обладает однопараметрическим семейством ограниченных монотонных и непрерывных решений $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu \in \mathbb{R}}$, причем для любого $\mu \in \mathbb{R}$ имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_\mu(x) = \pm \sqrt{\frac{c-b}{a}}, \quad (7)$$

$$\sqrt{\frac{c-b}{a}} \pm \varphi_\mu \in L_1(\mathbb{R}^\mp), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \quad \mathbb{R}^- \equiv (-\infty, 0]. \quad (8)$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

2.1. Сведение уравнения (1) к интегральному уравнению на полуоси с суммарно-разностным и консервативным ядром. Прямой проверкой можно убедиться, что если $f(x)$ является непрерывным решением уравнения

$$af^3(x) + bf(x) = \int_0^\infty (T(x-t) - T(x+t))f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (9)$$

то

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ -f(-x), & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (10)$$

удовлетворяет уравнению (1) и $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Умножим обе части уравнения (9) на $1/c^2$. Обозначая $F(x) = f(x)/c$, приходим к уравнению

$$\tilde{a}F^3(x) + \tilde{b}F(x) = \int_0^\infty (W(x-t) - W(x+t))F(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

относительно функции $F(x)$ с консервативным ядром $W(\tau) = T(\tau)/c$, т. е. $W(\tau) \geq 0$, $\int_{-\infty}^\infty W(\tau) d\tau = 1$, $\tau \in \mathbb{R}$, при $c \geq 1$, где

$$\tilde{a} = ac, \quad \tilde{b} = \frac{b}{c}. \quad (12)$$

2.2. Неотрицательность ядра уравнения (9). Докажем следующую простую, но важную для дальнейшего рассуждения лемму.

ЛЕММА 1. Если $c \geq 3$, то выполняется неравенство

$$T(x-t) \geq T(x+t), \quad x, t \in \mathbb{R}^+. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва заметим, что при $c \geq 3$ функция $T(\tau)$ монотонно убывает по τ на множестве $\mathbb{R}^+$. Действительно,

$$T'(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} (3 - c - \tau^2) \leq 0, \quad \tau \geq 0.$$

Поскольку T – четная функция, то мы можем утверждать, что $T(\tau)$ монотонно возрастает по τ на $\mathbb{R}^-$. Теперь докажем, что имеет место неравенство (13). Пусть $x \geq t$, $x, t \in \mathbb{R}^+$. Тогда в силу того, что $T(\tau)$ монотонно убывает по τ на $\mathbb{R}^+$ и $0 \leq x-t \leq x+t$, то $T(x-t) \geq T(x+t)$. Если же $x < t$, $x, t \in \mathbb{R}^+$, то $T(x-t) = T(t-x) \geq T(x+t)$, ибо $0 \leq t-x \leq x+t$ и $T(\tau)$ монотонно убывает по τ на $\mathbb{R}^+$. Лемма доказана.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что $c \geq 3$.

2.3. Об одном вспомогательном уравнении типа Вольтерра. Рассмотрим однородное уравнение типа Вольтерра

$$\Phi(x) = \int_x^\infty (Q(t-x) - Q(t+x))\Phi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (14)$$

относительно искомой функции $\Phi(x)$, где

$$Q(x) = 2W(x) = \frac{2}{c}T(x). \quad (15)$$

Из леммы 1 следует, что $Q(t-x) \geq Q(t+x)$, $t, x \in \mathbb{R}^+$, при $c \geq 3$, а из формул (2) и (15) следует, что если $c \geq 3$, то

$$Q(x) \geq 0, \quad \int_0^\infty Q(x) dx = 1, \quad \int_0^\infty x^j Q(x) dx < +\infty, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Согласно результатам работы [10] уравнение (14) имеет неотрицательное (нетривиальное) монотонно неубывающее и непрерывное решение Φ , причем $\Phi(0) = 0$ и Φ – ограниченная на $\mathbb{R}^+$ функция.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ (11)

3.1. Последовательные приближения для уравнения (11) в случае $b \geq 0$, $c > \max(3, 2b)$. Рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{aligned} \tilde{a}F_{n+1}^3(x) + \tilde{b}F_{n+1}(x) &= \int_0^\infty (W(x-t) - W(x+t))F_n(t) dt, \\ F_0(x) &= \frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (17)$$

в предположении, что $b \geq 0$, $c > \max(3, 2b)$. Индукцией по n можно убедиться, что

$$F_n(x) \text{ монотонно возрастает по } n, \quad (18)$$

$$F_n(x) \leq \sqrt{\frac{1 - \tilde{b}}{\tilde{a}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (19)$$

Сперва докажем монотонность последовательности функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$. В силу леммы 1 и с учетом выражений (14) из (17) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{a}F_1^3(x) + \tilde{b}F_1(x) &= \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{1}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \int_0^\infty (W(x-t) - W(x+t))\Phi(t) dt \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{1}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \int_x^\infty (Q(t-x) - Q(t+x))\Phi(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \geq \tilde{a} \left(\sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \right)^3 + \tilde{b} \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)}, \end{aligned} \quad (20)$$

ибо

$$\frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \leq \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}}.$$

Так как $a > 0$, $b \geq 0$, $c > \max(3, 2b)$, а функция $\chi(t) = \tilde{a}t^3 + \tilde{b}t$ монотонно возрастает по t на $\mathbb{R}$, то из соотношений (20) следует, что

$$F_1(x) \geq \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} = F_0(x). \quad (21)$$

Предполагая, что $F_n(x) \geq F_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, учитывая лемму 1 и монотонность функции $\chi(t)$, из выражений (17) получаем, что

$$\tilde{a}F_{n+1}^3(x) + \tilde{b}F_{n+1}(x) \geq \int_0^\infty (W(x-t) - W(x+t))F_{n-1}(t) dt = \tilde{a}F_n^3(x) + \tilde{b}F_n(x).$$

Так как $\chi(t)$ монотонно возрастает по t , то из последнего неравенства следует, что $F_{n+1}(x) \geq F_n(x)$. Теперь докажем неравенство (19). При $n = 0$ оно сразу следует из (17). Пусть соотношение (19) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом консервативности ядра W и монотонности функции $\chi(t)$ из (17) имеем неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{a}F_{n+1}^3(x) + \tilde{b}F_{n+1}(x) &\leq \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_0^\infty (W(x-t) - W(x+t)) dt \leq \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_{-\infty}^x W(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} = \tilde{a} \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}} + \tilde{b} \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} = \tilde{a} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \right)^3 + \tilde{b} \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $F_{n+1}(x) \leq \sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}}$. Из формул (18) и (19) вытекает, что последовательность функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$. Из предельной теоремы Леви (см. книгу [11]), с учетом леммы 1 и непрерывности функции χ и W получаем, что предельная функция удовлетворяет уравнению (11). Более того, из формул (18) и (19) следует также, что

$$\frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \leq F(x) \leq \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (22)$$

С учетом выражений (2), (22) из (11) находим, что $F \in C[0, +\infty)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если $a > 0$, $b \geq 0$, $c > \max(3, 2b)$, то уравнение (11) имеет неотрицательное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение, которое удовлетворяет двойному неравенству (22).*

3.2. Монотонность и предел в бесконечности решения уравнения (11).

Итерации (17) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{a}F_{n+1}^3(x) + \tilde{b}F_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^x W(t)F_n(x-t) dt - \int_0^\infty W(x+t)F_n(t) dt, \\ F_0(x) &= \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (23)$$

и индукцией по n проверим, что $F_n(x)$ монотонно возрастает по x на $\mathbb{R}^+$. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $x_1 > x_2$, — произвольные числа. Неравенство $F_0(x_1) \geq F_0(x_2)$ выполняется очевидным образом. Предположим, что $F_n(x_1) \geq F_n(x_2)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, и докажем, что $F_{n+1}(x_1) \geq F_{n+1}(x_2)$. Действительно, используя индукционное предположение, неотрицательность ядра W и тот факт, что $W(x)$ монотонно убывает по x на $\mathbb{R}^+$, из формул (23) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{a}F_{n+1}^3(x_1) + \tilde{b}F_{n+1}(x_1) &\geq \int_{-\infty}^{x_2} W(t)F_n(x_2-t) dt - \int_0^\infty W(x_2+t)F_n(t) dt = \\ &= \tilde{a}F_{n+1}^3(x_2) + \tilde{b}F_{n+1}(x_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(F_{n+1}(x_1) - F_{n+1}(x_2))(\tilde{a}(F_{n+1}^2(x_1) + F_{n+1}(x_1)F_{n+1}(x_2) + F_{n+1}^2(x_2)) + \tilde{b}) \geq 0.$$

Так как $\tilde{a} > 0$, $\tilde{b} \geq 0$, то из вышеприведенного неравенства получаем неравенство

$$F_{n+1}(x_1) \geq F_{n+1}(x_2).$$

Таким образом, монотонность по x на $\mathbb{R}^+$ последовательности $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ установлена. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ монотонно возрастает по x на $\mathbb{R}^+$. Так как F – ограниченная непрерывная и монотонно неубывающая на $\mathbb{R}^+$ функция, то существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \equiv \lambda < +\infty$, $\lambda > 0$.

Переходя в обеих частях уравнения (11) к пределу при $x \rightarrow +\infty$, записываем равенство

$$\tilde{a}\lambda^3 + \tilde{b}\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\infty (W(x-t) - W(x+t))F(t) dt = \lambda \int_{-\infty}^\infty W(y) dy = \lambda. \quad (24)$$

Поскольку $\lambda > 0$, то из (24) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lambda = \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}}. \quad (25)$$

Итак, имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2. *При выполнении условий теоремы 1 построенное решение $F(x)$ обладает следующими дополнительными свойствами:*

а) $F(x)$ монотонно возрастает по x на $\mathbb{R}^+$,

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}}.$

3.3. Принадлежность функции $\sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}} - F$ пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$. В следующей теореме докажем, что предел последовательности функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$: $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ удовлетворяет включению

$$\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F \in L_1(\mathbb{R}^+). \quad (26)$$

ТЕОРЕМА 2. *При условиях теоремы 1 поточечный предел последовательных приближений $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ обладает свойством (26).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению (14) и является монотонно неубывающей неотрицательной непрерывной функцией на $\mathbb{R}^+$, причем $\sup_{x \geq 0} \Phi(x) > 0$, то существует $x_0 > 0$ такая, что $\Phi(x_0) > 0$. Так как $\Phi(x)$ монотонно возрастает по x на $\mathbb{R}^+$, то при $x \geq x_0$ имеет место неравенство

$$\Phi(x) \geq \Phi(x_0) > 0. \quad (27)$$

Обозначим

$$\lambda_0 \equiv \sqrt{\frac{1/2 - \tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{\Phi(x_0)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} > 0. \quad (28)$$

Сперва индукцией по n докажем, что

$$\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_n \in L_1(\mathbb{R}^+). \quad (29)$$

В случае $n = 0$ включение (29) очевидно. Предполагая, что имеет место включение $\sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}} - F_n \in L_1(\mathbb{R}^+)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ и учитывая консервативность ядра W , на основе итераций (17) записываем

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) + \tilde{a}F_{n+1}(x) \left(\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}} - F_{n+1}^2(x) \right) = \\ & = \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_x^\infty W(t) dt + \int_0^\infty W(x-t) \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_n(t) \right) dt + \\ & + \int_0^\infty W(x+t) F_n(t) dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (19), из формулы (30) получаем, что

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \right) \left(1 + \tilde{a}F_{n+1}(x) \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} + F_{n+1}(x) \right) \right) \leq \\ & \leq \int_0^\infty W(x-t) \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_n(t) \right) dt + 2 \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_x^\infty W(t) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Так как $F_{n+1}(x) \geq 0$, то из выражений (19) и (31) вытекает, что

$$0 \leq \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \leq \int_0^\infty W(x-t) \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_n(t) \right) dt + 2 \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_x^\infty W(t) dt. \quad (32)$$

Поскольку по индукционному предположению $\sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}} - F_n \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $W \in L_1(\mathbb{R})$ и $\int_x^\infty W(t) dt \in L_1(\mathbb{R}^+)$, то из неравенства (32) заключаем, что верно включение $\sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}} - F_{n+1} \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Таким образом, включение (29) доказано. Интегрируя обе части (31), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \right) \left(1 + \tilde{a}F_{n+1}(x) \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} + F_{n+1}(x) \right) \right) dx \leq \\ & \leq \int_0^\infty \int_0^\infty W(x-t) \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_n(t) \right) dt dx + 2 \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_0^\infty \int_x^\infty W(t) dt dx = \\ & = \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_n(t) \right) (1 - \rho(t)) dt + 2 \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_0^\infty t W(t) dt \leq \\ & \leq (1 - \rho(x_0)) \int_0^{x_0} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_n(t) \right) dt + \int_{x_0}^\infty \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_n(t) \right) dt + \\ & + 2 \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_0^\infty t W(t) dt, \end{aligned} \quad (33)$$

где выровнять

$$\rho(t) \equiv \int_t^\infty W(y) dy, \quad t \geq 0. \quad (34)$$

Так как

$$\begin{aligned} 1 + \tilde{a}F_{n+1}(x) \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} + F_{n+1}(x) \right) &\geq \\ &\geq 1 + \tilde{a} \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} + \sqrt{\frac{1/2-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \frac{\Phi(x)}{\sup_{x \geq 0} \Phi(x)} \right), \end{aligned}$$

$F_n(x)$ монотонно убывает по n , то из (33) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \right) dx + \\ + \left(1 + \tilde{a}\lambda_0 \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} + \lambda_0 \right) \right) \int_{x_0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \right) dx \leq \\ \leq (1 - \rho(x_0)) \int_0^{x_0} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(t) \right) dt + \\ + \int_{x_0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(t) \right) dt + 2 \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_0^{\infty} tW(t) dt. \end{aligned}$$

Из этого неравенства сразу следует, что

$$\begin{aligned} \rho(x_0) \int_0^{x_0} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \right) dx + \tilde{a}\lambda_0 \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} + \lambda_0 \right) \int_{x_0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \right) dx \leq \\ \leq 2 \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_0^{\infty} tW(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \right) dx \min \left(\rho(x_0), \tilde{a}\lambda_0 \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} + \lambda_0 \right) \right) \leq 2 \sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} \int_0^{\infty} tW(t) dt$$

или

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F_{n+1}(x) \right) dx \leq \frac{2 \sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}}}{\min \left(\rho(x_0), \tilde{a}\lambda_0 \left(\sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}} + \lambda_0 \right) \right)} \int_0^{\infty} tW(t) dt. \quad (35)$$

Из оценки (35), учитывая монотонность функциональной последовательности $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и предельную теорему Леви, заключаем, что для предельной функции $F(x)$ имеет место неравенство

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1-\tilde{b}}{\tilde{a}}} - F(x) \right) dx \leq \frac{2 \sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}}}{\min \left(\rho(x_0), \tilde{a}\lambda_0 \left(\sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}} + \lambda_0 \right) \right)} \int_0^{\infty} tW(t) dt. \quad (36)$$

Так как $\sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}} - F(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, то из (36) следует, что справедливо включение $\sqrt{(1-\tilde{b})/\tilde{a}} - F \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Теорема доказана.

Объединяя полученные результаты и учитывая равенство (10), можем сформулировать следующую теорему для исходного уравнения (1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть в уравнении (1) параметры a, b, c удовлетворяют условиям

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad c > \max(3, 2b). \quad (37)$$

Тогда уравнение (1) обладает монотонно неубывающим непрерывным и ограниченным на $\mathbb{R}$ решением $\varphi(x)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \sqrt{\frac{c-b}{a}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\sqrt{\frac{c-b}{a}}. \quad (38)$$

Более того, имеют место включения

$$\sqrt{\frac{c-b}{a}} - \varphi \in L_1[0, +\infty), \quad \varphi + \sqrt{\frac{c-b}{a}} \in L_1(-\infty, 0].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Прямой проверкой можно убедиться, что если $\varphi(x)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим соотношениям (38), то однопараметрическое семейство функций $\varphi_\mu(x) \equiv \{\varphi(x+\mu)\}_{\mu \in \mathbb{R}}$ также удовлетворяет уравнению (1), соотношениям (38) и

$$\sqrt{\frac{c-b}{a}} - \varphi_\mu \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \varphi_\mu + \sqrt{\frac{c-b}{a}} \in L_1(\mathbb{R}^-), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что соответствующее линейное уравнение (когда $a = 0$, $b = c \geq 1$) представляет собой консервативное интегральное уравнение свертки

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x-t)\varphi(t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} T(x) dx = 1.$$

Указанное уравнение обладает только тривиальным решением $\varphi(x) \equiv c$ в классе умеренно растущих функций (см. статью [12]). Нетривиальное решение уравнения (1) порождается благодаря нелинейности ($a > 0$).

Список литературы

- [1] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, “Об изотропном энергетическом условии и космологии”, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 3–12.
- [2] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, A. S. Koshelev, “Time evolution in superstring field theory on non-BPS brane 1. Rolling tachyon and energy-momentum conservation”, *JHEP*, **09** (2003), 012, 15 pp.
- [3] G. Calcagni, G. Nardelli, “Cosmological rolling solutions of nonlocal theories”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **19**:3 (2010), 329–338.
- [4] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, “О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 355–368.
- [5] N. Moeller, B. Zwiebach, “Dynamics with infinitely many time derivatives and rolling tachyons”, *JHEP*, **10** (2002), 034, 40 pp.
- [6] N. Moeller, M. Schnabl, “Tachyon condensation in open-closed p -adic string theory”, *JHEP*, **01** (2004), 011.

- [7] Ya. Volovich, “Numerical study of nonlinear equations with an infinite number of derivatives”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:32 (2003), 8685–8701.
- [8] P. Górká, H. Prado, E. G. Reyes, *Complex. Anal. Oper. Theory*, **5**:1 (2011), 313–323.
- [9] Л. В. Жуковская, “Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн”, *ТМФ*, **146**:3 (2006), 402–409.
- [10] Х. А. Хачатрян, “О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 172–193.
- [11] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1981.
- [12] Н. Б. Енгибарян, “Консервативные системы интегральных уравнений свертки”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 61–82.

Поступила в редакцию 3.03.2017