Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Батик, Д. Миллс, М. Новаковски, Почти коммутирующие и коммутирующие операторы для семейства Гойна, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 1, 6–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:18:03

© 2018 г.

Д. Батик*, Д. Миллс†, М. Новаковски‡

ПОЧТИ КОММУТИРУЮЩИЕ И КОММУТИРУЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ГОЙНА

Получены наиболее общие семейства дифференциальных операторов первого и второго порядков, почти коммутирующих с дифференциальными операторами класса Гойна. Среди полученных семейств выделены те, которые коммутируют с классом Гойна. В частности, обнаружено, что некоторое обобщенное уравнение Гойна коммутирует с дифференциальным оператором Гойна, что позволяет построить общее решение сложного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами, решение которого невозможно получить с помощью программы `Maple 16`.

Ключевые слова: почти коммутирующие операторы, коммутирующие операторы, уравнение Гойна, конфлюэнтное уравнение Гойна, дважды конфлюэнтное уравнение Гойна, трижды конфлюэнтное уравнение Гойна, обобщенное уравнение Гойна, факторизации.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9367>

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к коммутирующим дифференциальным выражениям зародился почти 140 лет назад в связи с работой Флоке, впоследствии был подкреплен статьями Валленберга и Шура [1], но решающий толчок был совершен в работах Бурхнала и Чаунди, которые позволили связать эту область математики с алгебраической геометрией [2]. Поскольку многие операторы математической физики не коммутируют (известными примерами являются операторы координаты и импульса в квантовой механике), теория некоммутирующих операторов представляет отдельный интерес. Более того, наличие определенных симметрий или вырождений приводит к *почти* коммутированию дифференциальных операторов, но какой смысл заключен в утверждении, что два оператора почти коммутируют? Рассмотрим два оператора P и T

*Khalifa University of Science and Research, Abu Dhabi, United Arab Emirates.
E-mail: dbatic@pi.ac.ae

†Department of Mathematics, University of the West Indies, Jamaica.
E-mail: dominic.millz27@gmail.com

‡Departamento de Fisica, Universidad de los Andes, Bogota, Colombia.
E-mail: mnowakos@uniandes.edu.co

порядков m и n соответственно. Коммутатор $[P, T]$ в общем случае является оператором порядка $m + n - 1$. Предположим, что P задан, а Q – произвольный оператор порядка n . Операторы P и Q почти коммутируют, если член высшего порядка в $[P, Q]$ отсутствует, т. е. коммутатор двух данных операторов имеет порядок $m + n - 2$. Задача нахождения операторов с аналитическими коэффициентами, которые почти коммутируют с данным моническим оператором с аналитическими коэффициентами, подробно рассмотрена в статье [3]. Интерес к построению класса операторов, почти коммутирующих с заданным оператором P , связанным с некоторым уравнением математической физики, основан на том, что такой класс, вероятно, содержит подкласс коммутирующих операторов. Следовательно, начиная с определенного дифференциального оператора и вычисляя соответствующий класс почти коммутирующих операторов, можно наложить условия, при выполнении которых мы приходим к классу коммутирующих операторов. Если два оператора коммутируют, тогда согласно теории Бурхнала и Чаунди у них есть общее решение, которое можно использовать для уменьшения порядка обыкновенного дифференциального уравнения, заданного оператором P . В дальнейшем рассматривается заданный дифференциальный оператор P с аналитическими коэффициентами, а именно:

$$P = d_x^2 + p_1(x) d_x + p_0(x), \quad d_x := \frac{d}{dx}. \quad (1)$$

Оператор

$$Q = q_n(x) d_x^n + q_{n-1}(x) d_x^{n-1} + \dots + q_1(x) d_x + q_0(x)$$

почти коммутирует с P , если можно найти коэффициенты $q_0, \dots, q_n$ такие, что (см. статью [3])

$$d_x q_n = 0, \quad (2)$$

$$d_x q_k = \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^n \binom{j}{k} q_j(x) d_x^{j-k} p_1(x) - \frac{1}{2} P[q_{k+1}(x)], \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

Если для x имеет место дополнительное условие

$$d_x^2 q_0(x) + p_1(x) d_x q_0(x) = \sum_{k=1}^n q_k(x) d_x^k p_0(x), \quad (4)$$

тогда операторы P и Q коммутируют. Заметим, что неизвестные коэффициенты q_k можно получить из равенства (3), и они будут зависеть от постоянных интегрирования β_i . Подставляя эти значения в формулу (4), получаем соотношение

$$\varphi(x; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) = 0. \quad (5)$$

В некоторых случаях постоянные β_i можно выбрать так, что допустима коммутативность. Если это не верно, вместо этого можно искать решение уравнения (5) в виде $x_0 = x_0(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$. Если оно существует, то P и Q локально коммутируют в точке $x = x_0$. В настоящей работе мы распространяем подход Эйри, Бесселя и понятие гипергеометрических операторов, представленные в работе [3], на дифференциальные операторы, связанные с уравнением Гойна и его конфлюэнтными формами [4], [5], приведенные в табл. 1.

Таблица 1. Семейство Гойна дифференциальных операторов P , определенных в формуле (1)

Тип уравнения	$p_1(x)$	$p_0(x)$	параметры
уравнение Гойна	$\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a}$	$\frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)}$	$\epsilon = \alpha + \beta + 1 - \delta - \gamma,$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q \in \mathbb{C},$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
конфлюэнтное уравнение Гойна	$p + \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1}$	$\frac{p\alpha x - q}{x(x-1)}$	$p, q, \alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$
редуцированное конфлюэнтное уравнение Гойна	$\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1}$	$\frac{\kappa x + q}{x(x-1)}$	$\kappa, \gamma, \delta, q \in \mathbb{C}$
биконфлюэнтное уравнение Гойна	$\frac{\tau}{x} + \frac{\nu}{x^2} - 1$	$-\frac{\alpha x + q}{x}$	$\tau, \nu, \alpha, q \in \mathbb{C}$
дважды конфлюэнтное уравнение Гойна	$\frac{\tau}{x} + \frac{\nu}{x^2} - 1$	$-\frac{\alpha x + q}{x^2}$	$\tau, \nu, \alpha, q \in \mathbb{C}$
трижды конфлюэнтное уравнение Гойна	$\sigma - x^2$	$\alpha x - q$	$\sigma, \alpha, q \in \mathbb{C}$
представление трижды конфлюэнтного уравнения Гойна	0	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 - \frac{9}{4} x^4$	$A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

Напомним, что уравнение Гойна (УГ) впервые было рассмотрено немецким математиком Гойном в 1889 г. [6] как обобщение гипергеометрического уравнения. Для того чтобы подчеркнуть важность УГ для математической физики, отметим, что его частными случаями являются обобщенное сфероидальное уравнение, сфероидальное уравнение Кулона, а также уравнения Ламе, Матье и Айнса. Область применения УГ в физике настолько широка, что ее невозможно подробно описать в рамках настоящей работы. Тем не менее обзор большого числа ситуаций в физике, химии и инженерии, где возникает УГ и его конфлюэнтные формы, можно найти в работах [4], [5].

Так как в следующем разделе мы показываем, что некоторое обобщенное уравнение Гойна (ОУГ) коммутирует с дифференциальным оператором Гойна, позволяя построить общее решение достаточного сложного линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертой степени с переменными коэффициентами, приведем здесь некоторые замечания относительно ОУГ. ОУГ является дифференциальным уравнением второго порядка с тремя регулярными особыми точками и одной нерегулярной особой точкой на бесконечности. Оно представляет собой обобщение эллиптического волнового уравнения, а также уравнения Гойна. В статье [7] при некоторых условиях получены все коэффициенты, связывающие между собой решения Флоке в конечных особенностях. Таким образом, определяется полная группа монодромии ОУГ. Это уравнение играет важную роль в приложениях в рамках квантовой теории поля в искривленных пространствах-времени. А именно, оно описывает шаровые спиноры электрона или нейтрино, погруженных в гравитационный потенциал черной дыры Керра–Ньюмана, а также статические возмущения неэкстремального решения Рейснера–Нордстрема полевых уравнений Эйнштейна [8].

Перед тем как получить классы почти коммутирующих и коммутирующих операторов первого и второго порядков, покажем, что уравнение (3), полученное в работе [3], неверно. Это видно даже в случае $n = 1$. Пусть оператор P задан как в выражении (1). Предположим, что требуется построить класс операторов Q первого порядка, коммутирующих с P . Пусть оператор $Q = \beta_1 d_x + q_0(x)$ при q_0 – это функция, которую необходимо определить. Несложно убедиться, что

$$[Q, P] = [2 d_x q_0(x) - \beta_1 d_x p_1(x)] d_x + d_x^2 q_0(x) + p_1(x) d_x q_0(x) - \beta_1 d_x p_0(x).$$

Таким образом, функция q_0 представляется как решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$d_x q_0(x) = \frac{\beta_1}{2} d_x p_1(x), \quad (6)$$

в то время как условие коммутативности означает, что

$$d_x^2 q_0(x) + p_1(x) d_x q_0(x) - \beta_1 d_x p_0(x) = 0. \quad (7)$$

Тем не менее, хотя в случае $n = 1$ уравнение (4) совпадает с (7), уравнение (3) вместо этого превращается в уравнение

$$d_x q_0(x) = \frac{\beta_1}{2} d_x p_1(x) - \frac{\beta_1}{2} p_0(x),$$

в результате операторы Q и P не коммутируют. Следовательно, выражение (27) из работы [3] следует рассматривать более аккуратно. В случае $n = 2$ рассмотрим такой же оператор P , как и раньше, но положим $Q = \beta_2 d_{xx} + q_1(x) d_x + q_0(x)$. Можно легко убедиться, что операторы Q и P коммутируют, если

$$d_x q_1(x) = \beta_2 d_x p_1(x), \quad (8)$$

$$d_x q_0(x) = \frac{1}{2} q_1(x) d_x p_1(x) + \frac{\beta_2}{2} d_x^2 p_1(x) + \beta_2 d_x p_0(x) - \frac{1}{2} [d_x^2 + p_1(x) d_x] q_1(x), \quad (9)$$

$$d_x^2 q_0(x) + p_1(x) d_x q_0(x) = q_1(x) d_x p_0(x) + \beta_2 d_x^2 p_0(x). \quad (10)$$

Вновь заметим, что уравнение (4) при $n = 2$ полностью совпадает с нашим уравнением (10), а уравнение (3) (совпадающее с выражением (27) в статье [3]) приводит к неверному результату

$$d_x q_1(x) = \beta_2 d_x p_1(x) - \frac{\beta_2}{2} p_0(x),$$

$$d_x q_0(x) = \frac{1}{2} q_1(x) d_x p_1(x) + \frac{1}{2} \beta_2 d_x^2 p_1(x) - \frac{1}{2} P[q_1(x)].$$

2. ПОЧТИ КОММУТИРУЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ГОЙНА

В настоящем разделе мы строим классы почти коммутирующих операторов для дифференциальных операторов, связанных с различными дифференциальными уравнениями, подобными уравнению Гойна. Также изучается задача существования подклассов коммутирующих операторов в вышеупомянутом классе. Для каждого дифференциального оператора, связанного с уравнениями, перечисленными в табл. 1, получены, если это возможно, все коммутирующие операторы первого и второго порядков.

2.1. Оператор Гойна.

2.1.1. *Случай $n = 1$.* С помощью уравнения (6) находим следующее семейство операторов первого порядка:

$$Q = \beta_1 d_x + \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a} \right) + \beta_0, \quad \epsilon = \alpha + \beta + 1 - \delta - \gamma, \quad (11)$$

почти коммутирующих с оператором P_n , связанным с уравнением Гойна. Условие коммутативности (7) выполняется при определенном выборе параметров, как показано в дальнейшем. Заметим, что если $L := QP_n = P_nQ$, то решения уравнений $Q\varphi = 0$ и $P_n\psi = 0$ позволяют построить общее решение обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка $Lf = 0$ при

$$L = \beta_1 d_x^3 + \left(\rho + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{x-x_i} \right) d_x^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{B_i}{x-x_i} \right) d_x + \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{x-x_i}, \quad (12)$$

где $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = a$.

1. Пусть $\alpha = \gamma = \delta = q = 0$, $\beta = 1$ или $\beta = \gamma = \delta = q = 0$, $\alpha = 1$. Общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений $P_n\psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ суть $\psi(x) = c_1 + c_2(x-a)^{-1}$ и $\varphi(x) = c_3(x-a)^{-1}e^{-\beta_0x/\beta_1}$ соответственно. Более того, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L задано выражением (12), $\rho = \beta_0$, $A_3 = 3\beta_1$ и $B_3 = 2\rho$, а прочие коэффициенты равны нулю, задается как

$$f(x) = c_1 + \frac{1}{x-a} (c_2 + c_3 e^{-\beta_0x/\beta_1}).$$

2. Пусть $\alpha = \gamma = q = 0$, $\beta = 1$ и $\delta = 2$ или $\beta = \gamma = q = 0$, $\alpha = 1$ и $\delta = 2$, тогда при $a = 1$ см. случай 1. Если $\alpha = \delta = q = 0$, $\beta = 1$ и $\gamma = 2$ или $\beta = \delta = q = 0$, $\alpha = 1$ и $\gamma = 2$, то при $a = 0$ см. случай 1.

3. Пусть $\alpha = \gamma = \delta = q = 0$ и $\beta = -1$ или $\beta = \gamma = \delta = q = 0$ и $\alpha = -1$. Общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений $P_n\psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ суть $\psi(x) = c_1 + c_2x$ и $\varphi(x) = c_3e^{-\beta_0x/\beta_1}$ соответственно. Более того, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L задано формулой (12), $\rho = \beta_0$ и $A_i = B_i = C_i = 0$ для всех $i = 1, 2, 3$, записывается как

$$f(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-\beta_0x/\beta_1}.$$

4. Пусть $\gamma = q = 0$, $\alpha = \delta = 2$ и $\beta = 1$ или $\gamma = q = 0$, $\beta = \delta = 2$ и $\alpha = 1$. Общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений $P_n\psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ суть $\psi(x) = (x-1)^{-1}(x-a)^{-1}(c_1+c_2x)$ и $\varphi(x) = (x-1)^{-1}(x-a)^{-1}e^{-\beta_0x/\beta_1}$ соответственно. Кроме того, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L имеет вид (12), $A_1 = B_1 = C_1 = 0$,

$$\begin{aligned} \rho &= \beta_0, & A_2 &= A_3 = 3\beta_1, & B_2 &= 2\beta_0 - \frac{6\beta_1}{a-1}, \\ B_3 &= 4\beta_0 - B_2, & C_2 &= -\frac{2\beta_0}{a-1}, & C_3 &= -C_2, \end{aligned}$$

записывается как

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-a)} (c_1 + c_2x + c_3e^{-\beta_0x/\beta_1}).$$

5. Пусть $\beta = \gamma = \delta = 2$, $\alpha = 3$ и $q = 2a + 2$ или $\alpha = \gamma = \delta = 2$, $\beta = 3$ и $q = 2a + 2$. Общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений $P_n\psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ имеют вид соответственно

$$\psi(x) = [x(x-1)(x-a)]^{-1}(c_1 + c_2x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = c_3[x(x-1)(x-a)]^{-1}e^{-\beta_0x/\beta_1}.$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L задано как в формуле (12), $\rho = \beta_0$, $A_i = 3\beta_1$ для всех $i = 1, 2, 3$ и

$$\begin{aligned} B_1 &= 2\beta_0 - \frac{6\beta_1}{a}(a-1), & B_2 &= 2\beta_0 + \frac{6\beta_1(a-2)}{a-1}, & B_3 &= 2\beta_0 + \frac{6\beta_1(2a-1)}{a(a-1)}, \\ C_1 &= \frac{6\beta_1 - 2\beta_0(a+1)}{a}, & C_2 &= \frac{2\beta_0(a-2) - 6\beta_1}{a-1}, & C_3 &= \frac{2\beta_0(2a-1) + 6\beta_1}{a(a-1)}, \end{aligned}$$

задается как

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-a)}(c_1 + c_2x + c_3e^{-\beta_0x/\beta_1}).$$

6. Пусть $\alpha = \gamma = q = 2$, $\beta = 1$ и $\delta = 0$ или $\beta = \gamma = q = 2$, $\alpha = 1$ и $\delta = 0$. Общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений $P_n\psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ записываются как $\psi(x) = [x(x-a)]^{-1}(c_1 + c_2x)$ и $\varphi(x) = c_3[x(x-a)]^{-1}e^{-\beta_0x/\beta_1}$. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L имеет вид (12), $\rho = \beta_0$, $A_2 = B_2 = C_2 = 0$ и

$$\begin{aligned} A_1 &= A_3 = 3\beta_1, & B_1 &= 2\beta_0 - \frac{6\beta_1}{a}, & B_3 &= 4\beta_0 - B_1, \\ C_1 &= -\frac{2\beta_0}{a}, & C_3 &= -C_1, \end{aligned}$$

дается равенством

$$f(x) = \frac{1}{x(x-a)}(c_1 + c_2x + c_3e^{-\beta_0x/\beta_1}).$$

2.1.2. Случай $n = 2$. С помощью формул (8) и (9) получаем семейство операторов второго порядка

$$Q = \beta_2 d_x^2 + \left[\beta_2 \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a} \right) + \beta_1 \right] d_x + \frac{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x(x-1)(x-a)}, \quad (13)$$

где $\epsilon = \alpha + \beta + 1 - \delta - \gamma$ и

$$\begin{aligned} a_3 &= \beta_0, & a_2 &= -\beta_0(a+1) + \frac{\beta_1}{2}(\delta + \epsilon + \gamma), \\ a_1 &= \beta_0 a + \alpha\beta\beta_2 - \frac{\beta_1}{2}[a(\delta + \gamma) + \epsilon + \gamma], & a_0 &= \frac{1}{2}\beta_1\gamma a - \beta_2 q, \end{aligned}$$

почти коммутирующих с оператором P_n . Условие коммутативности (10) удовлетворяется при определенном выборе параметров, как показано ниже. Заметим, что если $L := QP_n = P_nQ$, то общее решение обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка $Lf = 0$ при

$$\begin{aligned} L &= d_x^4 + \left(\nu + \sum_{i=1}^3 \frac{\mathfrak{A}_i}{x-x_i} \right) d_x^3 + \left[\mu + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\mathfrak{B}_{i,k}}{(x-x_i)^k} \right] d_x^2 + \\ &+ \left(\sum_{k,i=1}^3 \frac{\mathfrak{C}_{i,k}}{(x-x_i)^k} \right) d_x + \sum_{k,i=1}^3 \frac{\mathfrak{D}_{i,k}}{(x-x_i)^k} \end{aligned} \quad (14)$$

можно построить немедленно при помощи решений уравнений $Q\varphi = 0$ и $P_n\psi = 0$.

1. Пусть $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 \neq 0$. Оператор P_H представлен общим оператором Гойна, приведенным в табл. 1, а Q задан формулой (13), где $a_3 = \mu$, $a_2 = -\mu(a+1)$, $a_1 = \mu a + \alpha\beta$, $a_0 = -q$ и $\mu = \beta_0/\beta_2$. Более того, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $P_H\psi = 0$ имеет вид

$$\psi(x) = c_1 H(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta; x) + c_2 x^{1-\gamma} H(a, q - (\gamma - 1)(a\delta + \epsilon), \beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, \delta; x),$$

где $H(\cdot)$ означает функцию Гойна. Заметим, что уравнение $Q\varphi = 0$ имеет нерегулярную особую точку на бесконечности и три конечных регулярных особых точки. Преобразование $\varphi(x) = e^{Ax} f(x)$ при $A^2 = -a_3$ превращает вышеупомянутое уравнение в ОУГ [8]

$$d_x^2 f + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a} + \kappa \right) d_x f + \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{x(x-1)(x-a)} f = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \kappa &= 2A, & b_0 &= Aa\gamma + a_0, & b_1 &= Aa(A - \delta - \gamma) - A(\epsilon + \gamma) + a_1, \\ b_2 &= -A^2(a+1) + A(\alpha + \beta + 1) + a_2. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения $Q\varphi = 0$ в окрестности особых точек x_i ОУГ можно записать как $\phi_i(x) = e^{Ax} [c_{3,i} h_{1,i}(x) + c_{4,i} h_{2,i}(x)]$, где $h_{1,i}$ и $h_{2,i}$ — два частных решения ОУГ, определенных с точностью до следующей особенности. В таком случае общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L задано формулой (14), $\nu = 0$ и

$$\mathfrak{A}_1 = 2\gamma, \quad \mathfrak{A}_2 = 2\delta, \quad \mathfrak{A}_3 = 2\epsilon,$$

$$\mathfrak{B}_{1,1} = -\frac{2}{a}[(a\delta + \epsilon)\gamma + q], \quad \mathfrak{B}_{2,1} = \frac{2}{a-1}[\gamma\delta(a-1) - \alpha\beta - \delta\epsilon + q],$$

$$\mathfrak{B}_{3,1} = \frac{2}{a(a-1)}[a(\alpha\beta + \delta\epsilon + \gamma\epsilon(a-1) - q)],$$

$$\mathfrak{B}_{1,2} = \gamma(\gamma - 2), \quad \mathfrak{B}_{2,2} = \delta(\delta - 2), \quad \mathfrak{B}_{3,2} = \epsilon(\epsilon - 2),$$

$$\mathfrak{C}_{1,1} = \frac{1}{a^2}[\mu\gamma a^2 + 2a(\alpha\beta\gamma + \delta q - \gamma q) + 2q(\epsilon - \gamma)],$$

$$\mathfrak{C}_{2,1} = \frac{1}{(a-1)^2}[\mu\delta(a-1)^2 + 2a(\gamma q - \delta q - \alpha\beta\gamma) + 2\alpha\beta(\gamma + \epsilon - \delta) + 2q(2\delta - \epsilon - \gamma)],$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{3,1} &= \frac{1}{a^2(a-1)^2}[\mu\epsilon a^2(a-1)^2 + 2\alpha\beta a^2(\gamma + \delta - \epsilon) - \\ &\quad - 2a(\alpha\beta\gamma + \delta q - 2\epsilon q + \gamma q) + 2q(\gamma - \epsilon)], \end{aligned}$$

$$\mathfrak{C}_{1,2} = \frac{1}{a}[\gamma(\delta a + \epsilon) + 2q(1 - \gamma)], \quad \mathfrak{C}_{2,2} = -\frac{1}{a-1}[\gamma\delta(a-1) + 2(\alpha\beta - q)(\delta - 1) - \delta\epsilon],$$

$$\mathfrak{C}_{3,2} = \frac{1}{a(a-1)}[2(\alpha\beta a - q)(\epsilon - 1) - \epsilon a(\gamma + \delta) + \gamma\epsilon], \quad \mathfrak{C}_{i,3} = -\mathfrak{B}_{i,2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathfrak{D}_{1,1} = \frac{1}{a^3}[\gamma a(a+1)(\alpha\beta a - q) - a^2 q(\delta + \mu) - 2aq(\alpha\beta + q) + q(2q - \epsilon - \gamma)],$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{2,1} &= \frac{1}{(a-1)^3}[(a-1)^2(\alpha\beta\gamma - \alpha\beta\mu + \gamma q + \delta q + \mu q) - \\ &\quad - q(a-2)(\delta + 2q) + \alpha\beta(2aq - 6q + 2\alpha\beta - \delta - \epsilon)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{3,1} &= \frac{1}{a^3(a-1)^3} [(a-1)^2((\mu a^2 + \gamma)(\alpha\beta a - q) - \gamma q) + \\
&\quad + a^2(\alpha\beta a - 3q)(\delta + \epsilon - 2\alpha\beta) + q(a(3\epsilon - 2\alpha\beta) + 2q - \epsilon)], \\
\mathfrak{D}_{1,2} &= \frac{q}{a^2}(q - \delta a - \epsilon), \quad \mathfrak{D}_{2,2} = \frac{1}{(a-1)^2} [(\alpha\beta - q)^2 + (\alpha\beta - q)(\gamma a - \gamma - \epsilon)], \\
\mathfrak{D}_{3,2} &= \frac{1}{a^2(a-1)^2} [\alpha\beta a^2(\alpha\beta - \delta - q) + \alpha\beta a(\gamma - 2q) + aq(\delta + \gamma) + q(q - \gamma)], \\
\mathfrak{D}_{1,3} &= \frac{q}{a}(\gamma - 2), \quad \mathfrak{D}_{2,3} = \frac{1}{a-1}(\alpha\beta - q)(\delta - 2), \quad \mathfrak{D}_{3,3} = -\frac{(\alpha\beta a - q)(\epsilon - 2)}{a(a-1)},
\end{aligned}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
f_i(x) &= c_1 H(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta; x) + \\
&\quad + c_2 x^{1-\gamma} H(a, q - (\gamma - 1)(a\delta + \epsilon), \beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, \delta; x) + \\
&\quad + e^{Ax} [c_{3,i} h_{1,i}(x) + c_{4,i} f_{h,i}(x)], \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Интересно отметить, что с помощью программы **Maple 16** нельзя решить обыкновенное дифференциальное уравнение четвертой степени $Lf = 0$. Более того, заметим, что $Q = \beta_2 P_n$, если $\beta_0 = 0$. В этом случае общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$ можно выразить лишь в терминах функций Гойна.

2. Пусть $\alpha = \gamma = \delta = q = 0$ и $\beta = 1$ или $\beta = \gamma = \delta = q = 0$ и $\alpha = 1$. Оператор P_n и решение $P_n \psi = 0$ задаются, как в случае 1 (при $n = 1$), оператором Гойна. Кроме того, решение уравнения $Q\varphi = 0$ записывается как

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-a} (c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x}), \quad m_{\pm} = -\frac{1}{2\beta_2} (\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}). \quad (15)$$

Тогда общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L задано формулой (14), а коэффициенты $\mu = \beta_0/\beta_2$, $\nu = \beta_1/\beta_2$, $\mathfrak{A}_3 = 4$, $\mathfrak{B}_{3,1} = 3\nu$ и $\mathfrak{C}_{3,1} = 2\mu$ не равны нулю, представляется равенством

$$f(x) = c_1 + \frac{1}{x-a} (c_2 + c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x}).$$

3. Пусть $\alpha = \gamma = q = 0$, $\beta = 1$ и $\delta = 2$ или $\beta = \gamma = q = 0$, $\alpha = 1$ и $\delta = 2$. Мы получаем, что оператор P_n и решение уравнения $P_n \psi = 0$ заданы, как и в случае 2 (при $n = 1$), оператором Гойна. Более того, оператор Q , решение для уравнения $Q\varphi = 0$, оператор L и решение $Lf = 0$ можно получить из предыдущего случая при $a = 1$. Если вместо этого $\alpha = \delta = q = 0$, $\beta = 1$ и $\gamma = 2$ или $\beta = \delta = q = 0$, $\alpha = 1$ и $\gamma = 2$, то получаем, что P_n и решение $P_n \psi = 0$ заданы, как и в случае 1 (при $n = 1$), оператором Гойна при $a = 0$. Далее, оператор Q , решение $Q\varphi = 0$, оператор L и решение $Lf = 0$ можно получить из случая 2 (при $n = 2$) для оператора Гойна при $a = 0$.

4. Пусть $\alpha = \gamma = \delta = q = 0$, $\beta = -1$ или $\beta = \gamma = \delta = q = 0$, $\alpha = -1$. Оператор P_n и решение $P_n \psi = 0$ заданы как в случае 3 (при $n = 1$) для оператора Гойна. Более того, $Q = \beta_2 d_x^2 + \beta_1 d_x + \beta_0$ и решение уравнения $Q\varphi = 0$ имеет вид

$\varphi(x) = c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x}$ при $m_{\pm}$, заданных в формуле (15). Тогда общее решение уравнения $Lf = 0$ при $L = \beta_2 d_x^4 + \beta_1 d_x^3 + \beta_0 d_x$ записывается как

$$f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x}.$$

5. Пусть $\gamma = q = 0$, $\alpha = \delta = 2$ и $\beta = 1$ или $\gamma = q = 0$, $\beta = \delta = 2$ и $\alpha = 1$. Мы получаем, что P_n и решение $P_n \psi = 0$ заданы как и в случае 4 (при $n = 1$) для оператора Гойна. Более того, решение $Q\varphi = 0$ имеет вид

$$\varphi(x) = [(x-1)(x-a)]^{-1} [c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x}]$$

при $m_{\pm}$ из формулы (15). В таком случае общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$ при L из равенства (14), ненулевых коэффициентах $\mu = \beta_0/\beta_2$, $\nu = \beta_1/\beta_2$ и

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = 4, \quad \mathfrak{B}_{2,1} = 3\nu - \frac{12}{a-1}, \quad \mathfrak{B}_{3,1} = 6\nu - \mathfrak{B}_{2,1}, \\ \mathfrak{C}_{2,1} = 2\mu - \frac{6\nu}{a-1}, \quad \mathfrak{C}_{3,1} = 4\mu - \mathfrak{C}_{2,1} \end{aligned}$$

записывается как

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-a)} [c_1 + c_2 x + c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x}].$$

6. Пусть $\beta = \gamma = \delta = 2$, $\alpha = 3$ и $q = 2a + 2$ или $\alpha = \gamma = \delta = 2$, $\beta = 3$ и $q = 2a + 2$. Решения уравнений $P_n \psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ суть

$$\psi(x) = [x(x-1)(x-a)]^{-1} (c_1 + c_2 x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = [x(x-1)(x-a)]^{-1} (c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x})$$

соответственно. Тогда общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L дается выражением (14) и коэффициенты $\mu = \beta_0/\beta_2$, $\nu = \beta_1/\beta_2$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = 4$ не равны нулю, а

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{1,1} = 3\nu - \frac{12(a+1)}{a}, \quad \mathfrak{B}_{2,1} = 3\nu + \frac{12(a-2)}{a-1}, \\ \mathfrak{B}_{3,1} = 3\nu + \frac{12(2a-1)}{a(a-1)}, \quad \mathfrak{C}_{1,1} = 2\mu - \frac{6\nu(a+1)-24}{a}, \\ \mathfrak{C}_{2,1} = 2\mu + \frac{6\nu(a-2)-24}{a-1}, \quad \mathfrak{C}_{3,1} = 2\mu + \frac{6\nu(2a-1)+24}{a(a-1)}, \\ \mathfrak{D}_{1,1} = \frac{2(3\nu-\mu)-2\mu}{a}, \quad \mathfrak{D}_{2,1} = \frac{2\mu(2a-1)-6\nu}{a-1}, \\ \mathfrak{D}_{3,1} = \frac{2\mu(2a-1)+6\nu}{a(a-1)}, \end{aligned}$$

имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-a)} (c_1 + c_2 x + c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x}).$$

7. Пусть $\alpha = \gamma = q = 2$, $\beta = 1$ и $\delta = 0$ или $\beta = \gamma = q = 2$, $\alpha = 1$ и $\delta = 0$. Оператор P_n и решение $P_n \psi = 0$ задаются как и в случае 7 (при $n = 1$) для оператора

Гойна. Более того, решением $Q\varphi = 0$ является $\phi(x) = [x(x-a)]^{-1}(c_3e^{m-x} + c_4e^{m+x})$. Наконец, решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$ при L , из формулы (14) и ненулевых коэффициентах $\mu = \beta_0/\beta_2$, $\nu = \beta_1/\beta_2$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_3 = 4$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{1,1} &= 3\nu - \frac{12}{a}, & \mathfrak{B}_{3,1} &= 6\nu - \mathfrak{B}_{1,1}, \\ \mathfrak{C}_{1,1} &= 2\mu - \frac{6\nu}{a}, & \mathfrak{C}_{3,1} &= 4\mu = \mathfrak{C}_{1,1}, \\ \mathfrak{D}_{1,1} &= -\frac{2\mu}{a}, & \mathfrak{D}_{3,1} &= -\mathfrak{D}_{1,1}\end{aligned}$$

представляется как

$$f(x) = \frac{1}{x(x-a)}(c_1 + c_2x + c_3e^{m-x} + c_4e^{m+x}).$$

2.2. Конфлюэнтный оператор Гойна.

2.2.1. Случай $n = 1$. Используя уравнение (6), получаем следующее семейство операторов первого порядка:

$$Q = \beta_1 d_x + \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} \right) + \beta_0, \quad (16)$$

почти коммутирующих с оператором P_{CH} , связанным с конфлюэнтным уравнением Гойна. Условие коммутативности (7) выполняется для определенного набора параметров, который рассмотрен ниже. Заметим, что если $L := QP_{\text{CH}} = P_{\text{CH}}Q$, то решения уравнений $Q\varphi = 0$ и $P_{\text{CH}}\psi = 0$ позволяют построить общее решение обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка $Lf = 0$, где

$$L = \beta_1 d_x^3 + \left(\xi + \sum_{i=1}^2 \frac{\mathfrak{a}_i}{x-x_i} \right) d_x^2 + \left(\eta + \sum_{i=1}^2 \frac{\mathfrak{b}_i}{x-x_i} \right) d_x + \sum_{i=1}^2 \frac{\mathfrak{c}_i}{x-x_i}, \quad (17)$$

а $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

1. Пусть $\gamma = p = q = \delta = 0$, или $\gamma = p = q = 0$ и $\delta = 2$, или $p = q = \delta = 0$ и $\gamma = 2$, или $\gamma = \delta = 2$, $p = 0$ и $q = -2$. Эти ситуации уже были проанализированы в п. 2.1.1.

2. Пусть $\alpha = \gamma = q = \delta = 0$. Решением $P_{\text{H}}\psi = 0$ является $\psi(x) = c_1 + c_2e^{-px}$. Более того, оператор Q задан как и в случае 3 (при $n = 1$) для оператора Гойна. Наконец, решение обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка $Lf = 0$, где $L = \beta_1 d_x^3 + (\beta_1 p + \beta_0) d_x^2 + \beta_0 p d_x$, записывается как

$$f(x) = c_1 + c_2e^{-px} + c_3e^{-\beta_0 x/\beta_1}.$$

3. Пусть $\alpha = 1$, $\gamma = q = 0$ и $\delta = 2$. Решение уравнения $P_{\text{CH}}\psi = 0$ – это функция $\psi(x) = (x-1)^{-1}(c_1 + c_2e^{-px})$. Кроме того, Q и решение $Q\varphi = 0$ можно получить из п. 2.1.1. Общее решение уравнения $Lf = 0$, где L задано формулой (17) и коэффициенты $\xi = \beta_1 p + \beta_0$, $\eta = \beta_0 p$, $\mathfrak{a}_2 = 3\beta_1$, $\mathfrak{b}_2 = 2\xi$, $\mathfrak{c}_2 = \eta$ не равны нулю, имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x-1}(c_1 + c_2e^{-px} + c_3e^{-\beta_0 x/\beta_1}).$$

4. Пусть $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $q = p$ и $\delta = 0$. Решение уравнения $P_{\text{CH}}\psi = 0$ – это функция $\psi(x) = x^{-1}(c_1 + c_2e^{-px})$. Более того, оператор Q и решение $Q\varphi = 0$ можно получить из п. 2.1.1. Общее решение уравнения $Lf = 0$ при L (17) и ненулевых коэффициентах $\xi = \beta_1p + \beta_0$, $\eta = \beta_0p$, $\mathbf{a}_1 = 3\beta_1$, $\mathbf{b}_1 = 2\xi$, $\mathbf{c}_1 = \eta$ записывается как

$$f(x) = \frac{1}{x}(c_1 + c_2e^{-px} + c_3e^{-\beta_0x/\beta_1}).$$

5. Пусть $\alpha = \gamma = \delta = 2$ и $q = p - 2$. Решением уравнения $P_{\text{CH}}\psi = 0$ является $\psi(x) = [x(x-1)]^{-1}(c_1 + c_2e^{-px})$. Кроме того, Q и решение $Q\varphi = 0$ получаются из п. 2.1.1. Общее решение уравнения $Lf = 0$ при L (17) и ненулевых коэффициентах $\xi = \beta_1p + \beta_0$, $\eta = \beta_0p$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 3\beta_1$, $\mathbf{b}_1 = \xi - \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 = 2\xi - \mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1 = \eta - 2\xi$, $\mathbf{c}_2 = 2\eta - \mathbf{c}_1$ дается выражением

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}(c_1 + c_2e^{-px} + c_3e^{-\beta_0x/\beta_1}).$$

В случае редуцированного конфлюэнтного дифференциального оператора Гойна P_{RCH} самый общий дифференциальный оператор первого порядка Q , почти коммутирующий с P_{RCH} , задается формулой (16). С помощью выражения (7) можно убедиться, что операторы P_{RCH} и Q коммутируют, когда $\gamma = k = q = \delta = 0$, или $\gamma = k = q = 0$ и $\delta = 2$, или $\gamma = 2$ и $k = q = \delta = 0$, или $\gamma = q = \delta = 2$ и $k = 0$, но эти случаи сводятся к одному из ранее рассмотренных.

2.2.2. Случай $n = 2$. С помощью соотношений (8) и (9) находим следующее семейство операторов второго порядка:

$$Q = \beta_2 d_x^2 + \left[\beta_2 \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} \right) + \beta_1 \right] d_x + \frac{\beta_1\gamma + \beta_2(2q - \gamma p)}{x} + \frac{\beta_1\delta + \beta_2(2\alpha p - \delta p - 2q)}{x-1} + \beta_0,$$

почти коммутирующих с оператором P_{CH} , связанным с конфлюэнтным уравнением Гойна. Условие коммутативности (10) выполняется при определенном выборе параметров, который рассмотрен ниже. Заметим, что если $L := QP_{\text{CH}} = P_{\text{CH}}Q$, то решения уравнений $Q\varphi = 0$ и $P_{\text{CH}}\psi = 0$ позволяют построить общее решение обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка $Lf = 0$, в котором

$$L = \beta_2 d_x^4 + \left(\Gamma + \sum_{i=1}^2 \frac{\mathfrak{A}_i}{x - x_i} \right) d_x^3 + \left[\lambda + \sum_{k,i=1}^2 \frac{\mathfrak{B}_{i,k}}{(x - x_i)^k} \right] d_x^2 + \left[\eta + \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^2 \frac{\mathfrak{C}_{i,k}}{(x - x_i)^k} \right] d_x + \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^2 \frac{\mathfrak{D}_{i,k}}{(x - x_i)^k} \quad (18)$$

при $\eta = \beta_0p$.

1. Пусть $\beta_1 = \beta_2p$. Решением уравнения $P_{\text{CH}}\psi = 0$ является функция [5]

$$\psi(x) = c_1 H_c(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; x) + c_2 x^{1-\gamma} H_c(a_1, -a_2, a_3, a_4, a_5; x),$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= p, & a_2 &= \gamma - 1, & a_3 &= \delta - 1, & a_4 &= \frac{p}{2}(2\alpha - \gamma - \delta), \\ a_5 &= \frac{\gamma}{2}(p - \delta) - q + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Более того, решение $Q\varphi = 0$ определяется как

$$\varphi(x) = e^{\tilde{a}x} [c_3 H_c(\tilde{a} + a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; x) + c_4 x^{1-\gamma} H_c(\tilde{a} + a_1, -a_2, a_3, a_4, a_5; x)],$$

где

$$\tilde{a} = \frac{1}{2} \left(-p + \sqrt{\frac{\beta_2 p^2 - 4\beta_0}{\beta_2}} \right).$$

Тогда общее решение уравнения $Lf = 0$ при L (18), ненулевых коэффициентах $\Gamma = p$, $\mathfrak{A}_1 = \gamma$, $\mathfrak{A}_2 = \delta$ и

$$\begin{aligned} \lambda &= \beta_2 p^2 + \beta_0, & \mathfrak{B}_{1,1} &= 2\beta_2(q + \gamma p - \gamma\delta), & \mathfrak{B}_{2,1} &= 2\beta_2(\alpha p + \gamma\delta + p\delta - q), \\ \mathfrak{B}_{1,2} &= \beta_2\gamma(\gamma - 2), & \mathfrak{B}_{2,2} &= \beta_2\delta(\delta - 2), \\ \mathfrak{C}_{1,1} &= \beta_0\gamma + 2\beta_2(\gamma q + pq - \delta q - \alpha\gamma p), & \mathfrak{C}_{2,1} &= \beta_0\delta + 2\beta_2(\alpha\gamma p + \alpha p^2 + \delta q - \gamma q), \\ \mathfrak{C}_{1,2} &= \beta_2(\gamma\delta - \gamma p + 2\gamma q - 2q), & \mathfrak{C}_{2,2} &= \beta_2(2\alpha\delta p - 2\alpha p - \gamma\delta - \delta p - 2\delta q + 2q), \\ \mathfrak{C}_{1,3} &= -\mathfrak{B}_{1,2}, & \mathfrak{C}_{2,3} &= -\mathfrak{B}_{2,2}, \\ \mathfrak{D}_{1,1} &= \beta_0 q + \beta_2(2q^2 + \gamma q + \delta q - 2\alpha p q - \alpha\gamma p), \\ \mathfrak{D}_{2,1} &= \beta_2[\alpha\gamma p + q(2\alpha p - \delta - \gamma - 2q)] + \beta_0(\alpha p - q), \\ \mathfrak{D}_{1,2} &= \beta_2\gamma(\delta - p + q), & \mathfrak{D}_{2,2} &= \beta_2(\alpha^2 p^2 - \alpha\gamma p - \alpha p^2 - 2\alpha p q + \gamma q + p q + q^2), \\ \mathfrak{D}_{1,3} &= -\beta_2 q(\gamma - 2), & \mathfrak{D}_{2,3} &= \beta_2(2\alpha p + \delta q - \alpha\delta p - 2q) \end{aligned}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 H_c(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; x) + c_2 x^{1-\gamma} H_c(a_1, -a_2, a_3, a_4, a_5; x) + \\ &+ e^{\tilde{a}x} [c_3 H_c(\tilde{a} + a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; x) + c_4 x^{1-\gamma} H_c(\tilde{a} + a_1, -a_2, a_3, a_4, a_5; x)]. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что в этом случае при помощи программы **Maple 16** нельзя решить обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка $Lf = 0$, рассматриваемое выше.

2. Пусть $\alpha = \gamma = \delta = 2$ и $q = p = -2$, или $\gamma = \delta = 2$, $p = 0$ и $q = -2$, или $\delta = p = q = 0$ и $\gamma = 2$, или $\gamma = p = q = 0$ и $\delta = 2$, или $\gamma = p = q = \delta = 0$. Эти ситуации уже обсуждались в п. 2.1.2.

3. Пусть $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $q = p$ и $\delta = 0$. Решения $P_{\text{сн}}\psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ уже были выведены в п. 2.2.1 и п. 2.1.2 соответственно. Наконец, решение уравнения $Lf = 0$, где L задано формулой (18) и коэффициенты $\Gamma = \beta_2 p + \beta_1$, $\mathfrak{A}_2 = 4\beta_2$, $\lambda = \beta_1 p + \beta_0$, $\mathfrak{B}_{1,1} = 3\Gamma$, $\mathfrak{C}_{1,1} = 2\Gamma$ и $\mathfrak{D}_{1,1} = \eta$ не равны нулю, дается равенством

$$f(x) = \frac{1}{x} (c_1 + c_2 e^{-px} + c_3 e^{m_- x} + c_4 e^{m_+ x}),$$

в котором $m_{\pm}$ определены в выражении (15).

4. Пусть $\alpha = 1$, $\gamma = q = 0$ и $\delta = 2$. Решения $P_{\text{CH}}\psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ уже выписаны в п. 2.2.1 и п. 2.1.2 соответственно. Более того, решение уравнения $Lf = 0$ при L (18) и коэффициентах Γ , $\mathfrak{A}_2$ и λ как в случае выше, $\mathfrak{B}_{2,1} = 3\Gamma$, $\mathfrak{C}_{2,1} = 2\Gamma$ и $\mathfrak{D}_{2,1} = \eta$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x-1}(c_1 + c_2e^{-px} + c_3e^{m-x} + c_4e^{m+x}).$$

5. Пусть $\alpha = \gamma = \delta = q = 0$. Решения $P_{\text{CH}}\psi = 0$ и $Q\varphi = 0$ уже выписаны в п. 2.2.1 и п. 2.1.2 соответственно. Кроме того, решением уравнения $Lf = 0$ при L (18) и ненулевых коэффициентах Γ , λ и η , заданных как в предыдущем случае, является функция

$$f(x) = c_1 + c_2e^{-px} + c_3e^{m-x} + c_4e^{m+x}.$$

В случае редуцированного конфлюэнтного дифференциального оператора Гойна P_{RCH} мы обнаружили, что наиболее общий вид дифференциального оператора второго порядка Q , почти коммутирующего с P_{RCH} , задается выражением

$$Q = \beta_2 d_x^2 + \left[\beta_2 \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} \right) + \beta_1 \right] d_x + \frac{\beta_1 \gamma - 2\beta_2 q}{2x} + \frac{2\beta_2(k+q)}{2(x-1)} + \beta_0.$$

С помощью формулы (7) можно убедиться, что операторы P_{RCH} и Q коммутируют, когда $\gamma = q = \delta = 2$ и $k = 0$, или $\gamma = 2$ и $k = q = \delta = 0$, или $\gamma = k = q = 0$ и $\delta = 2$, или $\gamma = k = q = \delta = 0$, но эти случаи сводятся к одному из ранее рассмотренных.

2.3. Биконфлюэнтный оператор Гойна.

2.3.1. Случай $n = 1$. Используя уравнение (6), получаем семейство операторов первого порядка

$$Q = \beta_1 d_x + \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{\tau}{x} + \frac{\nu}{x^2} \right) + \beta_0,$$

почти коммутирующих с оператором P_{BCH} , связанным с биконфлюэнтным уравнением Гойна. Условие коммутативности (7) выполняется при определенном выборе параметров, рассмотренном далее. Заметим, что если $L := QP_{\text{BCH}} = P_{\text{BCH}}Q$, то решения уравнений $Q\varphi = 0$ и $P_{\text{BCH}}\psi = 0$ позволяют построить общее решение обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка $Lf = 0$, в котором

$$L = \beta_1 d_x^3 + \left(K + \frac{A}{x} \right) d_x^2 + \left(R + \frac{B}{x} \right) d_x + C + \frac{D}{x}. \quad (19)$$

1. Пусть $\nu = q = \tau = 0$. Решением $P_{\text{BCH}}\psi = 0$ является $\psi(x) = c_1e^{\alpha+x} + c_2e^{\alpha-x}$ при $\alpha_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1+4\alpha})/2$. Более того, решение $Q\varphi = 0$ уже получено в п. 2.1.1. Наконец, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L задано в формуле (19) и коэффициенты $K = \beta_0 - \beta_1$, $R = -(\beta_1\alpha + \beta_0)$ и $C = -\beta_0\alpha$ не равны нулю, записывается как

$$f(x) = c_1e^{\alpha+x} + c_2e^{\alpha-x} + c_3e^{-\beta_0x/\beta_1}.$$

2. Пусть $\nu = 0$, $q = 1$ и $\tau = 2$. Решение $P_{\text{BCH}}\psi = 0$ есть функция $\psi(x) = 1/x(c_1e^{\alpha+x} + c_2e^{\alpha-x})$ при $\alpha_{\pm}$, определенных в предыдущем случае. Более того, решение $Q\varphi = 0$ получено в п. 2.2.1. Общее решение обыкновенного дифференциального

уравнения $Lf = 0$ при L (19), K и R из предыдущего случая и $A = 3\beta_1$, $B = 2K$, $D = R$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x}(c_1 e^{\alpha+x} + c_2 e^{\alpha-x} + c_3 e^{-\beta_0 x/\beta_1}).$$

2.3.2. Случай $n = 2$. С помощью формул (8) и (9) находим семейство операторов второго порядка

$$Q = \beta_2 d_x^2 + \left[\beta_2 \left(\frac{\tau}{x} + \frac{\nu}{x^2} \right) + \beta_1 \right] d_x + \frac{1}{2} \left[\frac{\tau(\beta_1 + \beta_2) - 2\beta_2 q}{x} + \frac{\nu(\beta_1 + \beta_2)}{x^2} \right] + \beta_0,$$

почти коммутирующих с оператором $P_{\text{всн}}$, связанным с биконфлюэнтным уравнением Гойна. Условие коммутативности (10) удовлетворено при приведенном ниже выборе параметров. Заметим, что если $L := QP_{\text{всн}} = P_{\text{всн}}Q$, то решения уравнений $Q\varphi = 0$ и $P_{\text{всн}}\psi = 0$ позволяют построить общее решение обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка $Lf = 0$ при

$$L = d_x^4 + \sum_{n=0}^2 \frac{A_n}{x^n} d_x^3 + \sum_{n=0}^4 \frac{B_n}{x^n} d_x^2 + \sum_{n=0}^5 \frac{C_n}{x^n} d_x + \sum_{n=0}^4 \frac{D_n}{x^n}. \quad (20)$$

1. Пусть $\beta_1 = -\beta_2$. Решение уравнения $P_{\text{всн}}\psi = 0$ записывается как

$$\psi(x) = x^{(1-\tau)/2} [c_1 e^{\rho_-(x)} H_D(b_1, b_2, b_3, b_4; \omega(x)) + c_2 e^{\rho_+(x)} H_D(-b_1, b_2, b_3, b_4; \omega(x))],$$

где H_D означает дважды конфлюэнтную функцию Гойна [4],

$$\begin{aligned} \rho_-(x) &= \frac{1}{2} [1 - \epsilon(\nu)] \sqrt{4\alpha + 1} x, & \rho_+(x) &= \frac{2\nu + [1 + \epsilon(\nu) \sqrt{4\alpha + 1}] x^2}{2x}, \\ \omega(x) &= \frac{ix \sqrt[4]{(4\alpha + 1)\nu^2} + \nu}{ix \sqrt[4]{(4\alpha + 1)\nu^2} - \nu} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b_1 &= 4i \sqrt[4]{(4\alpha + 1)\nu^2}, \\ b_2 &= \frac{2i\epsilon(\nu)(2q - \tau) \sqrt[4]{(4\alpha + 1)^3\nu^2}}{4\alpha + 1} - \\ &\quad - \frac{2(4\alpha + 1)[i(\tau - 2) \sqrt[4]{(4\alpha + 1)\nu^2} + \tau^2/2 - \nu - \tau + |\nu| \sqrt{4\alpha + 1} + 1/2]}{4\alpha + 1}, \\ b_3 &= \frac{4i \sqrt[4]{(4\alpha + 1)\nu^2} [\epsilon(\nu)(2q - \tau) \sqrt{4\alpha + 1} + (\tau - 2)(4\alpha + 1)]}{4\alpha + 1}, \\ b_4 &= \frac{2i\epsilon(\nu)(2q - \tau) \sqrt[4]{(4\alpha + 1)^3\nu^2}}{4\alpha + 1} - \\ &\quad - \frac{2(4\alpha + 1)[i(\tau - 2) \sqrt[4]{(4\alpha + 1)\nu^2} - \tau^2/2 + \nu + \tau - |\nu| \sqrt{4\alpha + 1} - 1/2]}{4\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Здесь через $\epsilon(\cdot)$ обозначена функция знака. Если принять $\mu = \beta_0/\beta_2$, то решение уравнения $Q\varphi = 0$ имеет вид

$$\varphi(x) = x^{(\tau-1)/2} [c_3 e^{\sigma_-(x)} H_D(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4; r(x)) + c_2 e^{\sigma_+(x)} H_D(-\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5; r(x))],$$

где σ_- , σ_+ и r формально заданы при помощи ρ_- , ρ_+ и ω , α заменена на $-\mu$,

$$\begin{aligned}\ell_1 &= 4i\sqrt[4]{(1-4\mu)\nu^2}, \\ \ell_2 &= \frac{2i\epsilon(\nu)(\tau-2q)\sqrt[4]{(1-4\mu)^3\nu^2}}{4\mu-1} + \\ &\quad + \frac{2(1-4\mu)[i(\tau-2)\sqrt[4]{(1-4\mu)\nu^2} + \tau^2/2 - \nu - \tau + |\nu|\sqrt{1-4\mu} + 1/2]}{4\mu-1}, \\ \ell_3 &= \frac{4i\sqrt[4]{(1-4\mu)\nu^2}[\epsilon(\nu)(2q-\tau)\sqrt{1-4\mu} + (\tau-2)(1-4\mu)]}{1-4\mu}, \\ \ell_4 &= \frac{2i\epsilon(\nu)(\tau-2q)\sqrt[4]{(1-4\mu)^3\nu^2}}{4\mu-1} + \\ &\quad + \frac{2(1-4\mu)[i(\tau-2)\sqrt[4]{(1-4\mu)\nu^2} - \tau^2/2 + \nu + \tau - |\nu|\sqrt{1-4\mu} - 1/2]}{4\mu-1}.\end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения $Lf = 0$ при L (20) и ненулевых коэффициентах

$$\begin{aligned}A_0 &= -2, & A_1 &= 2\tau, & A_2 &= 2\nu, & B_0 &= 1 + \mu - \alpha, & B_1 &= -2(\tau + q), \\ B_2 &= \tau(\tau - 2) - 2\nu, & B_3 &= 2\nu(\tau - 2), & B_4 &= \nu^2, & C_0 &= \alpha - \mu, \\ C_1 &= (\mu - \alpha)\tau + 2q, & C_2 &= (\mu - \alpha)\nu + (1 - 2q)\tau + 2q, \\ C_3 &= -[\tau(\tau - 2) + 2\nu(q - 1)], & C_4 &= -3\nu(\tau - 2), & C_5 &= -2\nu^2, \\ D_0 &= -\mu\alpha, & D_1 &= q(\alpha - \mu), & D_2 &= q(q - 1), & D_3 &= q(\tau - 2), & D_4 &= q\nu\end{aligned}$$

дается выражением

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{(1-\tau)/2} [c_1 e^{\rho_-(x)} H_D(b_1, b_2, b_3, b_4; \omega(x)) + c_2 e^{\rho_+(x)} H_D(-b_1, b_2, b_3, b_4; \omega(x))] + \\ &\quad + x^{(\tau-1)/2} [c_3 e^{\sigma_-(x)} H_D(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4; r(x)) + c_4 e^{\sigma_+(x)} H_D(-\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5; r(x))].\end{aligned}$$

В этом случае при помощи программы **Maple 16** так же, как и ранее, нельзя решить вышеупомянутое обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка.

2. Пусть $\nu = q = \tau = 0$. Решение $P_{\text{всн}}\psi = 0$ определяется как и в случае 1 (при $n = 1$) для биконфлюэнтного оператора Гойна. Более того, решение уравнения $Q\varphi = 0$ изучено в п. 2.1.1. Наконец, решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$ при L (19) и ненулевых коэффициентах $A_0 = \beta_1 - \beta_2$, $B_0 = \beta_0 - \beta_1 - \beta_2\alpha$, $C_0 = -\beta_0 - \beta_1\alpha$ и $D_0 = -\beta_0\alpha$ представляется равенством

$$f(x) = c_1 e^{\alpha+x} + c_2 e^{\alpha-x} + c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m-x},$$

где $m_{\pm}$ и $\alpha_{\pm}$ определены в формуле (15) и в случае 1 п. 2.3.1 соответственно.

3. Пусть $\nu = 0$, $q = 1$ и $\tau = 2$. Решение $P_{\text{всн}}\psi = 0$ имеет такой же вид, как и в случае 2 (при $n = 1$) для биконфлюэнтного оператора Гойна. Кроме того, решение $Q\varphi = 0$ рассмотрено в п. 2.1.2. Наконец, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L дается равенством (19) и коэффициенты A_0 , B_0 , C_0 , D_0 не равны нулю и заданы так же, как и в случае выше, а $A_1 = 4\beta_2$, $B_1 = 3A_0$, $C_1 = -2B_0$ и $D_1 = C_0$, записывается как

$$f(x) = \frac{1}{x} (c_1 e^{\alpha+x} + c_2 e^{\alpha-x} + c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m-x}),$$

где $m_{\pm}$ и $\alpha_{\pm}$ определены выражением (15) и в случае 1 п. 2.3.1 соответственно.

2.4. Дважды конфлюэнтный оператор Гойна.

2.4.1. Случай $n = 1$. При помощи уравнения (6) получаем то же семейство операторов первого порядка Q , что и в случае $n = 1$ для биконфлюэнтного оператора Гойна. Условие коммутативности (7) выполняется при $\alpha = \tau/2$, $\nu = 0$ и $q = \tau/2 - \tau^2/4$. При таком выборе параметров имеем

$$P_{\text{DCH}} = d_x^2 + \left(\frac{\tau}{x} - 1\right) d_x + \frac{\tau(\tau - 2 - 2x)}{4x^2}, \quad Q = \beta_1 d_x + \frac{\beta_1 \tau}{2x} d_x + \beta_0.$$

Тогда оператор $L := QP_{\text{DCH}} = P_{\text{DCH}}Q$ имеет вид

$$L = \beta_1 d_x^3 + \sum_{n=0}^1 \frac{a_n}{x^n} d_x^2 + \sum_{n=0}^2 \frac{b_n}{x^n} d_x + \sum_{n=0}^2 \frac{c_n}{x^n}$$

при $a_0 = \beta_0 - \beta_1$, $a_1 = 3\beta_1\tau/2$, $b_0 = -\beta_0$, $b_1 = \tau a_0$, $b_2 = 3\beta_1\tau(\tau - 2)$, $c_1 = b_0\tau$ и $c_2 = a_0\tau(\tau - 2)$, а решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$ записывается как

$$f(x) = x^{-\tau/2} [c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-\beta_0 x / \beta_1}].$$

2.4.2. Случай $n = 2$. С помощью формул (8) и (9) находим следующее семейство операторов второго порядка:

$$Q = \beta_2 d_x^2 + \left[\beta_2 \left(\frac{\tau}{x} + \frac{\nu}{x^2} \right) + \beta_1 \right] d_x + \frac{\beta_1 \tau + \beta_2(\tau - 2\alpha)}{2x} + \frac{\beta_1 \nu + \beta_2(\nu - 2q)}{2x^2} + \beta_0,$$

почти коммутирующих с P_{DCH} . Условие коммутативности (10) удовлетворено при определенном выборе параметров, рассмотренном ниже. Заметим, что если $L := QP_{\text{DCH}} = P_{\text{DCH}}Q$, то решения уравнений $Q\varphi = 0$ и $P_{\text{DCH}}\psi = 0$ позволяют построить общее решение обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка $Lf = 0$ при

$$L = d_x^4 + \sum_{n=0}^2 \frac{A_n}{x^n} d_x^3 + \sum_{n=0}^4 \frac{B_n}{x^n} d_x^2 + \sum_{n=0}^5 \frac{C_n}{x^n} d_x + \sum_{n=0}^5 \frac{D_n}{x^n}. \quad (21)$$

1. Пусть $\beta_1 = -\beta_2$. Решение уравнения $P_{\text{DCH}}\psi = 0$ есть

$$\begin{aligned} \psi(x) = x^{(1-\tau)/2} & \left[c_1 e^x H_D \left(m_1, m_2, m_3, m_4; \frac{x - \sqrt{\nu}}{x + \sqrt{\nu}} \right) + \right. \\ & \left. + c_2 e^{x/\nu} H_D \left(-m_1, m_2, m_3, m_4; \frac{x - \sqrt{\nu}}{x + \sqrt{\nu}} \right) \right], \end{aligned}$$

где через H_D обозначена дважды конфлюэнтная функция Гойна [4], [5] и

$$\begin{aligned} m_1 &= -4\sqrt{\nu}, & m_2 &= 4(\alpha - 1)\sqrt{\nu} - \tau^2 - 4q + 4\nu + 2\tau - 1, \\ m_3 &= 8\sqrt{\nu}(\alpha - \tau + 1), & m_4 &= 8(\alpha - 1)\sqrt{\nu} - m_2. \end{aligned}$$

Решение уравнения $Q\varphi = 0$ задано как

$$\varphi(x) = x^{(1-\tau)/2} [c_3 e^{\sigma-(x)} H_D(t_1, t_2, t_3, t_4; r(x)) + c_2 e^{\sigma+(x)} H_D(-t_1, t_2, t_3, t_4, t_5; r(x))],$$

где функции $\sigma_{\pm}(\cdot)$ и $r(\cdot)$ определены в п. 2.3.2 и

$$\begin{aligned} t_1 &= 4i\sqrt[4]{(1-4\mu)\nu^2}, \\ t_2 &= \frac{2i\epsilon(\nu)(\tau-2\alpha)\sqrt[4]{(1-4\mu)^3\nu^2}}{4\mu-1} + \\ &\quad + \frac{2(1-4\mu)[i(\tau-2)\sqrt[4]{(1-4\mu)\nu^2} + \tau^2/2 - \nu - \tau + 2q + |\nu|\sqrt{1-4\mu} + 1/2]}{4\mu-1}, \\ t_3 &= \frac{4i\sqrt[4]{(1-4\mu)\nu^2} [\epsilon(\nu)(\tau-2\alpha)\sqrt{1-4\mu} + (\tau-2)(4\mu-1)]}{4\mu-1}, \\ t_4 &= \frac{2i\epsilon(\nu)(\tau-2\alpha)\sqrt[4]{(1-4\mu)^3\nu^2}}{4\mu-1} + \\ &\quad + \frac{2(1-4\mu)[i(\tau-2)\sqrt[4]{(1-4\mu)\nu^2} - \tau^2/2 + \nu + \tau - 2q - |\nu|\sqrt{1-4\mu} - 1/2]}{4\mu-1}. \end{aligned}$$

Наконец, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$ при L (21) и ненулевых коэффициентах

$$\begin{aligned} A_0 &= -2, & A_1 &= 2\tau, & A_2 &= 2\nu, & B_0 &= 1 + \mu, & B_1 &= -2(\tau + \alpha), \\ B_2 &= \tau(\tau - 2) - 2\nu - 2q, & B_3 &= 2\nu(\tau - 2), & B_4 &= \nu^2, \\ C_0 &= -\mu, & C_1 &= 2\alpha + \mu\tau, & C_2 &= \tau(1 - \alpha) + 2\alpha + 2q + \mu\nu, \\ C_3 &= -[2(\nu - \alpha) + (2 - \tau)(2q + \tau)], & C_4 &= \nu(6 - 3\tau - 2q), & C_5 &= -2\nu^2, \\ D_1 &= -\mu\alpha, & D_2 &= \alpha(\alpha - 1) - \mu q, & D_3 &= 2\alpha q + \alpha\tau - 2\alpha - 2q, \\ D_4 &= \alpha\nu + q^2 + 2q\tau - 6q, & D_5 &= 2q\nu \end{aligned}$$

дается формулой

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{(1-\tau)/2} \left\{ c_1 e^x H_D \left(m_1, m_2, m_3, m_4; \frac{x - \sqrt{\nu}}{x + \sqrt{\nu}} \right) + \right. \\ &\quad + c_2 e^{x/\nu} H_D \left(-m_1, m_2, m_3, m_4; \frac{x - \sqrt{\nu}}{x + \sqrt{\nu}} \right) + \\ &\quad \left. + c_3 e^{\sigma^-(x)} H_D(t_1, t_2, t_3, t_4; r(x)) + c_2 e^{\sigma^+(x)} H_D(-t_1, t_2, t_3, t_4, t_5; r(x)) \right\}. \end{aligned}$$

Как и ранее, при помощи программы **Maple 16** нельзя найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$.

2. Пусть $\alpha = \tau/2$, $\nu = 0$, $q = \tau/2 - (\tau/2)^2$. При помощи результатов, полученных в п. 2.4.1, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$ при L (21) и ненулевых коэффициентах

$$\begin{aligned} A_0 &= \beta_1 - \beta_2, & A_1 &= 2\beta_2\tau, \\ B_0 &= \beta_0 - \beta_1, & B_1 &= \frac{3}{2}A_0\tau, & B_2 &= \frac{3}{2}\beta_2\tau(\tau - 2), \\ C_0 &= -\beta_0, & C_1 &= B_0\tau, & C_2 &= \frac{3}{4}A_0\tau(\tau - 2), & C_3 &= \beta_2\tau(\tau - 2)(\tau - 4), \\ D_1 &= -\frac{\beta_0\tau}{2}, & D_2 &= \frac{B_0}{4}\tau(\tau - 2), \\ D_3 &= \frac{A_0}{8}\tau(\tau - 2)(\tau - 4), & D_4 &= \frac{\beta_2}{16}\tau(\tau - 2)(\tau - 4)(\tau - 16) \end{aligned}$$

записывается как

$$f(x) = x^{-\tau/2} [c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{m-x} + c_4 e^{m+x}],$$

где $m_{\pm}$ определены в формуле (15).

2.5. Трижды конфлюэнтный оператор Гойна.

2.5.1. *Случай $n = 1$.* Пусть $P_{\text{ТЧН}}$ и $P_{\text{РТЧН}}$ – операторы, связанные с трижды конфлюэнтным уравнением Гойна и редуцированным трижды конфлюэнтным уравнением Гойна соответственно. С помощью уравнения (6) получаем следующее семейство операторов первого порядка:

$$Q_1 = \beta_1 d_x - \frac{\beta_1}{2} x^2 + \beta_0, \quad Q_2 = \beta_1 d_x + \beta_0,$$

почти коммутирующих с операторами $P_{\text{ТЧН}}$ и $P_{\text{РТЧН}}$ соответственно. В обоих случаях условие коммутативности (7) удовлетворено, когда $\beta_1 = 0$, но тогда Q_1 и Q_2 тривиальны и поэтому не существует нетривиальных операторов первого порядка, коммутирующих с $P_{\text{ТЧН}}$ или $P_{\text{РТЧН}}$.

2.5.2. *Случай $n = 2$.* С помощью выражений (8) и (9) находим семейство операторов второго порядка

$$Q = \beta_2 d_x^2 + (\beta_1 - \beta_2 x^2) d_x + \frac{1}{2} (\sigma \beta_2 - \beta_1) x^2 + \beta_2 \alpha x + \beta_0,$$

почти коммутирующих с оператором $P_{\text{ТЧН}}$. Условие коммутативности (10) выполняется при $\beta_1 = \sigma \beta_2$. Решение уравнения $P_{\text{ТЧН}} \psi = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x) = & c_1 H_{\text{T}} \left(-\sqrt[3]{9} q, 3\alpha + 3, -\sqrt[3]{3} \sigma; \frac{x}{\sqrt[3]{3}} \right) + \\ & + c_2 e^{x^3/3 - \sigma x} H_{\text{T}} \left(-\sqrt[3]{9} q, -3\alpha - 3, -\sqrt[3]{3} \sigma; -\frac{x}{\sqrt[3]{3}} \right), \end{aligned}$$

где через H_{T} обозначена трижды конфлюэнтная функция Гойна [4], а решение $Q\varphi = 0$ задано как

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & c_3 H_{\text{T}} \left(-\sqrt[3]{9} \mu, 3\alpha + 3, -\sqrt[3]{3} \sigma; \frac{x}{\sqrt[3]{3}} \right) + \\ & + c_4 e^{x^3/3 - \sigma x} H_{\text{T}} \left(\sqrt[3]{9} \mu, -3\alpha - 3, -\sqrt[3]{3} \sigma; -\frac{x}{\sqrt[3]{3}} \right), \quad \mu = \frac{\beta_0}{\beta_2}. \end{aligned}$$

В таком случае общее решение уравнения четвертого порядка $Lf = 0$ при

$$L = d_x^4 + A_3(x) d_x^3 + A_2(x) d_x^2 + A_1(x) d_x + A_0(x),$$

где

$$\begin{aligned} A_3(x) &= 2(\sigma - x^2), & A_2(x) &= x^4 - 2\sigma x^2 + (2\alpha - 4)x + \sigma^2 - q + \mu, \\ A_1(x) &= 2(1 - \alpha)x^3 + (q - \mu)x^2 + 2\sigma(\alpha - 1)x + \sigma(q - \mu) + 2(\alpha - 1), \\ A_0(x) &= \alpha(1 - \alpha)x^2 + \alpha(q - \mu)x + \mu q - \alpha\sigma, \end{aligned}$$

имеет вид $f(x) = \psi(x) + \varphi(x)$. Также и в этой ситуации с использованием программы **Maple 16** нельзя решить обыкновенное дифференциальное уравнение $Lf = 0$. В заключение заметим, что семейство операторов второго порядка

$$Q = \beta_2 d_x^2 + \beta_1 d_x + \beta_2 \left(A_1 x + A_2 x^2 - \frac{9}{4} x^4 \right) + \beta_0$$

почти коммутирует с оператором $P_{\text{РТЧ}}$. Условие коммутативности (10) удовлетворено при $\beta_1 = 0$. Тогда общее решение уравнения $P_{\text{РТЧ}} \psi = 0$ записывается как

$$\begin{aligned} \psi(x) = & c_1 e^{-x^3/2 + A_2 x/3} H_T \left(A_0 + \frac{A_2^2}{9}, A_1, -\frac{2}{3} A_2; x \right) + \\ & + c_2 e^{x^3/2 - A_2 x/3} H_T \left(A_0 + \frac{A_2^2}{9}, -A_1, -\frac{2}{3} A_2; -x \right), \end{aligned} \quad (22)$$

а общее решение $Q\varphi = 0$ дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & c_3 e^{-x^3/2 + A_2 x/3} H_T \left(\mu + \frac{A_2^2}{9}, A_1, -\frac{2}{3} A_2; x \right) + \\ & + c_4 e^{x^3/2 - A_2 x/3} H_T \left(\mu + \frac{A_2^2}{9}, -A_1, -\frac{2}{3} A_2; -x \right) \end{aligned} \quad (23)$$

при μ , определенном выше. Следовательно, общее решение уравнения четвертого порядка $Lf = 0$ при $L = d_x^4 + B_2(x) d_x^2 + B_1(x) d_x + B_0(x)$, где

$$\begin{aligned} B_2(x) = & -\frac{9}{2} x^4 + 2A_2 x^2 + 2A_1 x + \mu + A_0, \quad B_1(x) = 2(-9x^3 + 2A_2 x + A_1), \\ B_0(x) = & \frac{81}{16} x^8 - \frac{9}{2} A_2 x^6 - \frac{9}{2} A_1 x^5 + \left[A_2^2 - \frac{9}{4} (\mu + A_0) \right] x^4 + 2A_1 A_2 x^3 + \\ & + [A_1^2 + A_2(A_0 + \mu) - 27] x^2 + A_1(A_0 + \mu)x + A_0\mu + 2A_2, \end{aligned}$$

есть просто функция $f(x) = \psi(x) + \varphi(x)$. В этом случае вновь нельзя найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lf = 0$ при помощи программы **Maple 16**.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение уравнения Гойна, а также его обобщений и решений является одной из важных задач в области дифференциальных уравнений, связанных с математической физикой. В силу того, что оно является обобщением гипергеометрического уравнения, не удивительно, что оно возникает в (математической) физике во множестве ситуаций. Достаточно исчерпывающий обзор по его применениям в физике и квантовой химии содержится в книге [4]. Более новые и неожиданные применения семейства уравнений Гойна в физике рассмотрены в работах [5], [9], [10]. В общей теории относительности уравнение Гойна связано с физикой черных дыр [8], [11], [12] и используется также в квантовой механике [13]–[15]. В частности, его можно элегантно связать с уравнением Шредингера [16]–[18], эффектом Штарка [19] и прочими специфическими задачами квантовой механики [20].

С математической точки зрения изучение уравнения Гойна и его конфлюэнтных форм далеко от завершения. Несмотря на то что можно с легкостью построить пары решений при помощи рядов Фробениуса возле каждой регулярной особенности и получить асимптотику решений на бесконечности, существует так называемая проблема связности для подобных локальных решений, поскольку построение интегральных представлений для решений является сложной задачей. В статье [21] были предприняты некоторые шаги для решения этой задачи: модификация методов, использованных в работе [7], позволяет решить двуточечную проблему связности для подкласса уравнения Гойна. Другие попытки можно найти в работах [4], [5], [22].

В настоящей статье принята иная точка зрения. Рассмотрено семейство Гойна дифференциальных операторов, приведенное в табл. 1, и для каждого члена семейства построен соответствующий наиболее общий класс коммутирующих дифференциальных операторов первого и второго порядков. Это, в свою очередь, позволяет показать, что при использовании данного метода можно аналитически получить решения сложных линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков с переменными коэффициентами несмотря на то, что с помощью программы Maple 16 нельзя этого сделать.

Список литературы

- [1] G. Floquet, “Sur la théorie des équations différentielles linéaires”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2), **8** (1879), 3–132; G. Wallenberg, “Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke”, *Arc. Math. Phys.* (3), **4** (1903), 252–268; J. Schur, “Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke”, *Sitzungsber. Berliner Math. Ges.*, **4** (1905), 2–8.
- [2] J. L. Burchall, T. W. Chaundy, “Commutative ordinary differential operators”, *Proc. London Math. Soc.*, **s2-21**:1 (1922), 420–440; *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **118**:780 (1928), 557–583; “Commutative ordinary differential operators. II. The identity $P^n = Q^m$ ”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **134**:824 (1931), 471–485.
- [3] R. A. Van Gorder, “Computing semi-commuting differential operators in one and multiple variables”, *Math. Commun.*, **19**:2 (2014), 201–219.
- [4] A. Ronveaux (ed.), *Heun’s Differential Equations*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [5] S. Yu. Slavyanov, W. Lay, *Special Functions: A Unified Approach Based on Singularities*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
- [6] K. Heun, “Zur Theorie der Riemann’schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten”, *Math. Ann.*, **33**:2 (1889), 161–179.
- [7] R. Schäfke, D. Schmidt, “The connection problem for general linear ordinary differential equations at two regular singular points with applications in the theory of special functions”, *SIAM J. Math. Anal.*, **11**:5 (1980), 848–862.
- [8] D. Batic, H. Schmid, M. Winklmeier, “The generalized Heun equation in QFT in curved spacetimes”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:40 (2006), 12559–12564.
- [9] M. Hortaçsu, “Heun functions and their uses in physics”, *Mathematical Physics* (Antalya, Turkey, 27–31 October, 2010), eds. U. Camci, I. Semiz, World Sci., Singapore, 2013, 23–39 pp.
- [10] P. P. Fiziev, “The Heun functions as a modern powerful tool for research in different scientific domains”, *arXiv*: 1512.04025.
- [11] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, International Series of Monographs on Physics, **69**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1983; R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics”, *Phys. Rev. Lett.*, **11**:5

- (1963), 237–238; S. A. Teukolsky, “Rotating black holes: separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations”, *Phys. Rev. Lett.*, **29**:16 (1972), 1114–1118; H. Suzuki, E. Tagasugi, H. Umetsu, “Perturbations of Kerr–de Sitter black holes and Heun’s equations”, *Prog. Theor. Phys.*, **100**:3 (1998), 491–505; E. G. Kalnins, W. Miller, Jr., G. F. Torres del Castillo, G. C. Williams, “Special functions and perturbations of black holes”, *Special Functions*, Proceedings of the International Workshop on Special Functions – Asymptotics, Harmonic Analysis and Mathematical Physics (IWSF’99) (Hong Kong, 21–25 June, 1999), eds. C. Dunkl, M. Ismail, R. Wong, World Sci., Singapore, 2000, 140–151.
- [12] D. Batic, H. Schmid, “Heun equation, Teukolsky equation, and type-D metrics”, *J. Math. Phys.*, **48**:4 (2007), 042502, 23 pp.
- [13] K. Bay, W. Lay, A. Akopyan, “Avoided crossings of the quartic oscillator”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:9 (1997), 3057–3067.
- [14] U. I. Tolstikhin, M. Matsuzawa, “Hyperspherical elliptic harmonics and their relation to the Heun equation”, *Phys. Rev. A*, **63**:3 (2001), 032510, 8 pp.
- [15] R. L. Hall, N. Saad, K. D. Sen, “Soft-core Coulomb potential and Heun’s differential equation”, *J. Math. Phys.*, **51**:2 (2010), 022107, 19 pp.
- [16] D. Batic, R. Williams, M. Nowakowski, “Potentials of the Heun class”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:24 (2013), 245204, 21 pp.
- [17] D. Batic, D. Mills-Howell, M. Nowakowski, “Potentials of the Heun class: the triconfluent case”, *J. Math. Phys.*, **56**:5 (2015), 052106, 17 pp.
- [18] G. Natanson, *Heun-polynomial representation of regular-at-infinity solutions for the basic susy ladder of hyperbolic Pöschl–Teller potentials starting from the reflectionless symmetric potential well*, arXiv:1410.1515.
- [19] P. S. Epstein, “The Stark effect from the point of view of Schroedinger’s quantum theory”, *Phys. Rev.*, **28**:4 (1926), 695–710.
- [20] V. Balan, A. M. Manukyan, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red’kov, O. V. Veko, “Confluent Heun functions and the Coulomb problem for spin 1/2 particle in Minkowski space”, arXiv:1410.8300; T. A. Ishkhanyan, Y. Pashayan-Leroy, M. R. Gevorgyan, C. Leroy, A. M. Ishkhanyan, “Expansions of the solutions of the biconfluent Heun equation in terms of incomplete Beta and Gamma functions”, *J. Contemp. Phys.*, **51**:3 (2016), 229–236; A. H. Wilson, “A generalised spheroidal wave equation”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **118** (1928), 617–635; T. T. Truong, D. Bazzali, “Exact low-lying states of two interacting equally charged particles in a magnetic field”, *Phys. Lett. A*, **269**:2–3 (2000), 186–193; A. Ralko, T. T. Truong, “Behaviour of three charged particles on a plane under perpendicular magnetic field”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:45 (2002), 9671–9683; E. W. Leaver, “Solutions to a generalized spheroidal wave equation: Teukolsky’s equations in general relativity, and the two-center problem in molecular quantum mechanics”, *J. Math. Phys.*, **27**:5 (1986), 1238–1265.
- [21] D. Batic, R. Williams, “The two-point connection problem for a sub-class of the Heun equation”, *J. Inequal. Spec. Funct.*, **6**:1 (2015), 1–11.
- [22] P. P. Fiziev, *A new approach to the connection problem for local solutions to the general Heun equation*, arXiv:1606.08539.

Поступила в редакцию 7.03.2017,
после доработки 16.05.2017