Общероссийский математический портал

Т. А. Аракелян, Когомологическая структура конформной аномалии, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 3, 351–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf937>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:39:57

© 1998 г.

Т. А. Аракелян*

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КОНФОРМНОЙ АНОМАЛИИ

Рассматривается когомологическая классификация разных видов конформных аномалий в размерности $D = 6$. Показано, что с точки зрения когомологической интерпретации разные классы этих аномалий имеют общее происхождение. Именно все они эквивалентны плотности Эйлера E_6 . По аналогии с калибровочными теориями развивается техника уравнения спуска для конформных аномалий. Исследуются все высшие коциклы группы Вейля. Описан общий метод построения всех конформных аномалий из плотности Эйлера E_{2n} в произвольных размерностях пространства-времени. Показано принципиальное различие структур этих аномалий в размерностях $D = 4$ и $D = 6$. Доказано отсутствие при размерности $D = 6$ конформно-инвариантного оператора (построенного из тензоров Римана, Риччи, скалярной кривизны и ковариантных производных), действующего на скаляр с нулевым конформным весом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исторически конформная аномалия описана более тридцати лет назад Даффом в его фундаментальных работах [1, 2]. Вопрос о конформной аномалии имеет длинную историю и многочисленные приложения в разных областях теоретической физики. Конформная симметрия играет первостепенную роль в теории струны и конформной теории поля. Эта симметрия была исследована с разных точек зрения как на классическом, так и на квантовом уровнях. Тем не менее полное понимание принципа нарушения конформной симметрии на квантовом уровне в высших размерностях (обязательно четномерных) отсутствует.

Последнее время, в основном благодаря работе Дезера и Швиммера [2], возобновляется интерес к проблеме классификаций конформных аномалий в произвольных размерностях. Геометрическая классификация конформной аномалии, предложенная этими авторами, основана на масштабных свойствах эффективного гравитационного действия, которое индуцируется конформно-инвариантными полями материи (спинорными, скалярными, векторными и т.д.). Вместе с тем Бонора и др. в серии работ [3, 4] по аналогии с калибровочными и гравитационными аномалиями исследовали когомологическую структуру конформной аномалии. Когомологический подход оказывается более успешным, поскольку дает возможность получить для аномалий самосогласованные

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения

выражения (удовлетворяющие условию Весса–Зумино) в высших размерностях пространства-времени без использования эффективного гравитационного действия. Хорошо известно, что вычисления, использующие эффективное гравитационное действие, основаны на теории возмущения и конкретных схемах регуляризации для устранения расходимостей [1], в то время как подход, основанный на исследовании кохомологических классов группы Вейля, более универсален и не зависит от теории возмущения и схем регуляризации [4–7].

В этой работе мы продолжаем кохомологический анализ конформных аномалий в высших размерностях, используя технику уравнений спуска. Мы строим также высшие коциклы для разных типов аномалий и классифицируем их с точки зрения кохомологического подхода. Кроме того, строится новый тип скаляра при размерности $D = 6$, инвариантного относительно преобразований Вейля. Этот скаляр состоит из двух тензоров Вейля, двух ковариантных производных и отличается от известных выражений для двух скаляров, построенных из трех тензоров Вейля. Мы предполагаем, что такие инварианты существуют также и для высших размерностей. Общее доказательство кохомологической эквивалентности аномалий типов (А) и (В) [2] основано на существовании таких инвариантов.

Работа организована следующим образом. Во втором разделе описаны возникновение конформной аномалии и условие самосогласованности, которому она удовлетворяет. Строится нильпотентный оператор δ на калибровочной группе (Вейля), определяются коцепи на группе и кохомологические классы кограниц [6]. Вводится другой нильпотентный оператор $\tilde{\nabla}_\mu$, действующий на полностью антисимметричных плотностях (аналог внешнего дифференцирования для форм). Вводится концепция уравнений спуска для классификации аномалий и инвариантных лагранжианов. В разделе 3 на этой основе классифицируются конформные аномалии в размерности $D = 6$, выводится новый тип аномалий. Из кохомологической эквивалентности аномалий типов (А) и (В) найдено выражение, инвариантное относительно группы Вейля. Дается явное выражение для высших коциклов группы Вейля. В разделе 4 исследуется возможность построения конформно-инвариантного оператора 6-го порядка (включающего оператор Δ^3 как слагаемое), доказана теорема об отсутствии таких операторов в размерности $D = 6$. Заметим, что для размерности $D = 4$ существование таких операторов хорошо известно [8]. В разделе 5 обсуждается различие структур конформных аномалий в размерностях $D = 4$ и $D = 6$, предлагаются различные способы преодоления трудностей, возникающих при построении эффективного гравитационного действия в размерности $D = 6$.

2. УРАВНЕНИЯ СПУСКА ДЛЯ КОНФОРМНЫХ АНОМАЛИЙ

Рассмотрим поля материи, взаимодействующие с внешним гравитационным полем. Действие $S_W(\varphi, g)$, описывающее эту систему, инвариантно относительно группы Вейля и диффеоморфизмов 6-мерного пространства-времени. Эффективное гравитационное действие получается при интегрировании по полям материи и имеет вид

$$W[g] = \ln \int \mathcal{D}_g \varphi \exp\{-S_W(\varphi, g)\}. \quad (1)$$

Утверждение о существовании конформной аномалии заключается в нарушении конформной инвариантности $W[g]$ относительно преобразования Вейля метрики

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \hat{g}_{\alpha\beta} = \exp\{\Omega(x)\} g_{\alpha\beta}(x). \quad (2)$$

Тогда аномальное тождество Уорда принимает вид

$$\delta W[g] = \int d^6 x \sqrt{g(x)} T_\mu^\mu(x) \delta\Omega(x). \quad (3)$$

Хорошо известно, что функциональная зависимость аномалий от метрики не может быть произвольной, а должна удовлетворять условию самосогласованности Весса–Зумино [5–7]. Последнее условие эквивалентно симметричности второй вариации $W[g]$:

$$\frac{\delta^2 W[g]}{\delta\Omega(x)\delta\Omega(y)} = \frac{\delta^2 W[g]}{\delta\Omega(y)\delta\Omega(x)}. \quad (4)$$

Здесь необходимо сделать несколько замечаний относительно конформной аномалии. Из теории возмущений для аномалии в следе вытекает нелокальный характер эффективного действия, а из этого факта – необходимость изменения общепринятого определения эквивалентности для двух типов аномалий. Условию самосогласованности Весса–Зумино можно придать вид

$$\frac{\delta[\sqrt{g(x)} T_\mu^\mu(x)]}{\delta\Omega(y)} = \frac{\delta[\sqrt{g(y)} T_\mu^\mu(y)]}{\delta\Omega(x)}. \quad (5)$$

Интегрируя по переменным x и y , имеем

$$\int d^6 y \frac{\delta L[g]}{\delta\Omega(y)} = \int d^6 x \frac{\delta L[g]}{\delta\Omega(x)}, \quad (6)$$

где

$$L[g] = \int d^6 x \sqrt{g(x)} T_\mu^\mu(x). \quad (7)$$

В такой форме для $L[g]$ условие Весса–Зумино всегда выполняется, поскольку в результате интегрирования в (7) вариация $\delta(\sqrt{g} T_\mu^\mu)$ определена с точностью до полной производной. Следовательно, две аномалии мы понимаем как эквивалентные, если конформные вариации отличаются на полную производную. Вспомним, что в калибровочных и гравитационных теориях две аномалии эквивалентны, если

$$\tilde{\omega}_n^1 - \omega_n^1 = \delta\Omega_n + d \sum_{n=1}^1. \quad (8)$$

Таким образом, наше определение эквивалентности – более слабое требование, чем это условие. Оказывается, существует удобный и красивый формализм, позволяющий чисто алгебраическим путем решить проблему классификаций инвариантных лагранжианов и аномалий. Для демонстрации этого формализма введем следующий оператор

конформной вариации, действующий на пространстве полиномов и построенный из тензоров Римана и ковариантных производных

$$\begin{aligned}\delta \hat{g}_{\alpha\beta} &= \delta\Omega \cdot \hat{g}_{\alpha\beta}, & \delta(\delta\Omega) &= 0, \\ \delta^2 \hat{g}_{\alpha\beta} &= \delta(\delta\Omega) \hat{g}_{\alpha\beta} + (\delta\Omega)^2 \hat{g}_{\alpha\beta} = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Оператор δ , действуя на 0-коцепях, отображает их на 1-коцепи группы Вейля ($D = 6$):

$$\begin{aligned}\delta \Gamma_{\rho\nu}^\lambda &= \frac{1}{2}(\delta_\rho^\lambda \nabla_\nu \delta\Omega + \delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \delta\Omega - g_{\nu\rho} \nabla^\lambda \delta\Omega), \\ \delta R_{\rho\sigma\nu\mu} &= \delta\Omega R_{\rho\sigma\nu\mu} + \frac{1}{2}(g_{\nu\rho} \nabla_\sigma \nabla_\mu \delta\Omega + g_{\sigma\mu} \nabla_\nu \nabla_\rho \delta\Omega - (\nu \rightleftharpoons \mu)).\end{aligned}\quad (10)$$

Из этих формул следует, что

$$\begin{aligned}\delta R_{\sigma\mu} &= \frac{1}{2}(4\nabla_\sigma \nabla_\mu \delta\Omega + g_{\sigma\mu} \Delta \delta\Omega), \\ \delta R &= -\delta\Omega \cdot R + 5\Delta \delta\Omega.\end{aligned}\quad (11)$$

Правила коммутации δ и ∇_λ даются формулой

$$\delta \nabla_\alpha A_{\mu_1 \dots \mu_n} = \nabla_\alpha \delta A_{\mu_1 \dots \mu_n} - \delta \Gamma_{\alpha\mu_1}^\sigma A_{\sigma \dots \mu_n} - \dots - \delta \Gamma_{\alpha\mu_n}^\sigma A_{\mu_1 \dots \sigma}. \quad (12)$$

Для дальнейших вычислений будет полезно ввести следующие определения для полиномов, построенных из тензоров Римана. Обозначим через $R_{\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}}^r$ множество всех полиномов от тензоров Римана ранга r (количество свободных индексов), степени q (число множителей $\nabla^k R$) и порядка S (число дифференцирования метрики), которые имеют следующий вид:

$$\nabla^\cdot \dots \nabla^\cdot R_{\cdot\cdot\cdot} \nabla^\cdot \dots \nabla^\cdot R_{\cdot\cdot\cdot} \dots \nabla^\cdot \dots \nabla^\cdot R_{\cdot\cdot\cdot}, \quad (13)$$

где рассматриваются всевозможные свертки индексов, кроме r штук, которые остаются свободными, и

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i + 2q = S.$$

Обозначим через $\omega_{\{k_1, \dots, k_p\}}^l$ пространство всех элементов вида

$$\nabla^\cdot \dots \nabla^\cdot \delta\Omega \dots \nabla^\cdot \dots \nabla^\cdot \delta\Omega \quad (14)$$

с l свободными индексами. Коцепь порядка p состоит из суммы произведений элементов из $\omega_{\{k_1, \dots, k_p\}}^l$ и $R_{\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}}^r$ со всевозможными свертками свободных индексов. Таким образом, символически можно написать

$$\begin{aligned}C_{\{k_1, \dots, k_p\}} &= \bigoplus_{m=0}^{r+l} C_{\{k_1, \dots, k_p\}}^m, \\ C_{\{k_1, \dots, k_p\}}^m &= \bigoplus_{\lambda_i \geq 0} C(R_{\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}}^r \omega_{\{k_1, \dots, k_p\}}^l),\end{aligned}\quad (15)$$

где C перед скобкой означает свертку $r + l$ свободных индексов до m -го. Такое определение понадобится для рассмотрения различных коцепей, возникающих в уравнении спуска. Заметим, что два элемента, отличающихся расположением ковариантных производных в мономах вида $\nabla \dots \nabla R$, предполагаются эквивалентными. Это следует из тождества

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\lambda = -R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\lambda A_\rho \quad (16)$$

и того факта, что разность этих элементов принадлежит пространству $R_{\{\lambda_1, \dots, \lambda_{q+1}\}}^\mu$. То же самое относится и к элементам из пространства $\omega_{\{k_1, \dots, k_p\}}^l$. Разность таких элементов принадлежит пространству $C_{\{k_1, \dots, k_p\}}^m$. Теперь мы можем определить правила коммутации для коцепей и операторов δ . Как мономы $\nabla^{k_1}\delta\Omega$ и $\nabla^{k_2}\delta\Omega$, так и операторы δ и $\nabla^k\delta\Omega$ антикоммутируют. Из этих определений немедленно получаем, что

$$\begin{aligned} C_p C_q &= (-1)^{pq} C_q C_p, \\ \delta(C_p C_q) &= \delta C_p \cdot C_q + (-1)^p C_p \cdot \delta C_q. \end{aligned} \quad (17)$$

Из соотношения (10) следует, что на 0-коцепях $\delta^2 = 0$. Из (17) имеем нильпотентность оператора δ на произвольных коцепях. Это свойство дает возможность определить когомологические классы оператора δ , т.е.

$$H_p = \frac{(\text{Ker } \delta_p)}{\text{Im } \delta_{p-1}},$$

где нижний индекс p у оператора показывает, что последний действует на коцепях порядка p и тем самым определяет p -ю группу когомологий. Мы также введем оператор внешнего дифференцирования, действующий на полностью антисимметричные плотности, которые одновременно являются коцепями порядка P :

$$\begin{aligned} A_p^{\mu_1 \dots \mu_n} &= \sqrt{g} C_p^{\mu_1 \dots \mu_n}, \\ C_p^{\mu_{\pi(1)} \dots \mu_{\pi(n)}} &= (-1)^{N_\pi} C_p^{\mu_1 \dots \mu_n}, \\ \tilde{\nabla}_{\mu_1} : A_p^{\mu_1 \dots \mu_n} &\rightarrow A_p^{\mu_2 \dots \mu_n}, \\ \tilde{\nabla}_{\mu_1} A_p^{\mu_1 \dots \mu_n} &= \sqrt{g} \nabla_{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{g}} A_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для полностью антисимметричных тензоров известна следующая формула:

$$\nabla_{\mu_1} C_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\mu_1} (\sqrt{g} C_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}), \quad (19)$$

которая показывает, что оператор $\tilde{\nabla}_{\mu_1}$ действует как обычная производная

$$\tilde{\nabla}_{\mu_1} A_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \partial_{\mu_1} A_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sqrt{g} \nabla_{\mu_1} C_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}. \quad (20)$$

Такое определение удобно для сохранения общекоординатной инвариантности плотностей. Вследствие этого постулируем коммутативность δ и $\tilde{\nabla}_\mu$:

$$[\delta, \tilde{\nabla}_\mu] = 0. \quad (21)$$

Из этих свойств оператора $\tilde{\nabla}_\mu$ следует его нильпотентность $(\tilde{\nabla}_\mu)^2 = 0$:

$$\tilde{\nabla}_{\mu_2} \nabla_{\mu_1} A_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sqrt{g} \nabla_{\mu_2} \nabla_{\mu_1} C_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_1} A_p^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = 0. \quad (22)$$

Теперь можно переформулировать условие самосогласованности Весса–Зумино для эффективного действия на кохомологическом языке:

$$\begin{aligned} \delta^2 W[g] &= 0, \\ \delta(\sqrt{g} T_\mu^\mu(x)) &= \sqrt{g} \nabla_\lambda (A^{\lambda\rho} \nabla_\rho \delta\Omega) = \tilde{\nabla}_\lambda A_1^\lambda, \end{aligned} \quad (23)$$

где $A^{\lambda\rho} = A^{\rho\lambda}$ – симметричный по индексам полином от тензоров Римана. Соотношение (23) является следствием симметричности второй вариации $W[g]$ и антикоммутативности $\delta\Omega(x)$ и $\delta\Omega(y)$. В кохомологическом подходе первое соотношение в (23) – это просто следствие нильпотентности оператора δ , в то время как второе – следствие условия, являющегося первым соотношением уравнения спуска. Приведенные ниже соотношения следуют из (23), нильпотентности операторов δ и $\tilde{\nabla}_\mu$ и алгебраического варианта леммы Пуанкаре:

$$\begin{aligned} \delta A_1^\lambda &= \tilde{\nabla}_\mu A_2^{\lambda\mu}, \\ &\vdots \\ \delta A_{k-1}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}} &= \tilde{\nabla}_{\mu_k} A_k^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \mu_k}, \\ \delta A_k^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \mu_k} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АНОМАЛИЙ В РАЗМЕРНОСТИ $D = 6$

Рассмотрим разные формы аномалий в размерности $D = 6$, удовлетворяющие условию самосогласованности Весса–Зумино. Как известно, существует аномалия типа (А) [2], пропорциональная плотности Эйлера E_6 . Наша цель заключается в получении уравнения спуска для аномалий такого типа:

$$\begin{aligned} \delta E_6 &= \tilde{\nabla}_\mu B_1^\mu, \\ \delta B_1^\mu &= \tilde{\nabla}_\nu B_2^{\mu\nu}, \\ \delta B_2^{\mu\nu} &= \tilde{\nabla}_\rho B_3^{\mu\nu\rho}, \\ \delta B_3^{\mu\nu\rho} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} E_6 &= \sqrt{g} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_6} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_6} R_{\alpha_1 \alpha_2}^{\beta_1 \beta_2} R_{\alpha_3 \alpha_4}^{\beta_3 \beta_4} R_{\alpha_5 \alpha_6}^{\beta_5 \beta_6}, \\ B_1^\mu &= -6\sqrt{g} \varepsilon^{\mu \alpha_2 \dots \alpha_6} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_6} \delta \Gamma_{\gamma \alpha_2}^{\beta_1} \cdot g^{\gamma \beta_2} R_{\alpha_3 \alpha_4}^{\beta_3 \beta_4} R_{\alpha_5 \alpha_6}^{\beta_5 \beta_6}, \\ B_2^{\mu\nu} &= -12\sqrt{g} \varepsilon^{\mu \alpha_2 \nu \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_6} \delta \Gamma_{\gamma \alpha_2}^{\beta_1} \cdot g^{\gamma \beta_2} \delta \Gamma_{\rho \alpha_4}^{\beta_3} g^{\rho \beta_4} R_{\alpha_5 \alpha_6}^{\beta_5 \beta_6}, \\ B_3^{\mu\nu\rho} &= 8\sqrt{g} \varepsilon^{\mu \alpha_2 \nu \alpha_4 \rho \alpha_6} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_6} \delta \Gamma_{\gamma \alpha_2}^{\beta_1} \cdot g^{\gamma \beta_2} \delta \Gamma_{\mu \alpha_4}^{\beta_3} g^{\mu \beta_4} \delta \Gamma_{\nu \alpha_6}^{\beta_5} g^{\nu \beta_6}, \end{aligned}$$

где B_1^μ , $B_2^{\mu\nu}$ и $B_3^{\mu\nu\rho}$ – соответственно 1-, 2- и 3-коциклы.

Полезно привести выражение для E_6 в терминах тензоров Римана и Вейля:

$$\begin{aligned} E_6 &= 8\sqrt{g}(2I_1 - 8I_2 - 24I_3 + 3I_4 + 24I_5 + 16I_6 - 12I_7 + I_8) = \\ &= 8\sqrt{g}\left(2J_1 - 8J_2 - 6J_3 + \frac{6}{5}J_4 + 3J_5 + \frac{3}{2}I_6 - \frac{27}{20}I_7 + \frac{21}{100}I_8\right), \end{aligned} \quad (26)$$

где использован следующий базис скаляров, построенных из тензоров Римана и Вейля:

$$\begin{aligned} I_1 &= R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} R_{\alpha\beta}^{\lambda\sigma}, & J_1 &= C_{\mu\nu}^{\alpha\beta} C_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} C_{\alpha\beta}^{\lambda\sigma}, \\ I_2 &= R_{\mu\nu}^{\lambda\alpha} R_{\lambda\rho}^{\mu\sigma} R_{\alpha\sigma}^{\nu\rho}, & J_2 &= C_{\mu\nu}^{\lambda\alpha} C_{\lambda\rho}^{\mu\sigma} C_{\alpha\sigma}^{\nu\rho}, \\ I_3 &= R_{\mu}^{\nu} R_{\rho\sigma}^{\mu\lambda} R_{\nu\lambda}^{\rho\sigma}, & J_3 &= R_{\mu}^{\nu} C_{\rho\sigma}^{\mu\lambda} C_{\nu\lambda}^{\rho\sigma}, \\ I_4 &= R R_{\rho\sigma}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}, & J_4 &= R C_{\rho\sigma}^{\mu\nu} C_{\mu\nu}^{\rho\sigma}, \\ I_5 &= R_{\nu}^{\mu} R_{\rho}^{\sigma} R_{\mu\sigma}^{\nu\rho}, & J_5 &= R_{\nu}^{\mu} R_{\rho}^{\sigma} C_{\mu\sigma}^{\nu\rho}, \\ I_6 &= R^{\mu\nu} R_{\mu\sigma} R_{\nu}^{\sigma}, & I_8 &= R^3, \\ I_7 &= R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, & K &= C_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \Delta C_{\alpha\beta}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (27)$$

Используя определение тензора Вейля, мы легко получим формулы перехода от одного базиса полиномов от тензоров Римана к другому, в котором все тензоры Римана заменены тензорами Вейля:

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 + 3J_3 - \frac{3}{10}J_4 + \frac{3}{2}J_5 + \frac{1}{4}I_6 + \frac{3}{40}I_7 - \frac{3}{200}I_8, \\ I_2 &= J_2 - \frac{3}{2}J_3 + \frac{3}{20}J_4 - \frac{3}{8}I_6 + \frac{3}{16}I_7 - \frac{7}{400}I_8, \\ I_3 &= J_3 + J_5 + \frac{1}{4}I_6 + \frac{7}{40}I_7 - \frac{1}{40}I_8, \\ I_4 &= J_4 + I_7 - \frac{1}{10}I_8, \\ I_5 &= J_5 + \frac{11}{20}I_7 - \frac{1}{2}I_6 - \frac{1}{20}I_8, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} C^{\nu\alpha\beta\gamma} C^{\rho}_{\alpha\beta\gamma} &= R^{\nu\alpha\beta\gamma} R^{\rho}_{\alpha\beta\gamma} - R^{\nu\alpha\rho\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{3}{4} R^{\nu\alpha} R_{\alpha}^{\rho} + \\ &\quad + \frac{1}{8} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g^{\nu\rho} + \frac{1}{4} R^{\nu\rho} R - \frac{1}{40} g^{\nu\rho} R^2, \\ C^{\nu\alpha\beta\gamma} C_{\nu\alpha\beta\gamma} &= R^{\nu\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} - R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{10} R^2. \end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в выполнении аналогичных преобразований для остальных ко-

ЦИКЛОВ:

$$\begin{aligned}
B_1^\mu &= 24\sqrt{g} \left[\nabla^\mu \delta\Omega \cdot (R_{\nu\rho}^{\alpha\beta} R^{\nu\rho}{}_{\alpha\beta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2) - \right. \\
&\quad \left. - 4\nabla_\rho \delta\Omega \cdot (R^{\mu\alpha\beta\gamma} R^\rho{}_{\alpha\beta\gamma} - 2R^{\mu\alpha\rho\beta} R_{\alpha\beta} - 2R^{\mu\alpha} R_\alpha^\rho + R^{\mu\rho} R) \right], \\
B_1^\mu &= 24\sqrt{g} \left[\nabla^\mu \delta\Omega \left(C^{\alpha\beta\nu\rho} C_{\alpha\beta\nu\rho} - \frac{3}{2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{3}{5} R^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \nabla_\rho \delta\Omega \cdot \left(-4C^{\mu\alpha\beta\gamma} C^\rho{}_{\alpha\beta\gamma} + 4C^{\mu\alpha\rho\beta} R_{\alpha\beta} + 3R^{\mu\alpha} R_\alpha^\rho - \frac{9}{5} R^{\mu\rho} R \right) \right], \\
B_2^{\mu\nu} &= -96\sqrt{g} (R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \nabla^\alpha \delta\Omega \cdot \nabla^\beta \delta\Omega + 2R_\alpha^\mu \nabla^\nu \delta\Omega \cdot \nabla^\alpha \delta\Omega - \\
&\quad - 2R_\alpha^\nu \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\alpha \delta\Omega + R \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\nu \delta\Omega), \\
B_2^{\mu\nu} &= -48\sqrt{g} \left(2C^{\mu\nu\rho\pi} \nabla_\rho \delta\Omega \cdot \nabla_\pi \delta\Omega + 3R_\alpha^\mu \nabla^\nu \delta\Omega \cdot \nabla^\alpha \delta\Omega - \right. \\
&\quad \left. - 3R_\alpha^\nu \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\alpha \delta\Omega + \frac{9}{5} R \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\nu \delta\Omega \right), \\
B_3^{\mu\nu\rho} &= -288\sqrt{g} \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\nu \delta\Omega \cdot \nabla^\rho \delta\Omega.
\end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим теперь аналогичную процедуру для конформной аномалии второго типа (В) из геометрической классификации [2], а затем сравним соответствующие кошиклы. Аномалия последнего типа состоит из двух тензоров Вейля и одного лапласиана и имеет вид

$$\begin{aligned}
A_3 &= \sqrt{g} \left(C_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Delta C_{\mu\nu}^{\rho\sigma} + 2C^{\mu\nu\rho\alpha} C_{\mu\nu\rho\alpha} R_\alpha^\beta - 3C_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2} R^{\nu\sigma} R_{\sigma\alpha} R_\nu^\alpha + \frac{27}{20} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} R - \frac{21}{100} R^3 \right).
\end{aligned} \tag{30}$$

Оставляя громоздкие вычисления, получаем следующее уравнение спуска:

$$\begin{aligned}
\delta A_3 &= \tilde{\nabla}_\mu A_1^\mu, \\
\delta A_1^\mu &= \tilde{\nabla}_\nu A_2^{\mu\nu}, \\
\delta A_2^{\mu\nu} &= \tilde{\nabla}_\pi A_3^{\mu\nu\pi}, \\
\delta A_3^{\mu\nu\pi} &= 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1^\mu &= \sqrt{g} (4R^{\rho\sigma\nu\mu} R_{\rho\sigma\nu\pi} \nabla^\pi \delta\Omega - 16R^{\rho\mu\nu\pi} R_{\rho\nu} \nabla_\pi \delta\Omega + \\
&\quad + 8R^{\nu\rho} R_{\nu\rho} \nabla^\mu \delta\Omega - 18R^{\sigma\mu} R_{\sigma\pi} \nabla^\pi \delta\Omega + \\
&\quad + 10R^{\mu\pi} R \cdot \nabla_\pi \delta\Omega - \frac{5}{2} R^2 \nabla^\mu \delta\Omega), \\
A_2^{\mu\rho} &= 12\sqrt{g} (R^{\mu\rho\nu\pi} \nabla_\nu \delta\Omega \cdot \nabla_\pi \delta\Omega + 2R^{\mu\nu} \nabla^\rho \delta\Omega \cdot \nabla_\nu \delta\Omega - \\
&\quad - 2R^{\rho\nu} \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla_\nu \delta\Omega + R \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\rho \delta\Omega), \\
A_3^{\mu\nu\pi} &= 36\sqrt{g} \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\nu \delta\Omega \cdot \nabla^\pi \delta\Omega.
\end{aligned} \tag{31}$$

Величины A_1^μ , $A_2^{\mu\nu}$, $A_3^{\mu\nu\pi}$ являются 1-, 2-, 3-коциклами группы Вейля, соответственно. Как и в предыдущем случае, A_1^μ и $A_2^{\mu\rho}$ представляются в виде

$$\begin{aligned} A_1^\mu &= \sqrt{g} \left[\nabla^\mu \delta\Omega \cdot \left(\frac{9}{2} R^{\nu\rho} R_{\nu\rho} - \frac{9}{5} R^2 \right) + \nabla_\rho \delta\Omega \cdot \left(4C^{\mu\pi\nu\sigma} C^\rho{}_{\pi\nu\sigma} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 12C^{\mu\pi\rho\sigma} R_{\pi\sigma} - 9R^{\mu\sigma} R_\sigma^\rho + \frac{27}{5} R^{\mu\rho} R \right) \right], \\ A_2^{\mu\rho} &= 6\sqrt{g} [2C^{\mu\rho\nu\pi} \nabla_\nu \delta\Omega \cdot \nabla_\pi \delta\Omega - 3R^{\rho\nu} \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla_\nu \delta\Omega + \\ &\quad + 3R^{\mu\nu} \nabla^\rho \delta\Omega \cdot \nabla_\nu \delta\Omega + \frac{9}{5} R \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\rho \delta\Omega]. \end{aligned} \quad (32)$$

Из сравнения (29) и (32) непосредственно следует, что

$$\frac{1}{8} B_1^\mu + A_1^\mu = \sqrt{g} (3\nabla^\mu \delta\Omega \cdot C^{\alpha\beta\nu\rho} C_{\alpha\beta\nu\rho} - 8\nabla_\rho \delta\Omega \cdot C^{\mu\alpha\beta\gamma} C^\rho{}_{\alpha\beta\gamma}). \quad (33)$$

Последнее выражение легко интегрируется:

$$\frac{1}{8} B_1^\mu + A_1^\mu = \delta \left(-3\sqrt{g} C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \nabla^\mu C_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} - \frac{16}{3} \sqrt{g} C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \nabla^\rho C_{\rho\nu}^{\alpha\beta} \right). \quad (34)$$

Тогда из первых уравнений спуска для аномалий типов (А) и (В) имеем

$$\delta \left(\frac{1}{8} E_6 + A_3 \right) = \sqrt{g} \nabla_\mu \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{8} B_1^\mu + A_1^\mu \right) \quad (35)$$

или, что то же самое,

$$\delta \left(\frac{1}{8} E_6 + A_3 + \sqrt{g} \nabla_\mu \left(3C^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^\mu C_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{16}{3} C^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\rho C^\rho{}_{\nu\alpha\beta} \right) \right) = 0. \quad (36)$$

С помощью представления (26) прямым вычислением можно убедиться в инвариантности выражения (36) относительно вейлевских преобразований. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{8} E_6 + A_3 = \sqrt{g} \left(2J_1 - 8J_2 - 4J_3 + \frac{6}{5} J_4 + K \right) \quad (37)$$

и

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{g}J_3 &= 2\sqrt{g}C_{\rho\sigma}^{\mu\lambda}C_{\nu\lambda}^{\rho\sigma}\nabla^\nu\nabla_\mu\delta\Omega + \frac{1}{2}\sqrt{g}C_{\rho\sigma}^{\mu\lambda}C_{\mu\lambda}^{\rho\sigma}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\delta\Omega, \\ \delta\sqrt{g}J_4 &= 5\sqrt{g}C_{\rho\sigma}^{\mu\nu}C_{\mu\nu}^{\rho\sigma}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\delta\Omega, \\ \delta\sqrt{g}K &= -4\sqrt{g}C^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu\delta\Omega \cdot \nabla^\pi C_{\pi\nu\rho\sigma} + 4\sqrt{g}C^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu C_{\pi\nu\rho\sigma} \cdot \nabla^\pi\delta\Omega - \\ &\quad - \sqrt{g}C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\delta\Omega, \end{aligned} \quad (38)$$

можно немедленно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{8} E_6 + A_3 \right) &= 3\sqrt{g}C_{\rho\sigma}^{\mu\nu}C_{\mu\nu}^{\rho\sigma}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\delta\Omega - 8\sqrt{g}C_{\rho\sigma}^{\mu\lambda}C_{\nu\lambda}^{\rho\sigma}\nabla^\nu\nabla_\mu\delta\Omega - \\ &\quad - 4\sqrt{g}C^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla^\pi C_{\pi\nu\rho\sigma}\nabla_\mu\delta\Omega + 4\sqrt{g}C^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu C_{\pi\nu\rho\sigma}\nabla^\pi\delta\Omega, \\ \sqrt{g}\nabla_\mu \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{8} B_1^\mu + A_1^\mu \right) &= 3\sqrt{g}C_{\nu\rho}^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}^{\nu\rho}\nabla^\mu\nabla_\mu\delta\Omega - \\ &\quad - 8\sqrt{g}C_{\beta\gamma}^{\mu\alpha}C_{\rho\alpha}^{\beta\gamma}\nabla_\mu\nabla^\rho\delta\Omega + 6\sqrt{g}C_{\nu\rho}^{\alpha\beta}\nabla_\mu C_{\alpha\beta}^{\nu\rho} \cdot \nabla^\mu\delta\Omega - \\ &\quad - 8\sqrt{g}\nabla_\mu C^{\mu\alpha\beta\gamma} \cdot C_{\alpha\beta\gamma}^\rho\nabla_\rho\delta\Omega - 8\sqrt{g}C^{\mu\alpha\beta\gamma}\nabla_\mu C^\rho{}_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\rho\delta\Omega. \end{aligned} \quad (39)$$

На первый взгляд разность двух соотношений (39) не равна нулю, а дает

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{8} E_6 + A_3 \right) - \sqrt{g} \nabla_\mu \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{8} B_1^\mu + A_1^\mu \right) = \\ = -6\sqrt{g} \nabla^\mu \delta\Omega \cdot C_{\nu\rho}^{\alpha\beta} \nabla_\mu C_{\alpha\beta}^{\nu\rho} + 4\sqrt{g} \nabla_\rho \delta\Omega \cdot \nabla_\mu C_{\alpha\beta\gamma}^\mu \cdot C^{\rho\alpha\beta\gamma} + \\ + 12\sqrt{g} \nabla_\rho \delta\Omega \cdot C^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\mu C_{\alpha\beta\gamma}^\rho \equiv -6G_1 + 4G_2 + 12G_3. \end{aligned} \quad (40)$$

Однако благодаря равенствам

$$\begin{aligned} G_1 &= \sqrt{g} \nabla^\mu \delta\Omega \cdot C_{\nu\rho}^{\alpha\beta} \cdot \nabla_\mu C_{\alpha\beta}^{\nu\rho} = 2\sqrt{g} \nabla^\mu \delta\Omega \cdot C^{\alpha\beta\nu\rho} \nabla_\alpha R_{\mu\beta\nu\rho}, \\ G_2 &= \sqrt{g} \nabla_\rho \delta\Omega \cdot C_{\alpha\beta\gamma}^\rho \nabla_\mu C^{\mu\alpha\beta\gamma} = -\frac{3}{2} \sqrt{g} \nabla_\rho \delta\Omega \cdot C_{\beta\gamma\alpha}^\rho \nabla^\beta R^{\gamma\alpha}, \\ G_3 &= \sqrt{g} \nabla_\rho \delta\Omega \cdot C^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\mu C_{\alpha\beta\gamma}^\rho = \sqrt{g} \nabla_\rho \delta\Omega \cdot C^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\mu R_{\alpha\beta\gamma}^\rho + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{g} \nabla_\beta \delta\Omega \cdot C^{\mu\alpha\gamma\beta} \cdot \nabla_\mu R_{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (41)$$

получаем нетривиальное тождество

$$-6G_1 + 4G_2 + 12G_3 = 0. \quad (42)$$

Таким образом, мы проверили инвариантность соотношения (37) двумя различными способами: во-первых, используя уравнение спуска, во-вторых, непосредственными вычислениями, используя нетривиальное тождество (42). Сравнивая выражения (40) и (42), немедленно получаем

$$\begin{aligned} \delta \left(\sqrt{g} \left(-4J_3 + \frac{6}{5} J_4 + 4K + 3 \nabla_\mu C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \cdot \nabla^\mu C_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16}{3} \nabla_\mu C^{\mu\nu\alpha\beta} \cdot \nabla_\rho C_{\nu\alpha\beta}^\rho + \frac{16}{3} C^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\rho C_{\nu\alpha\beta}^\rho \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Соотношение (37) – пример нетривиального конформного (вейлевского) инварианта, который состоит из двух тензоров Вейля и двух ковариантных производных.

Теперь рассмотрим следствия этих вычислений и опишем возможные обобщения последних. Первое заключение, следующее из соотношения (40), – эквивалентность аномалий типов (А) и (В) в слабом смысле. Второе заключение состоит в том, что подход, основанный на уравнении спуска, дает систематический способ обобщения этих результатов на высшие размерности $D = 8, 10, \dots$ и т.д. Используя полученные результаты, приведем другой тип конформной аномалии, который эквивалентен E_6 в когомологическом смысле, но отличается с геометрической точки зрения. Для этого мы рассмотрим выражение для $B_3^{\mu\nu\rho}$ и попытаемся интегрировать уравнения спуска снизу вверх:

$$\tilde{\nabla}_\rho \tilde{B}_3^{\mu\nu\rho} = \delta \bar{B}_2^{\mu\nu}, \quad (44)$$

где

$$\bar{B}_2^{\mu\nu} = -144\sqrt{g} \left\{ R_\rho^\mu \nabla^\nu \delta\Omega \cdot \nabla^\rho \delta\Omega - R_\rho^\nu \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\rho \delta\Omega + \frac{3}{5} R \nabla^\mu \delta\Omega \cdot \nabla^\nu \delta\Omega \right\}. \quad (45)$$

Заметим, что 2-коцикл $\overline{B}_2^{\mu\nu}$ не совпадает с ранее полученными выражениями для $B_2^{\mu\nu}$ и $A_2^{\mu\nu}$. Разность последних, как нетрудно проверить, следующая:

$$B_2^{\mu\nu} - \overline{B}_2^{\mu\nu} = -96\sqrt{g}C_{\alpha\beta}^{\mu\nu}\nabla^\alpha\delta\Omega \cdot \nabla^\beta\delta\Omega, \quad (46)$$

и является вейлевским инвариантом, как это и следует из уравнения спуска. Оставляя подробности сложных вычислений, мы восстанавливаем общую форму аномалии, соответствующей 2-коциклу $\overline{B}_2^{\mu\nu}$, с точностью до числовых констант:

$$\begin{aligned} D = \sqrt{g} & \left(\alpha_1 \nabla^\mu R \cdot \nabla_\mu R + \alpha_2 R \Delta R + \alpha_3 R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu R + \alpha_4 R R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \right. \\ & + \alpha_5 \nabla^\nu R_\rho^\mu \cdot \nabla_\mu R_\nu^\rho + \alpha_6 R_\rho^\mu R_\nu^\rho R_\mu^\nu + \alpha_7 R^{\mu\nu} \Delta R_{\mu\nu} + \\ & \left. + \alpha_8 \nabla_\lambda R^{\mu\nu} \nabla^\lambda R_{\mu\nu} + \alpha_9 R_\rho^\nu R_\nu^\rho R + \alpha_{10} R^3 + \alpha_{11} \Delta \Delta R \right) + (\dots), \end{aligned} \quad (47)$$

где точки обозначают слагаемые, включающие тензоры Римана. И снова этот тип аномалий по геометрической классификации отличается от ранее найденных выражений (25) и (30), но эквивалентен аномалии E_6 в когомологическом смысле.

4. КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В РАЗМЕРНОСТИ $D = 6$

Обсудим проблему построения эффективного гравитационного действия в размерности $D = 6$ при помощи уже известных выражений для конформной аномалии. Можно попытаться непосредственно обобщить результаты работы [8], где построено нелокальное гравитационное действие в размерности $D = 4$, хотя на этом пути имеются определенные трудности, которые показывают существенное различие между случаями $D = 4$ и $D = 6$. Процедура построения действия, предложенная в работе [8], основана на существовании конформно-инвариантного оператора 4-го порядка (включающего оператор Δ^2 как слагаемое) и особой структуры конформной аномалии в размерности $D = 4$. Покажем, что в размерности $D = 6$ конформно-инвариантный оператор 6-го порядка (включающий Δ^3 как слагаемое), построенный из тензоров Римана, Риччи, скалярной кривизны и ковариантных производных, не существует. Доказательство этого утверждения основано на уравнении спуска и получается следующим образом. Предположим противное и допустим, что такой оператор построен. Тогда имеем

$$P = \sqrt{g}\Delta^3 + D \quad (48)$$

и

$$\delta\sqrt{g}\Delta^3 = \sqrt{g}\nabla_\nu \frac{1}{\sqrt{g}}\delta(\sqrt{g}\nabla^\nu\Delta\Delta), \quad (49)$$

где введен оператор

$$D = \sqrt{g}\nabla_\nu D^\nu = \tilde{\nabla}_\nu \sqrt{g}D^\nu. \quad (50)$$

Учитывая инвариантность P , получим

$$\delta P = \tilde{\nabla}_\nu \delta(\sqrt{g}\nabla^\nu\Delta\Delta) + \tilde{\nabla}_\nu \delta\sqrt{g}D^\nu = 0, \quad (51)$$

так что имеем

$$\delta(\sqrt{g}\nabla^\nu\Delta\Delta) + \delta(\sqrt{g}D^\nu) = \tilde{\nabla}_\mu F_1^{\nu\mu}, \quad (52)$$

где $F_1^{\mu\nu} \equiv -F_1^{\nu\mu}$. Остальная часть доказательства заключается в анализе уравнения (52). Во-первых, выражение для $F_1^{\mu\nu}$ не может быть произвольным, а должно удовлетворять следующим соотношениям уравнения спуска, т.е.

$$\begin{aligned}\delta F_1^{\nu\mu} &= \tilde{\nabla}_\rho F_2^{\nu\mu\rho}, \\ \delta F_2^{\nu\mu\rho} &= 0.\end{aligned}\quad (53)$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{g} \nabla^\nu \Delta \Delta) &= \sqrt{g} \nabla_\sigma F_1^{\nu\sigma} + \delta(2\sqrt{g} R^{\nu\mu} \nabla_\mu \Delta + 2\sqrt{g} R^{\mu\sigma} \nabla^\nu \nabla_\mu \nabla_\sigma - \sqrt{g} R \nabla^\nu \Delta) + \\ &+ \left(-\sqrt{g} \nabla^\nu \Delta \delta \Omega \cdot \Delta + 2\sqrt{g} \nabla^\sigma \Delta \delta \Omega \cdot \nabla^\nu \nabla_\sigma + 4\sqrt{g} \nabla^\nu \nabla^\lambda \nabla^\sigma \delta \Omega \cdot \nabla_\lambda \nabla_\sigma - \right. \\ &- 10\sqrt{g} R^{\nu\mu} \nabla^\rho \delta \Omega \cdot \nabla_\mu \nabla_\rho + 6\sqrt{g} R^{\mu\sigma} \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \nabla_\mu \nabla_\sigma + \\ &+ 4\sqrt{g} R^{\nu\mu} \nabla_\mu \delta \Omega \cdot \Delta - 2\sqrt{g} R^{\sigma\rho} \nabla_\rho \delta \Omega \cdot \nabla_\sigma \nabla^\nu + \\ &\left. + \frac{12}{5} \sqrt{g} R \nabla^\lambda \delta \Omega \cdot \nabla_\lambda \nabla^\nu - \frac{12}{5} \sqrt{g} R \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \Delta \right) + (\dots),\end{aligned}\quad (54)$$

где $F_1^{\mu\nu}$ имеет вид

$$\begin{aligned}F_1^{\mu\nu} &= 2\sqrt{g}(\nabla^\mu \delta \Omega \cdot \nabla^\nu \Delta - \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \nabla^\mu \Delta) + \\ &+ 4\sqrt{g}(R^{\nu\rho} \nabla^\mu \delta \Omega \cdot \nabla_\rho - R^{\mu\rho} \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \nabla_\rho) + \\ &+ 2\sqrt{g}(R^{\mu\rho} \nabla_\rho \delta \Omega \cdot \nabla^\nu - R^{\nu\rho} \nabla_\rho \delta \Omega \cdot \nabla^\mu) + \\ &+ \frac{7}{5} \sqrt{g}(R \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \nabla^\mu - R \cdot \nabla^\mu \delta \Omega \cdot \nabla^\nu),\end{aligned}\quad (55)$$

а точки обозначают операторы первого порядка. Дальнейшие вычисления показывают, что $F_1^{\mu\nu}$ действительно удовлетворяет уравнению спуска (53), а $F_2^{\mu\nu\rho}$ имеет форму

$$F_2^{\mu\nu\rho} = 4\sqrt{g}(\nabla^\mu \delta \Omega \cdot \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \nabla^\rho + \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \nabla^\rho \delta \Omega \cdot \nabla^\mu + \nabla^\rho \delta \Omega \cdot \nabla^\mu \delta \Omega \cdot \nabla^\nu). \quad (56)$$

Следующий шаг заключается в построении таких операторов 2-го порядка, состоящих из тензоров Римана (Риччи, скалярной кривизны) и ковариантных производных, вариации которых сокращают операторную часть 2-го порядка в выражении (63). Однако имеется только ограниченное число операторов 2-го порядка, а именно:

$$\sqrt{g} \nabla^\nu R \Delta; \quad \sqrt{g} \nabla^\mu R \nabla^\nu \nabla_\mu; \quad \sqrt{g} \nabla^\nu R^{\mu\rho} \cdot \nabla_\mu \nabla_\rho; \quad \sqrt{g} \nabla^\mu R^{\nu\rho} \nabla_\mu \nabla_\rho \quad (57)$$

(все остальные операторы, которые могут быть построены из тензоров Римана благодаря тождеству Бианки и свойствам симметрии, приводятся к отмеченным выше). Выполняя вычисления, находим

$$\begin{aligned}\delta(A\sqrt{g} \nabla^\nu R \cdot \Delta + B\sqrt{g} \nabla^\mu R \cdot \nabla^\nu \nabla_\mu + C\sqrt{g} \nabla^\nu R^{\mu\rho} \nabla_\mu \nabla_\rho + F\sqrt{g} \nabla^\mu R^{\nu\rho} \nabla_\mu \nabla_\rho) = \\ = \sqrt{g} \left(\left(5A + \frac{C}{2} \right) \nabla^\nu \Delta \delta \Omega \cdot \Delta + \left(5B + \frac{F}{2} \right) \nabla^\mu \Delta \delta \Omega \cdot \nabla^\nu \nabla_\mu + \right. \\ + (2C + 2F) \nabla^\mu \nabla^\nu \nabla^\rho \delta \Omega \cdot \nabla_\mu \nabla_\rho + \left(C + \frac{F}{2} \right) R^{\sigma\rho} \nabla_\sigma \delta \Omega \cdot \nabla^\nu \nabla_\rho - \\ - (C + F) R^{\nu\rho} \nabla^\mu \delta \Omega \cdot \nabla_\mu \nabla_\rho - \left(C + \frac{F}{2} \right) R^{\mu\rho} \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \nabla_\mu \nabla_\rho - \\ \left. - B \cdot R \nabla^\mu \delta \Omega \cdot \nabla_\mu \nabla^\nu - A R \nabla^\nu \delta \Omega \cdot \Delta + \frac{F}{2} R^{\nu\mu} \nabla_\mu \delta \Omega \cdot \Delta \right) + (\dots),\end{aligned}\quad (58)$$

где точки обозначают операторы 1-го порядка, а константы A , B и C определяются из сравнения (54) и (58). Тогда для четырех констант мы получаем 9 уравнений (количество операторов 2-го порядка в (54)). Эта система уравнений переопределена и не имеет решения. Последнее наблюдение завершает доказательство утверждения об отсутствии конформно-инвариантного оператора 6-го порядка в размерности $D = 6$. Таким образом, структура конформной аномалии в размерности $D = 4$ существенным образом отличается от той, которая имеется в размерности $D = 6$, и эффективное гравитационное действие в этом случае не может быть построено в полной аналогии с тем подходом, который развивается в работе [8].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные результаты, полученные в этой работе. Во-первых, предлагается новый подход к проблеме классификаций конформных аномалий в высших размерностях. Продемонстрировано преимущество кохомологической классификации, основанной на технике уравнений спуска, по сравнению с геометрической. Найден новый конформный инвариант, который используется при доказательстве эквивалентности аномалий типов (A) и (B). Для построения эффективного действия исследованы конформно-инвариантные операторы в размерности $D = 6$. В этом случае мы имеем отрицательный ответ в отношении существования оператора подобного типа, который означает, что структуры конформных аномалий существенным образом различаются в случае размерностей $D = 4$ и $D = 6$. Возможные пути решения этих проблем при $D = 6$ исследуются.

Список литературы

- [1] *S. Deser, M. J. Duff, C. J. Isham.* Nucl. Phys. B. 1976. V. 111. P. 173; *M. J. Duff.* Nucl. Phys. B. 1977. V. 125. P. 334; *D. M. Capper, M. J. Duff.* Nuovo Cimento. 1974. V. 23. P. 173.
- [2] *S. Deser, A. Schwimer.* Phys. Lett. B. 1993. V. 309. P. 279.
- [3] *L. Bonora, P. Pasti, M. Tonin.* Phys. Lett. B. 1984. V. 149. P. 346; *L. Bonora, P. Cotta-Ramusino, C. Reina.* Phys. Lett. B. 1983. V. 126. P. 305.
- [4] *M. Bregola, P. Pasti, L. Bonora.* Class. Quantum. Gravit. 1986. V. 3. P. 635.
- [5] *L. D. Faddeev.* Phys. Lett. B. 1984. V. 145. P. 81; *Л. Д. Фаддеев, С. Л. Шаташвили.* ТМФ. 1984. Т. 60. № 2. С. 206.
- [6] *H. Cartan, S. Eilenberg.* Homological Algebra. Princeton: Princ. University Press, 1956; *Д. Б. Фукс.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.
- [7] *B. Zumino.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 253. P. 177; *W. Bardin, B. Zumino.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 244. P. 421; *J. Wess, B. Zumino.* Phys. Lett. B. 1971. V. 37. P. 95.
- [8] *R. J. Rigert.* Phys. Lett. B. 1984. V. 134. P. 56.

Поступила в редакцию 6.IV.1998 г.