Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Бенхассин, Гамильтоновы системы дробного порядка с локально заданными потенциалами, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 1, 81–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:25:44

© 2018 г.

А. Бенхассин*

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЛОКАЛЬНО ЗАДАНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Изучаются решения следующей неперiodической гамильтоновой системы дробного порядка $\alpha \in (1/2, 1]$:

$$-{}_tD_\infty^\alpha(-{}_tD_t^\alpha x(t)) - L(t)x(t) + \nabla W(t, x(t)) = 0, \quad x \in H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N),$$

где матрица $L(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N^2})$, $t \in \mathbb{R}$, а ${}_tD_\infty^\alpha$ и ${}_tD_t^\alpha$ – левая и правая дробные производные Лиувилля–Вейля порядка α на всей оси $\mathbb{R}$. С помощью симметричной теоремы о горном переходе доказано существование бесконечного числа решений системы в случае, когда матрица $L(t)$ не обязательно является коэрцитивной или равномерно положительно определенной, а потенциал $W(t, x)$ задан только локально в окрестности начала координат $x = 0$. Доказанные теоремы значительно обобщают и улучшают ранее полученные результаты. Также приведены некоторые иллюстративные примеры.

Ключевые слова: дробные гамильтоновы системы, теория критической точки, симметричная теорема о горном переходе.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9371>

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Гамильтоновы системы составляют важную часть нелинейного функционального анализа, поскольку они возникают при описании явлений в различных областях науки, таких как физика, астрономия, химия, биология, инженерные дисциплины и др. С тех пор как Ньютон записал уравнения, описывающие движение планет, и получил в качестве их решения эллиптические орбиты Кеплера, сложное динамическое поведение гамильтоновых систем стало привлекать внимание математиков и физиков. Вариационные методы исследования гамильтоновых систем впервые были использованы Пуанкаре, который применил принцип минимального действия в форме Якоби для изучения замкнутых орбит консервативной системы с двумя степенями свободы. В работе [1] Амброзетти и Рабинович доказали теорему о горном переходе, теорему о седловой точке, теорему о связанных множествах (linking theorem) и ряд

*Department of Mathematics, Higher Institute of Informatics and Mathematics, Monastir, Tunisia. E-mail: ab.hassine@yahoo.com

чрезвычайно важных минимаксных форм теоремы о критической точке. Применение теории критической точки позволило сделать значительный шаг вперед в изучении гамильтоновых систем. Рабиновичем в работе [2] теорема о критической точке была впервые использована для доказательства существования периодических решений гамильтоновой системы первого порядка, а первый результат о множественности орбит был получен Амброзетти и Зелати [3]. С тех пор появилось большое количество публикаций по использованию теории критической точки и вариационных методов для доказательства существования гомо- и гетероклинических орбит гамильтоновых систем (см., например, работы [4], [5] и ссылки в них).

С другой стороны, в последнее десятилетие все возрастающую популярность и значимость при описании процессов с длинной памятью приобретает дробное исчисление. За деталями мы отсылаем к монографиям [6], [7] и ссылкам в них. Теория критической точки стала эффективным инструментом изучения проблемы существования решений дифференциальных уравнений дробного порядка с помощью построения дробных вариационных структур.

Недавно в работе [8] было показано, что теория критической точки является действенным подходом к решению проблемы существования решения следующей краевой задачи дробного порядка:

$${}_t D_T^\alpha ({}_0 D_t^\alpha x(t)) = \nabla W(t, x(t)) \quad \text{для почти всех } t \in [0, T], \quad x(0) = x(T),$$

где $\alpha \in (1/2, 1)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $W \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Было доказано, что задача имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. В продолжение этой работы Торрес в работе [9] рассматривал следующую гамильтонову систему дробного порядка:

$$-{}_t D_\infty^\alpha (-_\infty D_t^\alpha x(t)) - L(t)x(t) + \nabla W(t, x(t)) = 0, \quad x \in H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N), \quad (1.1)$$

где $\alpha \in (1/2, 1)$, матрица $L(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N^2})$, функция W принадлежит пространству $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ и $\nabla W(t, x)$ – ее градиент по переменной x . С помощью теоремы о горном переходе в работе [9] было показано, что задача (1.1) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. При этом предполагалось, что L и W удовлетворяют следующим условиям¹⁾:

(L1) матрица $L(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N^2})$ симметрична и положительно определена при всех значениях $t \in \mathbb{R}$;

(L2) наименьшее собственное значение матрицы $L(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$;

(W1) равномерно по $t \in \mathbb{R}$ имеет место асимптотика $|\nabla W(t, x)| = o(|x|)$ при $|x| \rightarrow 0$;

(W2) существует функция $\bar{W} \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ такая, что для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

$$|W(t, x)| + |\nabla W(t, x)| \leq |\bar{W}(x)|;$$

(AR) найдется постоянная $\mu > 2$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$0 < \mu W(t, x) \leq \nabla W(t, x) \cdot x.$$

¹⁾Всюду ниже точка в выражениях типа $x \cdot y$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$ и $|x|$ – соответствующая норма элемента $x \in \mathbb{R}^N$.

Мотивированные упомянутыми выше работами, мы изучаем вопрос о существовании бесконечно большого количества решений задачи (1.1), полагая, что L не обязательно является коэрцитивной и равномерно положительно определенной матрицей, а потенциал W задан только локально в окрестности начала координат $x = 0$. Более точно, мы налагаем следующие условия:

(L3) существует постоянная $a_0 > 0$ такая, что для

$$l(t) := \min_{x \in \mathbb{R}^N, |x|=1} L(t)x \cdot x$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $l(t) + a_0 \geq 1$ и, кроме того, $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{l(t)+a_0} < \infty$;

(W3) функция $W \in C^1(\mathbb{R} \times B_\rho(0), \mathbb{R})$ четная, имеет место тождество $W(t, 0) \equiv 0$ и существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times B_\rho(0)$, где $B_\rho(0)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^N$ с центром в нуле и радиусом ρ , справедлива оценка

$$|\nabla W(t, x)| \leq c;$$

(W4) существует постоянная $\delta > 0$, замкнутый интервал $\Lambda \subset \mathbb{R}$ и две последовательности положительных чисел $\sigma_n \rightarrow 0$, $M_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ такие, что

$$\begin{aligned} W(t, x) &\geq -\delta|x|^2 \quad \text{для всех } (t, x) \in \Lambda \times B_\rho(0), \\ W(t, x) &\geq \sigma_n^2 M_n \quad \text{для всех } t \in \Lambda \text{ и } |x| = \sigma_n. \end{aligned}$$

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (L3), (W3), (W4). Тогда существует последовательность (x_k) решений системы (1.1) такая, что $\|x_k\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия (L3), (W3) и следующее условие:

(W'4) найдется число $r_0 \in \mathbb{R}$ и постоянная $\tau > 0$ такие, что

$$\liminf_{|x| \rightarrow 0} \inf_{t \in [r_0 - \tau, r_0 + \tau]} \frac{W(t, x)}{|x|^2} > -\infty, \quad \limsup_{|x| \rightarrow 0} \inf_{t \in [r_0 - \tau, r_0 + \tau]} \frac{W(t, x)}{|x|^2} = +\infty.$$

Тогда существует последовательность (x_k) решений системы (1.1) такая, что $\|x_k\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Для удобства читателя приведем пример, иллюстрирующий наши основные результаты.

ПРИМЕР 1. Найдутся функции L и W , которые удовлетворяют условиям теоремы 1, но не удовлетворяют соответствующим условиям из упомянутых выше статей. Например, пусть $L(t) = h(t)I_N$, где

$$h(t) = \begin{cases} (p^2 + 1)^2(t - p) + c_0, & p \leq t < p + \frac{1}{p^2 + 1}, \\ (p^2 + 1)^2 + c_0, & p + \frac{1}{p^2 + 1} \leq t < p + \frac{p^2}{p^2 + 1}, \\ (p^2 + 1)^2(p + 1 - t) + c_0, & p + \frac{p^2}{p^2 + 1} \leq t < p + 1, \end{cases}$$

$$W(t, x) = \begin{cases} |x|^s \sin \frac{1}{|x|^\varepsilon} \cos t, & 0 < |x| < 1, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

здесь I_N – единичная $(N \times N)$ -матрица, $p \in \mathbb{Z}$, $c_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и $s \in (1 + \varepsilon, 2)$.

Всюду далее в статье мы обозначаем через c , c_i различные положительные постоянные, которые могут варьироваться от формулы к формуле и не имеют существенного значения.

Статья организована следующим образом. Некоторые предварительные результаты представлены в разделе 2. Раздел 3 посвящен доказательству наших основных результатов.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Дробное исчисление Лиувилля–Вейля. Дадим два определения [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Левый и правый дробные интегралы Лиувилля–Вейля порядка $0 < \alpha < 1$ на всей оси $\mathbb{R}$ задаются как

$$-_{\infty}I_t^{\alpha}x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \xi)^{\alpha-1} x(\xi) d\xi, \quad {}_tI_{\infty}^{\alpha}(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} (\xi - t)^{\alpha-1} x(\xi) d\xi.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Левая и правая дробные производные Лиувилля–Вейля порядка $0 < \alpha < 1$ на всей оси $\mathbb{R}$ задаются как

$$-_{\infty}D_t^{\alpha}x(t) := \frac{d}{dt} -_{\infty}I_t^{1-\alpha}x(t), \quad {}_tD_{\infty}^{\alpha}x(t) := -\frac{d}{dt} {}_tI_{\infty}^{1-\alpha}x(t). \quad (2.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как отмечается в работе [9], определение (2.1) можно записать в альтернативном виде

$$\begin{aligned} -_{\infty}D_t^{\alpha}x(t) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x(t) - x(t-\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi, \\ {}_tD_{\infty}^{\alpha}x(t) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x(t) - x(t+\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Напомним, что фурье-преобразование $\hat{x}(z)$ функции $x(t)$ определяется как

$$\hat{x}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it \cdot z} x(t) dt.$$

Свойства фурье-преобразования дробных интегралов и дробных дифференциальных операторов были установлены в работе [9]:

$$\begin{aligned} \widehat{-_{\infty}I_t^{\alpha}x(t)}(z) &:= (iz)^{-\alpha} \hat{x}(z), & \widehat{{}_tI_{\infty}^{\alpha}(t)}(z) &:= (-iz)^{-\alpha} \hat{x}(z), \\ \widehat{-_{\infty}D_t^{\alpha}x(t)}(z) &:= (iz)^{\alpha} \hat{x}(z), & \widehat{{}_tD_{\infty}^{\alpha}(t)}(z) &:= (-iz)^{\alpha} \hat{x}(z). \end{aligned}$$

2.2. Пространства дробных производных. Для каждого $\alpha > 0$ полунорма и норма задаются как

$$|x|_{I_{-\infty}^{\alpha}} := \|-_{\infty}D_t^{\alpha}x\|_{L^2}, \quad \|x\|_{I_{\infty}^{\alpha}} := (\|x\|_{L^2}^2 + |x|_{I_{-\infty}^{\alpha}}^2)^{1/2}.$$

Пусть пространство $I_{-\infty}^{\alpha}(\mathbb{R})$ есть пополнение пространства $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ по норме $\|\cdot\|_{I_{\infty}^{\alpha}}$,

$$I_{-\infty}^{\alpha}(\mathbb{R}) = \overline{C_0^{\infty}(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{I_{\infty}^{\alpha}}}.$$

В работе [9] для $0 < \alpha < 1$ в терминах фурье-преобразования были заданы полунорма $|x|_\alpha = \||z|^\alpha \hat{x}\|_{L^2}$ и норма $\|x\|_\alpha = (\|x\|_{L^2}^2 + |x|_\alpha^2)^{1/2}$ и определено дробное пространство Соболева $H^\alpha(\mathbb{R})$,

$$H^\alpha(\mathbb{R}) := \overline{C_0^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\alpha}.$$

Заметим, что функция $x \in L^2(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $I_\infty^\alpha(\mathbb{R})$, если и только если $|z|^\alpha \hat{x} \in L^2(\mathbb{R})$. В частности, $|x|_{I_\infty^\alpha} = \||z|^\alpha \hat{x}\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Следовательно, $H^\alpha(\mathbb{R})$ и $I_\infty^\alpha(\mathbb{R})$ – эквивалентные пространства с эквивалентными полунормой и нормой (см. работу [9]). Аналогично пространству $I_\infty^\alpha(\mathbb{R})$ в работе [9] было введено пространство $I_\infty^\alpha(\mathbb{R})$. Пусть полунорма и норма заданы как

$$|x|_{I_\infty^\alpha} := \|_t D_\infty^\alpha\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \|x\|_{I_\infty^\alpha} := (\|x\|_{L^2}^2 + |x|_{I_\infty^\alpha}^2)^{1/2},$$

положим

$$I_\infty^\alpha(\mathbb{R}) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{I_\infty^\alpha}}.$$

При этом $I_\infty^\alpha(\mathbb{R})$ и $I_\infty^\alpha(\mathbb{R})$ являются эквивалентами пространствами с эквивалентными полунормой и нормой.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций.

ЛЕММА 1 [9]. Если $\alpha > 1/2$, то $H^\alpha(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ и существует постоянная $c = c_\alpha$ такая, что

$$\|x\|_{L^\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| \leq c \|x\|_{H^\alpha(\mathbb{R})}. \quad (2.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $x \in H^\alpha(\mathbb{R})$, то $x \in L^q(\mathbb{R})$ при любых $q \in [2, \infty]$, поскольку

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^q dt \leq \|x\|_{L^\infty}^{q-2} \|x\|_{L^2}^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим следующую гамильтонову систему:

$$-{}_t D_\infty^\alpha(-{}_t D_t^\alpha x(t)) - \widehat{L}(t)x + \nabla \widehat{W}(t, x) = 0, \quad x \in H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N), \quad (2.4)$$

где $\widehat{L}(t) = L(t) + a_0 I_N$ и $\widehat{W}(t, x) = W(t, x) + \frac{a_0}{2} |x|^2$. Тогда система (2.4) эквивалентна (1.1) и легко проверить, что предположения (L3) и (W3), (W4) остаются выполненными для $\widehat{L}$ и $\widehat{W}$, если они выполнены для L и W . На основании этого всюду далее мы полагаем без потери общности, что $l(t) \geq 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{l(t)} < \infty$.

Учитывая замечание 3, рассмотрим пространство

$$X^\alpha = \left\{ x \in H^\alpha(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} (|{}_t D_t^\alpha x(t)|^2 + L(t)x(t) \cdot x(t)) dt < \infty \right\}.$$

Оно является рефлексивным и сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x, y)_{X^\alpha} = \int_{\mathbb{R}} ({}_t D_t^\alpha x(t) \cdot {}_t D_t^\alpha y(t) + L(t)x(t) \cdot y(t)) dt,$$

и соответствующей нормой $\|x\|_{X^\alpha} = \sqrt{(x, x)_{X^\alpha}}$.

ЛЕММА 2 [9]. Если функция L удовлетворяет условию (L3), то пространство X^α есть непрерывное вложение в $H^\alpha(\mathbb{R})$.

Мы докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Если функция L удовлетворяет условию (L3), то пространство X^α есть непрерывное вложение в L^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (L3) и неравенства Гёльдера для всех $x \in X^\alpha$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |x| dt &= \int_{\mathbb{R}} |L^{-1/2}(t) L^{1/2}(t) x| dt \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{l(t)}} |L^{1/2}(t) x| dt \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{l(t)} dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} L(t) x \cdot x dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{l(t)} dt \right)^{1/2} \|x\|_{X^\alpha}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ЛЕММА 4. Если функция L удовлетворяет условию (L3), то пространство X^α есть компактное вложение в L^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_n) \subset X^\alpha$ – ограниченная последовательность такая, что $x_n \rightharpoonup x$ в X^α (стрелкой $\rightharpoonup$ обозначена слабая сходимость). Покажем, что $x_n \rightarrow x$ по норме L^1 . В силу неравенства Гёльдера мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |x_n - x| dt &= \int_{|t| \leq R} |x_n - x| dt + \int_{|t| > R} |x_n - x| dt \leq \\ &\leq 2R \left(\int_{|t| \leq R} |x_n - x|^2 dt \right)^{1/2} + \int_{|t| > R} |L^{-1/2}(t) L^{1/2}(t) (x_n - x)| dt \leq \\ &\leq 2R \left(\int_{|t| \leq R} |x_n - x|^2 dt \right)^{1/2} + \int_{|t| > R} \frac{1}{\sqrt{l(t)}} |L^{1/2}(t) (x_n - x)| dt \leq \\ &\leq 2R \left(\int_{|t| \leq R} |x_n - x|^2 dt \right)^{1/2} + \\ &\quad + \left(\int_{|t| > R} \frac{1}{l(t)} dt \right)^{1/2} \left(\int_{|t| > R} L(t) (x_n - x) \cdot (x_n - x) dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2R \left(\int_{|t| \leq R} |x_n - x|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{|t| > R} \frac{1}{l(t)} dt \right)^{1/2} \|x_n - x\|_{X^\alpha}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $R > 0$. В силу условия (L3) и теоремы Соболева о вложении для любого $\varepsilon > 0$ существует $R_0 > 0$ такое, что при $R > R_0$ мы имеем

$$\int_{\mathbb{R}} |x_n - x| dt \leq \varepsilon.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 И СЛЕДСТВИЯ 1

Для доказательства теоремы 1 и следствия 1 нам потребуется модифицировать функцию $W(t, x)$ при x , лежащих вне окрестности начала координат, чтобы получить всюду определенную функцию. Выберем постоянную $t_0 \in (0, \rho/2)$ и зададим обрезавшую функцию $\chi \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ формулами

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t \geq 2t_0, \end{cases} \quad -\frac{2}{t_0} \leq \chi'(t) < 0 \text{ при } t_0 < t < 2t_0. \quad (3.1)$$

Пусть $\widetilde{W}(t, x) = \chi(|x|)W(t, x)$ для $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Из определения (3.1) и условия (W3) для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ мы имеем

$$|\widetilde{W}(t, x)| \leq c_1|x|, \quad |\nabla \widetilde{W}(t, x)| \leq c_2. \quad (3.2)$$

Теперь рассмотрим следующую модифицированную гамильтонову систему дробного порядка:

$$-{}_t D_\infty^\alpha (-_\infty D_t^\alpha x(t)) - L(t)x(t) + \nabla \widetilde{W}(t, x(t)) = 0, \quad x \in H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N). \quad (3.3)$$

Зададим функционал $I: X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, ассоциированный с системой (3.3), как

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} |_{-\infty} D_t^\alpha x(t)|^2 + \frac{1}{2} L(t)x(t) \cdot x(t) - \widetilde{W}(t, x(t)) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \|x\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{W}(t, x(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тогда, учитывая условия (L3), (W3) и неравенства (3.2), заключаем, что I есть непрерывный, дифференцируемый по Фреше функционал на X^α , т. е. $I \in C^1(X^\alpha, \mathbb{R})$. Кроме того, мы имеем для всех $x, y \in X^\alpha$

$$I'(x)(y) = \int_{\mathbb{R}} ({}_{-\infty} D_t^\alpha x(t) \cdot {}_{-\infty} D_t^\alpha y(t) + L(t)x(t) \cdot y(t) - \nabla \widetilde{W}(t, x(t)) \cdot y(t)) dt. \quad (3.5)$$

Согласно работе [9], чтобы найти решения задачи (3.3), достаточно найти критические точки функционала I . С этой целью напомним некоторые определения и результаты [10], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть E – действительное банахово пространство и функционал $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$.

- Говорят, что ϕ удовлетворяет условию (PS), если любая последовательность $(x_k) \subset E$, для которой последовательность $(\phi(x_k))$ ограничена и $\phi'(x_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, содержит подпоследовательность, сходящуюся по норме E .
- Зададим множество

$$\Sigma = \{A \subset E \setminus \{0\} : A \text{ замкнуто и симметрично относительно начала координат}\}.$$

Для $A \in \Sigma$ будем говорить, что род множества A есть n (и писать $\kappa(A) = n$), если существует нечетное отображение $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и n есть минимальное целое число с этим свойством.

$$\text{Положим } \Sigma_k = \{A \in \Sigma : \kappa(A) \geq k\}.$$

ЛЕММА 5 [10]. Пусть ϕ – четный дифференцируемый функционал на E и $\phi(0) = 0$. Предположим, что ϕ удовлетворяет условию (PS), ограничен снизу и для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется множество $A_k \in \Sigma_k$ такое, что $\sup_{x \in A_k} \phi(x) < 0$. Тогда выполнено одно из следующих двух условий: либо существует последовательность критических точек (x_k) такая, что $\phi(x_k) < 0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$; либо существуют две последовательности критических точек (x_k) и (y_k) такие, что $\phi(x_k) = 0$, $x_k \neq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ и $\phi(y_k) < 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(y_k) = 0$, (y_k) сходится к ненулевому пределу.

ЛЕММА 6. Если выполнены условия (L3), (W3), то функционал I ограничен снизу и удовлетворяет условию (PS).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (W3), соотношений (2.5), (3.2) и неравенства Гёльдера мы имеем для всех $x \in X^\alpha$

$$I(x) \geq \frac{1}{2} \|x\|_{X^\alpha}^2 - c_3 \int_{\mathbb{R}} |x| dt \geq \frac{1}{2} \|x\|_{X^\alpha}^2 - c_3 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{l(t)} dt \right)^{1/2} \|x\|_{X^\alpha}. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что I ограничен снизу. Далее, если последовательность $(x_n) \subset X^\alpha$ взята из условия (PS), то в силу (3.6) мы имеем

$$c_4 \geq \frac{1}{2} \|x_n\|_{X^\alpha}^2 - c_5 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{l(t)} dt \right)^{1/2} \|x\|_{X^\alpha}.$$

Это влечет, что (x_n) ограничена по норме X^α . Следовательно, существует подпоследовательность (x_{n_k}) такая, что $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ при $k \rightarrow \infty$ для некоторого $x_0 \in X^\alpha$. По лемме 4 мы имеем, что $x_{n_k} \rightarrow x_0$ в L^1 при $k \rightarrow \infty$. Вместе с неравенствами (3.2) это дает

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (\nabla \widetilde{W}(t, x_{n_k}) - \nabla \widetilde{W}(t, x_0)) \cdot (x_{n_k} - x_0) dt \right| \leq c_6 \int_{\mathbb{R}} |x_{n_k} - x_0| dt \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Поскольку последовательность $(x_n) \subset X^\alpha$ взята из условия (PS) и ограничена,

$$(I'(x_{n_k}) - I'(x_0))(x_{n_k} - x_0) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Комбинируя соотношения (3.5), (3.7) и (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \|x_{n_k} - x_0\|_{X^\alpha}^2 &= \\ &= (I'(x_{n_k}) - I'(x_0))(x_{n_k} - x_0) + \int_{\mathbb{R}} (\nabla \widetilde{W}(t, x_{n_k}) - \nabla \widetilde{W}(t, x_0)) \cdot (x_{n_k} - x_0) dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть выполнены условия (L3) и (W4), тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется множество $A_k \in \Sigma_k$ с $\kappa(A_k) = k$ такое, что $\sup_{x \in A_k} I(x) < 0$. В самом деле, следуя идеям решения эллиптических задач из работы [10], мы имеем следующее.

Пусть η – длина замкнутого интервала Λ из условия (W4). Для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ разобьем Λ на k одинаковых замкнутых интервалов Λ_i , $1 \leq i \leq k$, длины η/k . Пусть s_i – центр интервала Λ_i и Ω_i – замкнутый интервал с центром в s_i длины $\eta/2k$, $1 \leq i \leq k$. Выберем функцию $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ такую, что

$$|\xi(t)| \equiv \begin{cases} 1, & t \in [-\frac{\eta}{4k}, \frac{\eta}{4k}], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [\frac{\eta}{2k}, \frac{\eta}{2k}], \end{cases}$$

и $|\xi(t)| \leq 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Зададим функции $\xi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ как $\xi_i(t) = \xi(t - t_i)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \text{supp } \xi_i &\subset \Lambda_i, & |\xi_i(t)| &= 1 \text{ при всех } t \in \Omega_i, \\ & & |\xi_i(t)| &\leq 1 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пусть

$$\Theta_k \equiv \{(l_1, l_2, \dots, l_k) \in \mathbb{R}^k : \max_{1 \leq i \leq k} |l_i| = 1\}, \quad S_k \equiv \left\{ \sum_{i=1}^k l_i \xi_i : (l_1, l_2, \dots, l_k) \in \Theta_k \right\}.$$

Тогда множество Θ_k с помощью нечетного отображения можно гомеоморфно перевести в единичную сферу в $\mathbb{R}^k$. Следовательно, $\kappa(\Theta_k) = k$. Теперь зададим нечетное гомеоморфное отображение $\psi: \Theta_k \rightarrow S_k$ как

$$\psi(l_1, l_2, \dots, l_k) = \sum_i^k l_i \xi_i, \quad (l_1, l_2, \dots, l_k) \in \Theta_k.$$

Тогда $\kappa(S_k) = \kappa(\Theta_k) = k$. Очевидно, что множество S_k компактно, следовательно, существует постоянная $\lambda_k > 0$ такая, что $\|x\|_{X^\alpha} \leq \lambda_k$ для всех $x \in S_k$.

Далее, для любого $s \in (0, t_0)$ и для любого $x = \sum_{i=1}^k l_i \xi_i \in S_k$ в силу соотношений (3.1), (3.4) и (3.9) мы имеем

$$\begin{aligned} I(sx) &= \frac{1}{2} \|sx\|_{X^\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{W}\left(t, s \sum_{i=1}^k l_i \xi_i\right) dt = \\ &= \frac{s^2}{2} \|x\|_{X^\alpha}^2 - \sum_{i=1}^k \int_{\Lambda_i} \widetilde{W}(t, sl_i \xi_i) dt = \frac{s^2}{2} \|x\|_{X^\alpha}^2 - \sum_{i=1}^k \int_{\Lambda_i} W(t, sl_i \xi_i) dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

По определению множества Θ_k для любого $x = \sum_i^k l_i \xi_i \in S_k$ существует некоторое целое число i_x , $1 \leq i_x \leq k$, такое, что $|l_{i_x}| = 1$. Тогда по условию (W4) с учетом соотношения (3.9) и определения Θ_k получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\Lambda_i} W(t, sl_i \xi_i) dt &= \\ &= \int_{\Omega_{i_x}} W(t, sl_{i_x} \xi_{i_x}) dt + \int_{\Theta_{i_x} \setminus \Omega_{i_x}} W(t, sl_{i_x} \xi_{i_x}) dt + \sum_{i \neq i_x} \int_{\Lambda_i} W(t, sl_i \xi_i) dt \geq \\ &\geq \int_{\Omega_{i_x}} W(t, sl_{i_x} \xi_{i_x}) dt - \delta \eta s^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для $\sigma_n \in (0, t_0)$, комбинируя условие (W4) и формулы (3.1), (3.9)–(3.11), мы имеем

$$I(\sigma_n x) = \frac{\lambda_k \sigma_n^2}{2} + \delta \eta \sigma_n^2 - \int_{\Omega_{i_x}} \widetilde{W}(t, \sigma_n l_{i_x} \xi_{i_x}) dt = \sigma_n^2 \left(\frac{\lambda_k}{2} + \delta \eta - \frac{M_n \eta}{2k} \right). \quad (3.12)$$

Здесь мы использовали тот факт, что $|\sigma_n l_{i_x} \xi_{i_x}(t)| \equiv \sigma_n$ при $t \in \Omega_{i_x}$. Поскольку $M_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, можно выбрать $n_k \in \mathbb{N}$ так, что $M_{n_k} \geq 2k\lambda_k/\eta + 2k\delta$. Из (3.12) получаем оценку

$$I(\sigma_{n_k} x) \leq -\frac{\lambda_k \sigma_{n_k}^2}{2}.$$

Положим $A_k = \{\sigma_{n_k} x : x \in S_k\}$. Тогда $\kappa(A_k) = \kappa(S_k) = k$ и $\sup_{x \in A_k} I(x) < 0$. Следовательно, по лемме 4 найдется последовательность (x_k) нетривиальных критических

точек функционала I такая, что $I(x_k) \leq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $x_k \rightarrow 0$ в X^α при $k \rightarrow \infty$. С учетом (2.3) отсюда следует, что $\|x_k\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку (x_k) – это последовательность решений задачи (3.3), для достаточно больших k функции x_k являются решениями задачи (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. По условию (W'4) найдется постоянная $\delta > 0$ и две последовательности положительных чисел $\sigma_n \rightarrow 0$, $M_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ такие, что

$$\begin{aligned} W(t, x) &\geq -\delta|x|^2 && \text{при всех } (t, x) \in [r_0 - \tau, r_0 + \tau] \times B_\rho(0), \\ W(t, x) &\geq \sigma_n^2 M_n && \text{при всех } t \in [r_0 - \tau, r_0 + \tau] \text{ и } |x| = \sigma_n, \end{aligned}$$

откуда следует, что выполнено условие (W4). Простое применение теоремы 1 доказывает следствие 1.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за внимательное чтение статьи, критические замечания и полезные предложения, которые помогли улучшить качество изложения.

Список литературы

- [1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, “Dual variational methods in critical point theory and applications”, *J. Funct. Anal.*, **14**:4 (1973), 349–381.
- [2] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **65**, AMS, Providence, RI, 1986.
- [3] A. Ambrosetti, V. C. Zelati, “Multiple homoclinic orbits for a class of conservative systems”, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **89** (1993), 177–194.
- [4] Y. H. Ding, “Existence and multiplicity results for homoclinic solutions to a class of Hamiltonian systems”, *Nonlinear Anal.: Theor. Methods Appl.*, **25**:11 (1995), 1095–1113.
- [5] W. Omana, M. Willem, “Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems”, *Differ. Integral Equ.*, **5**:5 (1992), 1115–1120.
- [6] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [7] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus And Fractional Differential Equations*, Wiley and Sons, New York, 1993.
- [8] F. Jiao, Y. Zhou, “Existence results for fractional boundary value problem via critical point theory”, *Internat. J. Bifurcation Chaos*, **22**:4 (2012), 1250086, 17 pp.
- [9] C. Torres, “Existence of solution for fractional Hamiltonian systems”, *Electron. J. Differ. Equ.*, **2013**:259 (2013), 1–12.
- [10] R. Kajikiya, “A critical point theorem related to the symmetric mountain pass lemma and its applications to elliptic equations”, *J. Funct. Anal.*, **225**:2 (2005), 352–370.

Поступила в редакцию 22.03.2017,
после доработки 25.08.2017