Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Резонансный захват в системе двух осцилляторов вблизи равновесия, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 3, 385–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:00:21

© 2018 г.

Л. А. Калякин*

РЕЗОНАНСНЫЙ ЗАХВАТ В СИСТЕМЕ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВБЛИЗИ РАВНОВЕСИЯ

Рассматривается система дифференциальных уравнений, которая описывает взаимодействие двух слабо связанных нелинейных осцилляторов. Предполагается, что в начальный момент один из осцилляторов находится вдали от равновесия, а другой – вблизи равновесия, и их частоты близки. Исследуется эффект захвата в резонанс, когда частоты связанных осцилляторов остаются близкими, а энергии колебаний значительно меняются со временем, в частности второй осциллятор уходит далеко от равновесия. Выяснено, что начальный этап захвата в резонанс описывается вторым уравнением Пенлеве. Такое описание получено в асимптотическом приближении по малому параметру, который соответствует коэффициенту связи.

Ключевые слова: нелинейные колебания, малый параметр, асимптотика, захват в резонанс.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9375>

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование математических моделей резонансного взаимодействия привлекает внимание как в связи с приложениями, так и из-за постановок новых задач. Наиболее продвинутые результаты получены для конечномерных систем с двумя быстрыми фазами [1]; одномерные системы с быстро осциллирующей внешней накачкой [2] по существу также являются двухфазными. Для исследования подобных задач используется метод усреднения [3], который дает эффективный способ приближенного анализа решений. В таком подходе основные достижения связываются с асимптотическим переходом к сравнительно простому модельному уравнению, анализ которого выявляет существенные свойства исходной системы. Например, задачи о захвате в резонанс и об авторезонансе приводят к уравнению смещенного маятника [1] либо к системе уравнений главного резонанса [2]. В настоящей работе выделяется класс

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01004).

*Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: klenru@mail.ru

задач, которые редуцируются ко второму уравнению Пенлеве (П2). Под редукцией понимается переход, основанный на построении асимптотики по малому параметру. Известные свойства трансцендентов Пенлеве [4] позволяют на этом пути получить новые довольно неожиданные результаты о резонансах в системе слабо связанных осцилляторов.

1.1. Постановка задачи. Для системы четырех дифференциальных уравнений с малым параметром $0 < \varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \varepsilon F(E, \mathcal{E}, \phi, \psi), & \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \varepsilon G(E, \mathcal{E}, \phi, \psi), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega(E) + \varepsilon \Phi(E, \mathcal{E}, \phi, \psi), & \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\mathcal{E}) + \varepsilon \Psi(E, \mathcal{E}, \phi, \psi) \end{aligned} \quad (1)$$

рассмотрим задачу об асимптотике решений при $\varepsilon \rightarrow 0$. Правые части в выражениях (1) считаются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями по всем переменным $E \in (0, E_s)$, $\mathcal{E} \in (0, \mathcal{E}_s)$, $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$, 2π -периодическими по ϕ, ψ .

Свойство периодичности позволяет интерпретировать уравнения как модель для системы слабо связанных осцилляторов. При отсутствии связи (когда $\varepsilon = 0$) уравнения тривиально интегрируются: величины $E, \mathcal{E} = \text{const}$ являются постоянными, их принято называть энергией или действием; переменные ϕ, ψ линейны по t и интерпретируются как фазы или угол; Ω, ω – частоты колебаний невозмущенных осцилляторов. Модель осцилляторов в форме ньютоновских уравнений обсуждается в следующем разделе.

Для корректности постановки задачи дифференциальные уравнения следует дополнить начальными условиями. Известно, что возмущенное решение сильно зависит от начальных значений энергий $(E_0, \mathcal{E}_0)$. Для систем с гамильтоновыми возмущениями это демонстрируется, например, в теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) [5]. Для приближенного анализа обычно используется метод усреднения, который позволяет выделить главные члены асимптотики по малому параметру при любых гладких возмущениях. На этом пути можно обнаружить эффект неоднородности: происходит резкое изменение структуры асимптотики при приближении начальной точки $(E_0, \mathcal{E}_0)$ к резонансной линии $k_1\Omega(E) = k_2\omega(\mathcal{E})$, где k_1, k_2 – целые взаимно простые числа. При их анализе выясняется, что иногда (но не всегда) резонансное соотношение может сохраняться со временем (вдоль решения); такую ситуацию характеризуют термином “захват в резонанс”. В приложениях главным достоинством захваченного в резонанс решения считается значительное изменение энергии $E(t), \mathcal{E}(t)$. Это свойство, являющееся тривиальным в линейных системах, оказывается далеко не тривиальным в нелинейном случае (даже в одномерной системе с внешней накачкой [2]).

Явление захвата в резонанс многократно исследовалось в разных моделях. Для систем типа (1) наиболее полные результаты получены в статьях [1], [6] и относятся к случаю, когда решение находится вдали от положений равновесия. В настоящей работе исследуется ситуация, когда в начальный момент один из невозмущенных осцилляторов находится вблизи устойчивого равновесия. Проблемы, которые здесь возникают, обсуждались, например, в работах [7], [8]. Задача состоит в нахождении возмущений, при которых этот осциллятор уходит далеко от равновесия. Для простоты изложения рассматриваются начальные данные на главном резонансе $\Omega(E_0) = \omega(\mathcal{E}_0)$.

1.2. Исходные ограничения. Специфика рассматриваемой здесь задачи складывается в структуре уравнений и начальных данных. Ввиду возможности сдвига энергии на константу можно считать, что равновесию второго осциллятора соответствует граничное значение $\mathcal{E} = 0$. Для уравнений в форме (1) равновесие проявляется в наличии слабых особенностей в правых частях (см. пример в следующем разделе)

$$G(E, \mathcal{E}, \phi, \psi) = \mathcal{O}(\sqrt{\mathcal{E}}), \quad \Psi(E, \mathcal{E}, \phi) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right), \quad \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

Особенности препятствуют реализации подходов, описанных в статьях [1], [6]. Они отражают известный факт: вблизи равновесия для исследования динамической системы более удобны полярные и соответствующие декартовы координаты, нежели переменные типа действие–угол (см. работу [7]).

Условие резонанса имеет вид $\Omega(E_0) = \omega(0)$. Учитывая возможность перенормировки времени, можно считать $\omega(0) = 1$, так что вблизи равновесия частота второго осциллятора имеет асимптотику

$$\omega(\mathcal{E}) = 1 + \lambda\mathcal{E} + \mathcal{O}(\mathcal{E}^2), \quad \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

В итоге условие резонанса с требованием невырожденности приобретает форму соотношений

$$\Omega(E_0) = 1, \quad \Omega'(E_0) = \Lambda \neq 0, \quad \omega'(0) = \lambda \neq 0. \quad (2)$$

Случай линейных осцилляторов, когда $\Omega'(E) \equiv \omega'(\mathcal{E}) \equiv 0$, считается тривиальным и здесь не обсуждается. Гладкость правых частей по E связывается с отсутствием равновесия для первого осциллятора в окрестности начального значения. Это значение удобно считать положительным, $E_0 > 0$. При возмущении компонента $E(t)$ может меняться в любом направлении, в отличие от компоненты $\mathcal{E}(t)$, которая обязана быть неотрицательной.

Начальные данные для возмущенной задачи возьмем в форме

$$E|_{t=0} = E_0 + \varepsilon^{2/3} E_p, \quad \mathcal{E}|_{t=0} = \varepsilon^{2/3} \mathcal{E}_p, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0. \quad (3)$$

Их определение включает в себя задание четырех констант $E_p, \mathcal{E}_p, \phi_0, \psi_0$ ($\mathcal{E}_p \geq 0$) из произвольного фиксированного компакта, не зависящего от ε . Можно считать, что эти константы представляют собой четыре параметра рассматриваемого семейства решений. Малый множитель $\varepsilon^{2/3}$ определяет порядок (по малому параметру ε) допустимого возмущения начальных данных. Иногда эта величина интерпретируется как порядок ширины резонансной области или области захвата в резонанс. Начальное возмущение фаз не проявляется на эффекте захвата в резонанс и здесь не учитывается. Появление масштабов с множителями, кратными $\varepsilon^{1/3}$, является спецификой резонансных задач вблизи равновесия [2]. Отметим, что в резонансных задачах вдали от равновесия обнаруживаются совсем другие масштабы, кратные $\varepsilon^{1/2}$ [1].

При построении асимптотики мы ограничиваемся главными членами, для которых получаются нелинейные уравнения. Структура их решений определяет наличие или отсутствие захвата в резонанс. Для старших поправок асимптотики получают линейаризованные уравнения; их анализ не содержит принципиальных трудностей

и здесь не обсуждается. Имея это в виду, уточним структуру возмущений, выделив главные члены асимптотики при $\mathcal{E} \rightarrow 0$ (вблизи равновесия) в следующей форме:

$$\begin{aligned} F(E, \mathcal{E}, \phi, \psi) &= \sqrt{2\mathcal{E}}[F_c(E, \phi) \cos \psi + F_s(E, \phi) \sin \psi] + \tilde{F}(E, \mathcal{E}, \phi, \psi), \\ G(E, \mathcal{E}, \phi, \psi) &= \sqrt{2\mathcal{E}}G_0(E, \phi) \sin \psi + \tilde{G}(E, \mathcal{E}, \phi, \psi), \\ \Psi(E, \mathcal{E}, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}}}G_0(E, \phi) \cos \psi + \tilde{\Psi}(E, \mathcal{E}, \phi, \psi), \end{aligned} \quad (4)$$

с остатками $\tilde{F}, \tilde{G}(E, \mathcal{E}, \phi, \psi) = \mathcal{O}(\mathcal{E}), \tilde{\Psi}, \tilde{\Phi} = \mathcal{O}(1), \mathcal{E} \rightarrow 0, E \in (0, E_s)$.

Принципиальную роль в описании резонансного захвата играют средние значения главных членов асимптотики. Они представляют собой коэффициенты Фурье на первой гармонике. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} f_c &= \langle F_c(E_0, \phi) \cos \phi + F_s(E_0, \phi) \sin \phi \rangle, & f_s &= \langle F_s(E_0, \phi) \cos \phi - F_c(E_0, \phi) \sin \phi \rangle, \\ g_c &= \langle G_0(E_0, \phi) \cos \phi \rangle, & g_s &= \langle G_0(E_0, \phi) \sin \phi \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Угловыми скобками обозначаются интегралы по периоду вида

$$\langle f(\phi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi.$$

2. НЬЮТОНОВСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Исходную задачу можно поставить в другой форме, в виде уравнений Ньютона

$$\ddot{x} + U'(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}), \quad \ddot{\xi} + V'(\xi) = \varepsilon g(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}). \quad (6)$$

Заданные потенциалы $U(x)$, $V(\xi)$ и функции возмущений f, g предполагаются гладкими по всем переменным, а $V'(\xi)$ имеет асимптотику вблизи нуля вида

$$V'(\xi) = \xi + w(\xi), \quad w(\xi) = w_3 \xi^3 + \mathcal{O}(\xi^5), \quad \xi \rightarrow 0.$$

Рассмотрим решения с начальными данными, которые в невозмущенной задаче (при $\varepsilon = 0$) приводят к колебаниям с частотой Ω_0 вдали от равновесия для одной компоненты и к равновесию $\xi(t) \equiv 0$ для другой компоненты. Условие резонанса записывается как $\Omega_0 = 1$.

Переход от уравнений (6) к системе (1) можно выполнить разными способами. Выгодно использовать точные решения невозмущенных уравнений $x_0(t, E)$, $\xi_0(t, \mathcal{E})$, параметризованные значениями соответствующих первых интегралов (энергией)

$$\frac{1}{2} \dot{x}_0^2 + U(x_0) = E, \quad \frac{1}{2} \dot{\xi}_0^2 + V(\xi_0) = \mathcal{E}.$$

Рассмотрим область в фазовом пространстве (или что то же – на промежутках для значений энергий $0 < E < E_s$, $0 < \mathcal{E} < \mathcal{E}_s$), где фазовые траектории замкнуты. Соответствующие невозмущенные решения являются периодическими. Периоды зависят от энергии и определяются через интегралы по траектории. Например,

$$T(E) = 2 \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

где $x_{\pm}(E)$ – простые нули подкоренного выражения, координаты точек поворота траектории. Соответственно определяется частота $\Omega(E) = 2\pi/T(E)$. Аналогично определяются период $T(\mathcal{E})$ и частота $\omega(\mathcal{E}) = 2\pi/T(\mathcal{E})$ для второго осциллятора.

Введенные таким образом решения определены с точностью до сдвига (фаз) по переменной t . Эти функции можно привести к периоду 2π по угловым переменным ϕ, ψ :

$$X(\phi, E) \stackrel{\text{def}}{=} x_0\left(\frac{\phi}{\Omega(E)}, E\right), \quad \mathcal{X}(\psi, \mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_0\left(\frac{\psi}{\omega(\mathcal{E})}, \mathcal{E}\right).$$

Они используются для замены переменных в исходных возмущенных уравнениях (6) по формулам

$$x(t) = X(\phi(t), E(t)), \quad \xi(t) = \mathcal{X}(\psi(t), \mathcal{E}(t)).$$

Фактически такая операция представляет собой применение метода вариации произвольных постоянных. Структура получаемых уравнений (1) зависит от выбора формул для замены производных. Удобно положить

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Y(\phi, E) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_t \hat{x}(t, E)|_{t=\phi/\Omega} \equiv \Omega(E) \partial_{\phi} X(\phi, E), \\ \dot{\xi}(t) &= \mathcal{Y}(\psi, \mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_t \hat{\xi}(t, \mathcal{E})|_{t=\psi/\omega} \equiv \omega(\mathcal{E}) \partial_{\psi} \mathcal{X}(\psi, \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Введенные функции в силу исходных уравнений удовлетворяют тождествам

$$\Omega \partial_{\phi} X \equiv Y, \quad \Omega \partial_{\phi} Y \equiv -U'(X), \quad \omega \partial_{\psi} \mathcal{X} \equiv \mathcal{Y}, \quad \omega \partial_{\psi} \mathcal{Y} \equiv -V'(\mathcal{X}).$$

Дифференцирование по энергии первых интегралов с учетом этих равенств дает еще пару тождеств

$$\partial_{\phi} X \partial_E Y - \partial_{\phi} Y \partial_E X \equiv \frac{1}{\Omega}, \quad \partial_{\psi} \mathcal{X} \partial_E \mathcal{Y} - \partial_{\psi} \mathcal{Y} \partial_E \mathcal{X} \equiv \frac{1}{\omega}.$$

С учетом этих тождеств возмущенные уравнения (6) переходят в систему (1) с функциями

$$\begin{aligned} F &= Y(\phi, E) f(X(\phi, E), Y(\phi, E), \mathcal{X}(\psi, \mathcal{E}), \mathcal{Y}(\psi, \mathcal{E})), \\ \Phi &= -\partial_E X(\phi, E) \Omega(E) f(X(\phi, E), Y(\phi, E), \mathcal{X}(\psi, \mathcal{E}), \mathcal{Y}(\psi, \mathcal{E})), \\ G &= \mathcal{Y}(\psi, \mathcal{E}) g(X(\phi, E), Y(\phi, E), \mathcal{X}(\psi, \mathcal{E}), \mathcal{Y}(\psi, \mathcal{E})), \\ \Psi &= -\partial_E \mathcal{X}(\psi, \mathcal{E}) \omega(\mathcal{E}) g(X(\phi, E), Y(\phi, E), \mathcal{X}(\psi, \mathcal{E}), \mathcal{Y}(\psi, \mathcal{E})). \end{aligned}$$

Невозмущенное решение имеет специфическую асимптотику по энергии вблизи равновесия [9]

$$\mathcal{X}(\psi, \mathcal{E}) = \sqrt{2\mathcal{E}}[\cos \psi + \mathcal{O}(\mathcal{E})], \quad \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

Это свойство влечет слабые особенности в правых частях уравнений (1). Указанная в (4) структура возмущений получается при условии

$$f(x, y, \xi, \eta) = \xi f_0(x, y) + \eta f_1(x, y) + \mathcal{O}((\xi^2 + \eta^2)), \quad \xi^2 + \eta^2 \rightarrow 0.$$

При этом в асимптотических формулах следует положить

$$\begin{aligned} F_c(\phi, E) &= f_0(X(\phi, E), Y(\phi, E)), & F_s(\phi, E) &= -f_1(X(\phi, E), Y(\phi, E)), \\ G_0(\phi, E) &= -g(X(\phi, E), Y(\phi, E), 0, 0). \end{aligned}$$

3. ЗАХВАТ В РЕЗОНАНС (НАЧАЛЬНЫЙ ПОГРАНСЛОЙ)

При построении асимптотики решения по малому параметру можно выявить два медленных масштаба. Один из них характеризуется медленным временем $\theta = \varepsilon t$ и выглядит естественным по аналогии с другими задачами, где используется метод усреднения [1], [3]. Однако для описания начального этапа захвата в резонанс используется масштаб более быстрого времени $\tau = \varepsilon^{2/3}t$. Этот этап можно рассматривать как начальный погранслои [2].

Введем переменную для разности фаз $S = \psi - \phi$. Исходные уравнения (1) переписываются для четверки функций $E, \mathcal{E}, S, \phi$ с учетом указанной в (4) структуры возмущений следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \varepsilon\sqrt{2\mathcal{E}}[F_c(E, \phi)\cos(\phi + S) + F_s(E, \phi)\sin(\phi + S)] + \\ &\quad + \varepsilon\tilde{F}(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + S), \\ \frac{d\sqrt{2\mathcal{E}}}{dt} &= \varepsilon\left[G_0(E, \phi)\sin(\phi + S) + \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}}}\tilde{G}(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + S)\right], \\ \sqrt{2\mathcal{E}}\left[\frac{dS}{dt} + \Omega(E) - \omega(\mathcal{E})\right] &= \varepsilon G_0(E, \phi)\cos(\phi + S) + \\ &\quad + \varepsilon\sqrt{2\mathcal{E}}[\tilde{\Psi}(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + S) - \Phi(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + S)], \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega(E) + \varepsilon\Phi(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + S). \end{aligned} \quad (7)$$

3.1. Асимптотические конструкции. В условиях резонанса $\Omega(E) \approx \omega(\mathcal{E})$ уравнения в форме (7) содержат одну быструю фазу ϕ . Это обеспечивает успех метода усреднения. Анзац для асимптотического решения возьмем в виде рядов

$$\begin{aligned} E &= E_0 + \varepsilon^{2/3}R(\tau) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^{k/3}R_k(\tau, \phi), \\ \sqrt{2\mathcal{E}} &= \varepsilon^{1/3}\rho(\tau) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^{k/3}\rho_k(\tau, \phi), \quad S = \sigma(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/3}\sigma_k(\tau, \phi), \\ \phi &= t + \varphi(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/3}\varphi_k(\tau, \phi), \quad \tau = \varepsilon^{2/3}t, \end{aligned} \quad (8)$$

с коэффициентами, периодическими по быстрой переменной ϕ . Квадратный корень $\sqrt{2\mathcal{E}}$ считается неотрицательным, поэтому главный член асимптотики строится в классе неотрицательных функций $\rho(\tau) \geq 0$.

Используемые здесь масштабы с множителями, кратными $\varepsilon^{1/3}$, соответствуют известным результатам о начальном этапе захвата в резонанс [2]. Их появление обусловлено кубическим резонансом в нелинейном осцилляторе вблизи равновесия [2], а не начальными условиями. Более того, анзац (8) позволяет уточнить порядок допустимых возмущений начальных данных. Попросту говоря, начальные условия в форме (3) берутся из соображений соответствия анзацу (8).

Формальные построения полной асимптотики в виде бесконечных рядов можно выполнять разными способами. Отличия разных подходов обнаруживаются лишь

в старших поправках. Они соответствуют возможности переразложения рядов за счет зависимости от параметра ε в разложении быстрой фазы ϕ [3]. Впрочем, конструкция старших поправок не содержит новизны и здесь не обсуждается. Принципиальный вопрос о захвате в резонанс решается на уровне главного члена асимптотики. Проблема состоит в выявлении условий, при которых главные члены асимптотики $|R(\tau)|$, $\rho(\tau)$ неограниченно растут при $\tau \rightarrow \infty$. Неограниченно растущие на бесконечности асимптотики соответствуют начальному росту резонансных решений, дальнейшую эволюцию которых следует анализировать в более медленном масштабе εt .

3.2. Анализ главных членов асимптотики. Главные члены асимптотики определим из усредненных уравнений, которые при наложенных ограничениях имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= \rho \langle F_c(E_0, \phi) \cos(\phi + \sigma) + F_s(E_0, \phi) \sin(\phi + \sigma) \rangle, \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= \langle G_0(E_0, \phi) \sin(\phi + \sigma) \rangle, \\ \rho \left[\frac{d\sigma}{d\tau} + \Lambda R - \lambda \frac{\rho^2}{2} \right] &= \langle G_0(E_0, \phi) \cos(\phi + \sigma) \rangle, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \Lambda R \end{aligned} \quad (9)$$

с соответствующими начальными данными

$$R|_{\tau=0} = E_p, \quad \rho|_{\tau=0} = \sqrt{2\mathcal{E}_p}, \quad \sigma|_{\tau=0} = \psi_0 - \phi_0, \quad \varphi|_{t=0} = \phi_0.$$

Константы Λ , λ определяют нелинейные поправки к собственным частотам исходных невозмущенных осцилляторов: $\Lambda = \Omega'(E_0)$, $\lambda = \omega'(0)$. Усредненные уравнения иногда интерпретируются как условия отсутствия секулярных слагаемых, неограниченно растущих по быстрой переменной $\phi \rightarrow \infty$.

Как мы видим, первые три уравнения образуют замкнутую систему. Локальная разрешимость задачи Коши не вызывает сомнения при условии гладкости исходных возмущений. Специфическая структура системы позволяет свести ее к интегрируемому уравнению П2.

3.3. Редукция к уравнению Пенлеве. Усредненные уравнения можно записать в форме

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= \rho [f_s \sin \sigma + f_c \cos \sigma], \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= g_c \sin \sigma + g_s \cos \sigma, \quad \rho \left[\frac{d\sigma}{d\tau} + \Lambda R - \lambda \frac{\rho^2}{2} \right] = -g_s \sin \sigma + g_c \cos \sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь коэффициенты определяются через интегралы от главных членов возмущений (5). Переменную ρ можно рассматривать как амплитуду в полярных координатах ρ , σ .

Система уравнений (10) имеет первый интеграл. Он легко обнаруживается, если использовать декартовы координаты вместо полярных. Наиболее простой вид уравнения приобретает при использовании нормирующего множителя $|g| = \sqrt{g_c^2 + g_s^2}$.

Заметим, что в случае $|g| = 0$ имеется тривиальный интеграл $\rho = \text{const}$ и система сводится к уравнению математического маятника. В общем случае при $|g| \neq 0$ проведем замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} z &= \Lambda R - \frac{\lambda \rho^2}{2}, \\ u &= \rho(g_c \sin \sigma + g_s \cos \sigma)|g|^{-2}, \quad v = \rho(g_c \cos \sigma - g_s \sin \sigma)|g|^{-2}. \end{aligned}$$

Если учесть вытекающие отсюда соотношения

$$\rho \sin \sigma = g_c u - g_s v, \quad \rho \cos \sigma = g_s u + g_c v,$$

то система уравнений для функций u, v, z приобретает вид

$$\frac{dz}{d\tau} = \mu u + \nu v, \quad \frac{du}{d\tau} = 1 - vz, \quad \frac{dv}{d\tau} = uz \quad (11)$$

с константами

$$\mu = \Lambda(f_s g_c + f_c g_s) - \lambda|g|^2, \quad \nu = \Lambda(f_c g_c - f_s g_s).$$

В таких переменных первый интеграл определяется выражением

$$J = \frac{1}{2}z^2 + (\nu u - \mu v) - \nu \tau. \quad (12)$$

С использованием этого интеграла систему трех уравнений (11) можно свести к уравнению второго порядка. Наиболее просто это получается посредством дифференцирования первого уравнения, которое с учетом остальных уравнений приобретает вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \mu \frac{du}{d\tau} + \nu \frac{dv}{d\tau} = \mu(1 + vz) + \nu uz = \mu + z(\nu u - \mu v).$$

Если здесь использовать выражение для первого интеграла, то приходим к уравнению

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = z \left(J + \nu \tau - \frac{1}{2}z^2 \right) + \mu, \quad (13)$$

представляющему собой общую форму уравнения П2 с параметрами $J, \mu, \nu = \text{const}$. Легко понять, что сдвигом по τ и масштабным преобразованием уравнение приводится к стандартной форме с одним параметром. Подобный переход для системы, похожей на (11), указан в статье [10].

3.4. Системы без захвата в резонанс. В частном случае, когда $\nu = 0$, уравнение П2 оказывается автономным и интегрируется.

ТЕОРЕМА 1. Если функции возмущения обладают свойством $f_c g_c - f_s g_s = 0$, то для системы (9) любое решение ограничено в компонентах энергии, а разность фаз растет:

$$R(\tau), \rho(\tau) = \mathcal{O}(1), \quad \sigma(\tau) = \varpi \tau + \mathcal{O}(1), \quad \tau \rightarrow \infty \quad (\varpi = \text{const}).$$

Захват в резонанс отсутствует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\nu = 0$ уравнение (13) имеет первый интеграл

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{8} z^4 - \frac{1}{2} J z^2 - \mu z.$$

Отсюда видно, что фазовая траектория z , $\dot{z}$ на любом решении $z(\tau)$ ограничена. Кроме того, первый интеграл (12) при $\nu = 0$ приобретает вид $J = z^2/2 - \mu v$. Отсюда вытекает ограниченность компоненты $v(\tau)$. Из первого уравнения системы (11) следует ограниченность компоненты $u(\tau)$. Поскольку $\rho^2 = (u^2 + v^2)|g|^2$, то на любом решении ограничена компонента $\rho(\tau)$. Наконец, из выражения $z = \Lambda R - \lambda \rho^2$ следует ограниченность $R(\tau)$.

Фазовый портрет уравнения (13) в автономном случае состоит из замкнутых траекторий за исключением двух сепаратрис. Поэтому общее двухпараметрическое решение $z(\tau)$ является периодической функцией. Из уравнений (11) и интеграла (12) следует, что при $\mu \neq 0$ тот же период имеют функции $u(\tau) = \mu^{-1} \dot{z}$, $v(\tau) = \mu^{-1} [z^2/2 - J]$. В таком случае периодическими являются функции $\rho^2(\tau) = (u^2 + v^2)|g|^2$ и сложные функции $\cos \sigma(\tau)$, $\sin \sigma(\tau)$. После этого из последнего уравнения системы (10) следует периодичность производной $\dot{\sigma}(\tau)$, которая определяет разность частот двух осцилляторов. Среднее значение этой функции не обязано быть равным нулю, поэтому первообразная $\sigma(\tau)$, определяющая разность фаз, может отличаться от периодической функции слагаемым $\varpi \tau$. Коэффициент ϖ кратен частоте рассматриваемого решения $z(\tau)$ ввиду известного периода сложных функций $\cos \sigma(\tau)$, $\sin \sigma(\tau)$. Теорема доказана.

3.5. Системы с захватом в резонанс. Иная ситуация возникает в ситуации общего положения, когда $f_c g_c - f_s g_s \neq 0$. Первый интеграл и уравнение П2 оказываются неавтономными из-за $\nu \neq 0$, и соответствующие решения не являются периодическими. Структура асимптотики на бесконечности определяется знаком коэффициента ν . При этом оказывается, что в случае $\nu < 0$ главные члены асимптотики не зависят от начальных данных.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции возмущения обладают следующим свойством: $\nu = (f_c g_c - f_s g_s) \Lambda < 0$. Тогда для системы уравнений (9) существует четырехпараметрическое семейство асимптотических решений, у которых неограниченно растут энергия и амплитуда, а разность фаз стабилизируется:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{\lambda}{2\Lambda} A^2 \tau^2 + \mathcal{O}(\tau^{5/4}), & \rho(\tau) &= A\tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \\ \sigma(\tau) &= \sigma_0 + \mathcal{O}(\tau^{-3/4}), & \tau &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Константа $A = \text{const} > 0$ не зависит от выбора решения:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-\nu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}} |g| = \frac{(f_s g_s - f_c g_c) \Lambda}{\sqrt{(\Lambda f_c - \lambda g_s)^2 + (\Lambda f_s - \lambda g_c)^2}}, \\ \Lambda &= \Omega'(E_0), & \lambda &= \omega'(0). \end{aligned} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\nu < 0$ асимптотика двухпараметрического решения уравнения П2 в главном приближении описывается функциями Эйри [4] (см. также работу [11]):

$$z(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \dot{z}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Два параметра общего решения содержатся в остатках асимптотики и здесь не выделяются. Из равенств (11), (12) получаем два асимптотических соотношения

$$\mu u + \nu v = \dot{z} = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \nu u - \mu v = \nu\tau + J - \frac{1}{2}z^2 = \nu\tau + \mathcal{O}(1), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Из них вытекают асимптотики для двух компонент решения

$$u(\tau) = \frac{\nu^2}{\nu^2 + \mu^2}\tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad v(\tau) = -\frac{\mu\nu}{\nu^2 + \mu^2}\tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\rho^2 = (u^2 + v^2)|g|^2 = \frac{\nu^2}{\nu^2 + \mu^2}|g|^2\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^{5/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

С учетом $z = \Lambda R - \lambda\rho^2$ отсюда следуют требуемые соотношения для $R(\tau)$, а также для $\rho(\tau)$. Окончательная формула для константы A получается подстановкой выражений для μ, ν .

Два параметра общего решения уравнения П2, а также значение первого интеграла J содержатся в остатках асимптотики и не влияют на коэффициент при главном члене. Четвертый параметр определяет сдвиг фазы при интегрировании отдельного уравнения в (9) для быстрой фазы φ .

С учетом полученных асимптотик для $z(\tau), \rho(\tau)$ из последнего уравнения системы (10) следует убывание производной $\dot{\sigma}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-1/4})$, $\tau \rightarrow \infty$. Это означает, что частоты двух осцилляторов со временем сближаются, а величина $\sigma(\tau)$, определяющая сдвиг фаз, стабилизируется¹⁾:

$$\sigma(\tau) = \sigma_0 + \mathcal{O}(\tau^{-3/4}), \quad \tau \rightarrow \infty, \quad \sigma_0 = \text{const.}$$

Указанная здесь оценка остатка не следует из формального интегрирования приведенной выше грубой асимптотики для производной. При получении этой оценки надо учитывать быстро осциллирующие множители. Это можно осуществить либо путем построения полной асимптотики на бесконечности для решений системы (10) аналогично тому, как это сделано в статье [12], либо путем оценок быстро осциллирующих интегралов, используя известную асимптотику уравнения П2 [4]. Вычисление σ_0 приведено в следствии 2. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Два параметра из асимптотики решения уравнения П2 соответствуют начальным значениям по формулам связи [4], [11]. В ситуации общего положения это уравнение не имеет двухпараметрических решений с другой асимптотикой [4]. Поэтому почти любые начальные данные приводят к решению с захватом в резонанс.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Главный член сдвига фазы σ_0 однозначно определяется уравнениями*

$$f_s \sin \sigma_0 + f_c \cos \sigma_0 = \frac{\lambda}{\Lambda} A, \quad g_c \sin \sigma_0 + g_s \cos \sigma_0 = A. \quad (15)$$

¹⁾В этом случае уместно говорить о “захвате в резонанс”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные два соотношения вытекают из уравнений (10) с учетом полученной асимптотики. Эти два уравнения редуцируются к одному уравнению

$$[\Lambda f_s - \lambda g_c] \sin \sigma_0 + [\Lambda f_c - \lambda g_s] \cos \sigma_0 = 0. \quad (16)$$

У него всегда существует пара корней σ_0 , $\sigma_0 + \pi$, которые отличаются на период тангенса π .

Вообще говоря, два тригонометрических уравнения (15) не обязаны иметь общий корень и даже быть разрешимыми, а решение редуцированного уравнения не обязательно давать решение исходных. Для рассматриваемых уравнений разрешимость обеспечивается спецификой константы $A > 0$. Достаточно показать, что полученный из уравнения (16) корень σ_0 удовлетворяет хотя бы одному из исходных уравнений (15). Для этого вычисляем левую часть одного из уравнений, используя выражение (16):

$$g_c \sin \sigma_0 + g_s \cos \sigma_0 = \left(g_s - g_c \frac{\Lambda f_c - \lambda g_s}{\Lambda f_s - \lambda g_c} \right) \cos \sigma_0.$$

Для $\cos \sigma_0$ из (16) вытекает пара выражений, которые отличаются знаком. Если выбрать

$$\cos \sigma_0 = - \frac{\Lambda f_s - \lambda g_c}{\sqrt{(\Lambda f_s - \lambda g_c)^2 + (\Lambda f_c - \lambda g_s)^2}},$$

то для левой части второго уравнения в (15) получаем, что

$$g_c \sin \sigma_0 + g_s \cos \sigma_0 = - \frac{(f_c g_c - f_s g_s) \Lambda}{\sqrt{(\Lambda f_c - \lambda g_s)^2 + (\Lambda f_s - \lambda g_c)^2}}. \quad (17)$$

Эта формула в точности совпадает с выражением (14) для A . Следовательно, σ_0 удовлетворяет второму уравнению в (15), а в силу уравнения (16) удовлетворяет и первому уравнению. Следствие доказано.

3.6. Медленный захват в резонанс. В случае $\nu > 0$ складывается ситуация, необычная для рассматриваемого круга задач.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции возмущения обладают следующим свойством: $\nu = (f_c g_c - f_s g_s) \Lambda > 0$. Тогда для системы уравнений (9) существует четырехпараметрическое семейство асимптотических решений, у которых в главном члене неограниченно растут энергия, амплитуда и разность фаз:

$$R(\tau) = c^2 \tau^{1/2} \mathcal{E}_0 [1 + o(1)], \quad \rho(\tau) = c \tau^{1/4} \rho_0 [1 + o(1)], \\ \sigma(\tau) = -\frac{3}{2} \sqrt{2\nu} \tau^{3/2} [1 + \mathcal{O}(\tau^{-3/4})], \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Главные члены этой асимптотики зависят от выбора решения посредством константы $c > 0$ – (произвольного) амплитудного параметра решения уравнения П2; коэффициенты определяются формулами

$$\rho_0 = |g| \sqrt{\frac{2\nu}{\mu^2 + \nu^2}}, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{1}{\Lambda} (\lambda \rho_0^2 + \sqrt{2\nu}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теперь асимптотика общего решения уравнения Пенлеве в главном описывается формулами [4]

$$z(\tau) = \sqrt{2\nu\tau} + \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \dot{z}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty,$$

которые вытекают из анзаца Бутру. Аналогично предыдущему доказательству из этих соотношений можно извлечь оценки

$$R(\tau), \rho^2 = \mathcal{O}(\tau^{1/2}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Чтобы вычислить коэффициенты при главных членах асимптотики, надо учесть структуру первой поправки в анзаце Бутру [4] (см. также работу [11]). В этой поправке удобно выделить амплитуду в виде произвольной константы $c > 0$ – параметра решения уравнения П2:

$$z(\tau) = \sqrt{2\nu\tau}^{1/2} + \tau^{-1/4} c \cos(\eta) [1 + o(1)] + o(\tau^{-1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Обратим внимание на структуру поправки, которая содержит осциллирующую функцию с быстрой фазой:

$$\eta = \frac{2}{3} \sqrt{2\nu\tau}^{3/2} + \alpha(c) \lg(\nu^{1/3}\tau) + \eta_0.$$

Здесь $c, \eta_0 = \text{const}$ – параметры решения уравнения П2 (константы интегрирования).

Из этой асимптотики вытекают соотношения

$$\dot{z} = -\tau^{1/4} c \sqrt{2\nu} \sin \eta + o(1), \quad \frac{1}{2} z^2 - \nu\tau = \tau^{1/4} c \sqrt{2\nu} \cos \eta + o(1).$$

Если их использовать в уравнении $\mu u + \nu v = \dot{z}$ и в первом интеграле $\nu u - \mu v = \nu\tau + J - z^2/2$, то можно найти асимптотику компонент $u(\tau), v(\tau)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\mu^2 + \nu^2)u &= -\tau^{1/4} c \sqrt{2\nu} [\mu \sin \eta + \nu \cos \eta] [1 + o(1)], \\ (\mu^2 + \nu^2)v &= -\tau^{1/4} c \sqrt{2\nu} [\nu \sin \eta - \mu \cos \eta] [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Отсюда для $\rho = |g|\sqrt{u^2 + v^2}$ получается требуемая асимптотика, а из соотношения $\Lambda R - \lambda \rho^2 = z$ выписывается асимптотика для $R(\tau)$.

Как видим, параметр c из общего решения уравнения П2 определяет коэффициенты главных членов асимптотического решения. Вторым параметром η_0 , а также значение первого интеграла J не влияют на энергию и амплитуду в главном.

С учетом полученных асимптотик для $z(\tau), \rho(\tau)$ из последнего уравнения системы (10) можно получить растущую асимптотику для производной фазы

$$\dot{\sigma}(\tau) = \sqrt{2\nu\tau}^{1/2} + \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Это означает, что частоты двух осцилляторов со временем расходятся. Соответственно, растет функция $\sigma(\tau)$, определяющая сдвиг фаз. Ее асимптотика с грубой оценкой остатка получается интегрированием последнего соотношения. Теорема доказана.

4. ВНЕШНЕЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

При $\nu \neq 0$ коэффициенты асимптотики в рядах (8) растут на бесконечности $\tau \rightarrow \infty$. Из-за этого возникают ограничения на временной промежуток, где пригоден анзац в форме (8). В случае $\nu < 0$ простое соображение о малости поправки $\varepsilon^{2/3}|R(\tau)| \approx \varepsilon^{2/3}\tau^2 = \varepsilon^2 t^2 \ll 1$ приводит к ограничению по времени $t \ll \varepsilon^{-1}$. Это обычная ситуация для задач с малым параметром. Для далеких времен $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ асимптотическое решение следует строить в другой форме с использованием другого медленного времени $\theta = \varepsilon t$. По аналогии с другими похожими задачами это разложение (вне начального погранслоя) можно назвать внешним [13]. Как часто бывает в таких случаях, в формальной конструкции асимптотического решения обнаруживается произвол (в данном случае он имеет место в сдвиге фаз). Произвол ликвидируется при дополнительном условии согласования с решением из погранслоя.

4.1. Формальные конструкции. Снова введем разность фаз $S = \psi - \phi$ и перепишем исходные уравнения в полной форме

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \varepsilon F(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + \sigma), & \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \varepsilon G(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + \sigma), \\ \frac{dS}{dt} &= \omega(\mathcal{E}) - \Omega(E) + \varepsilon[\Psi(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + \sigma) - \Phi(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + \sigma)], \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega(E) + \varepsilon\Phi(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + \sigma). \end{aligned}$$

Анзац для асимптотического решения выберем в виде рядов

$$\begin{aligned} E &= \hat{E}(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k E_k(\theta, \phi), \\ \mathcal{E} &= \hat{\mathcal{E}}(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mathcal{E}_k(\theta, \phi), & S &= \hat{S}(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_k(\theta, \phi), \\ \phi &= \varepsilon^{-1} \hat{\phi}(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \phi_k(\theta, \phi), & \theta &= \varepsilon t, \end{aligned} \quad (18)$$

с коэффициентами, периодическими по быстрой переменной ϕ . Главные члены представляют собой медленно меняющиеся функции. Для них получаются усредненные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{E}}{d\theta} &= \langle F(\hat{E}, \hat{\mathcal{E}}, \phi, \phi + \hat{S}) \rangle, & \frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\theta} &= \langle G(\hat{E}, \hat{\mathcal{E}}, \phi, \phi + \hat{S}) \rangle, \\ \omega(\hat{\mathcal{E}}) - \Omega(\hat{E}) &= 0, & \frac{d\hat{\phi}}{d\theta} &= \Omega(\hat{E}). \end{aligned} \quad (19)$$

4.2. Разрешимость модельной задачи. Как видим, первые три уравнения в системе (19) отделяются. Ввиду наличия алгебраического уравнения, которое связывает функции $\hat{E}(\theta)$ и $\hat{\mathcal{E}}(\theta)$, одно из дифференциальных уравнений превращается в алгебраическое для функции $\hat{S}(\theta)$. Поэтому модельная задача по нахождению главных членов асимптотики содержит два алгебраических уравнения. Выпишем

эту задачу, опуская знак “крышки” на искомым функциях:

$$\begin{aligned}\omega(\mathcal{E}) - \Omega(E) = 0, \quad \Omega'(E)\langle F(E), \mathcal{E}, \phi, \phi + S \rangle &= \omega'(\mathcal{E})\langle GE, \mathcal{E}, \phi, \phi + S \rangle, \\ \frac{d\mathcal{E}}{d\theta} &= \langle G(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + S) \rangle.\end{aligned}\quad (20)$$

Наличие алгебраических уравнений в подобных задачах не удивительно. Например, в более простой ситуации [14] дифференциальное уравнение отсутствовало вовсе. Все это похоже на известные конструкции для задач с погранслоем [13].

Дифференциальное уравнение ниже дополнено начальным условием из соображений согласования с погранслоем. Однако из-за нелинейности алгебраических уравнений проблема существования и единственности решения остается. Возможны разные варианты достаточных условий разрешимости системы (20). Если в окрестности начальной точки выполнено условие невырожденности резонанса (2), то первое уравнение разрешимо относительно любой из переменных $E, \mathcal{E}$. Разрешимость второго уравнения относительно S можно получить при дополнительных ограничениях.

ЛЕММА 1. Пусть исходные функции F, G непрерывны по всем переменным. Если для них средние по аргументу ψ обращаются в нуль:

$$\langle F(E, \mathcal{E}, \phi, \psi) \rangle_\psi = 0, \quad \langle G(E, \mathcal{E}, \phi, \psi) \rangle_\psi = 0,$$

то второе алгебраическое уравнение в (20) разрешимо по S и существуют по крайней мере два корня $S = S_\pm(E, \mathcal{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию трех переменных через средние значения по ϕ :

$$Z(\mathcal{E}, E, S) \equiv \Omega'(E)\langle F(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + S) \rangle - \omega'(\mathcal{E})\langle G(E, \mathcal{E}, \phi, \phi + S) \rangle.$$

В силу условия теоремы ее среднее по S равно нулю: $\langle Z(E, \mathcal{E}, S) \rangle_S = 0$. Если эта непрерывная функция отлична от тождественного нуля, то у нее существуют как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому с учетом непрерывности и периодичности для этой функции существуют по крайней мере два нуля $S = S_\pm(E, \mathcal{E})$. Лемма доказана.

В общем случае требование разрешимости алгебраических уравнений в задаче (20) представляет собой необходимое условие для построения асимптотического решения в форме (18). В известных примерах оно легко проверяется посредством доказанной теоремы. Но помимо этого необходима гладкость корня. Для этого достаточно условия необращения в нуль производной на корне

$$\partial_S Z(\mathcal{E}, E, S) \neq 0 \quad \text{при} \quad Z(\mathcal{E}, E, S) = 0.$$

Проверять это свойство представляется затруднительным. Однако вблизи начальной точки ситуация упрощается ввиду специфики исходных функций (4). Напомним обозначения: $\Lambda = \Omega'(E_0)$, $\lambda = \omega'(0)$, а также то, что мы ввели в предыдущем разделе константы $\mu, \nu, |g|$.

ЛЕММА 2. Пусть исходные функции $F, G, \Omega', \omega' \in C_1$ дифференцируемы по всем переменным в окрестности начальных данных и имеют место асимптотики (4). Если в начальной точке $E = E_0, \mathcal{E} = 0$ выполнены условия $|g| \neq 0, \mu^2 + \nu^2 \neq 0$, то в окрестности этой точки второе алгебраическое уравнение в (20) имеет только два простых корня $S = S_{\pm}(E, \mathcal{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемое уравнение можно записать в асимптотической форме

$$([\Omega'(E)f_c(E) - \omega'(\mathcal{E})g_s(E)] \cos S + [\Omega'(E)f_s(E) - \omega'(\mathcal{E})g_c(E)] \sin S) + \mathcal{O}(\sqrt{\mathcal{E}}) = 0.$$

В предельной точке $E = E_0, \mathcal{E} = 0$ это уравнение превращается в следующее:

$$[\Lambda f_s - \lambda g_c] \sin S + [\Lambda f_c - \lambda g_s] \cos S = 0.$$

Обратим внимание, что коэффициенты этого уравнения не обращаются в нуль одновременно, поскольку

$$(\Lambda f_s - \lambda g_c)^2 + (\Lambda f_c - \lambda g_s)^2 = (\mu^2 + \nu^2)/|g|^2 \neq 0.$$

Предельное уравнение имеет два простых корня. Более того, это уравнение в точности совпадает с (16). Поэтому корни известны: $S(E_0, 0) = \sigma_0, S(E_0, 0) = \sigma_0 + \pi$. В силу гладкости функций исходное уравнение имеет два простых корня $S = S_{\pm}(E, \mathcal{E})$ в окрестности начальной точки $(E_0, 0)$. Лемма доказана.

4.3. Согласование асимптотик. Как обычно в методе согласования [13], асимптотику погранслоного решения при $\tau \rightarrow \infty$ следует переписать во внешнем масштабе с учетом замены времени $\varepsilon^{1/3}\tau = \theta$ и интерпретировать ее как асимптотику при $\theta \rightarrow 0$. В главных членах получаются следующие соотношения:

$$E(t) \approx E_0 + \varepsilon^{2/3} \frac{\lambda}{2\Lambda} A^2 \tau^2 = E_0 + \frac{\lambda}{2\Lambda} A^2 \theta^2, \quad \mathcal{E}(t) \approx \varepsilon^{2/3} \frac{1}{2} A^2 \tau^2 = \frac{1}{2} A^2 \theta^2, \quad S \approx \sigma_0.$$

Требование согласования для одной из компонент энергии в форме $\hat{\mathcal{E}}(\theta) \approx A^2 \theta^2 / 2, \theta \rightarrow 0$, влечет соотношение $\hat{\mathcal{E}}|_{\theta=0} = 0$, которое можно использовать как условие Коши для дифференциального уравнения в (19). Тогда из предыдущей леммы вытекает следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\nu \neq 0$, то в достаточно малой окрестности $\theta \in [0, \theta_0]$, $\theta_0 = \text{const} > 0$, существуют два гладких по θ решения уравнений (20) с нулевым условием $\mathcal{E}|_{\theta=0} = 0$.

Теперь остается доказать, что решение, которое фиксируется выбором корня для фазы $S(E_0, 0) = \sigma_0$, согласовано с решением из погранслоя.

ТЕОРЕМА 4. Если $\nu = (f_c g_c - f_s g_s) \Lambda < 0$, то в достаточно малой окрестности $\theta \in [0, \theta_0]$, $\theta_0 = \text{const} > 0$, существует гладкое по θ внешнее асимптотическое решение (18), которое в главном члене согласовано с решением в погранслое (8), так что

$$\hat{E}(\theta) = E_0 + \frac{\lambda}{2\Lambda} A^2 \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3), \quad \hat{\mathcal{E}}(\theta) = \frac{1}{2} A^2 \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3), \quad \hat{S}(\theta) = \sigma_0 + \mathcal{O}(\theta), \quad \theta \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку построенное решение является гладким, то при $\theta \rightarrow 0$ оно разлагается в ряд Тейлора по целым степеням,

$$\begin{aligned}\widehat{E}(\theta) &= \widehat{E}_0 + \widehat{E}_1\theta + \widehat{E}_2\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3), & \widehat{\mathcal{E}}(\theta) &= \widehat{\mathcal{E}}_1\theta + \widehat{\mathcal{E}}_2\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3), \\ \widehat{S}(\theta) &= \widehat{S}_0 + \widehat{S}_1\theta + \mathcal{O}(\theta^2), & \theta &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Коэффициенты разложения определяются соотношениями, которые получаются из уравнений (20) приравниванием выражений при одинаковых степенях θ .

Первое из уравнений в главном члене асимптотики $\Omega(\widehat{E}_0) = \omega(0)$ выполняется при $\widehat{E}_0 = E_0$ в силу резонансного условия. Другое алгебраическое уравнение определяет сдвиг фазы. Это уравнение в главном члене для $\widehat{S}_0$ совпадает с (16) и имеет два корня. Из соображений согласования с погранслоем полагаем, что $\widehat{S}_0 = \sigma_0$.

Оставшееся в системе (20) дифференциальное уравнение для энергии в главном члене приобретает вид

$$\frac{d\sqrt{2\mathcal{E}}}{d\theta} = g_c \sin \sigma_0 + g_s \cos \sigma_0, \quad \sqrt{2\mathcal{E}(\theta)} \geq 0,$$

и дополняется нулевым начальным условием из требования согласования. Как показано в (17), правая часть совпадает с положительной константой A . Поэтому $\widehat{\mathcal{E}} = \theta^2 A^2/2 + \mathcal{O}(\theta^3)$, так что $\widehat{\mathcal{E}}_1 = 0$ и $\widehat{\mathcal{E}}_2 = A^2/2$.

После этого определяем поправки асимптотики, исходя из линеаризованных уравнений. Так, из первого (алгебраического) уравнения находим, что $\widehat{E}_1 = 0$ и $\widehat{E}_2 = \widehat{\mathcal{E}}_2 \omega'(0)/\Omega'(E_0)$. Тем самым теорема доказана на уровне главных членов асимптотики.

ПОЯСНЕНИЕ. Требование согласования асимптотик играет решающую роль в выборе правильного описания решения на далеких временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Заметим, что система уравнений (20) вблизи резонансной точки $(E_0, 0)$ разрешима всегда. Независимо от знака константы $\nu = (f_c g_c - f_s g_s)\Lambda$ существует решение с положительной функцией $\sqrt{\mathcal{E}(\theta)}$. В частности, если $\nu > 0$, то в качестве корня алгебраического уравнения следует использовать $S(E_0, 0) = \sigma_0 + \pi$. Такой результат создает иллюзию пригодности уравнений (20) для описания резонансного захвата при любых $\nu \neq 0$. Однако такое решение из внешней области при $\nu > 0$ невозможно согласовать с погранслоем. В этом случае общее решение уравнения П2 имеет совсем другую асимптотику (см. теорему 3). Поэтому в случае $\nu > 0$ система (20) не имеет отношения к описанию эволюции энергии в резонансе. Более того, при $\nu > 0$ анализ погранслоного решения в первых поправках $\varepsilon^{2/3}R(\tau) \approx \varepsilon^{2/3}\tau^{1/2} = \varepsilon t^{1/2} \ll 1$ показывает его пригодность при $t \ll \varepsilon^{-2}$. Эти результаты подтверждаются численными экспериментами [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Указанным способом во внешней области можно построить асимптотическое решение в виде бесконечных рядов (18). Поскольку на каждом шаге из четырех уравнений только два являются дифференциальными, то решения содержат два произвольных параметра. Поэтому полного согласования (во всех порядках асимптотики) с четырехпараметрическим решением из погранслоя может не быть. Такое случается в одномерной системе [14]. Построение четырехпараметрического решения во внешней области следует выполнять другим способом, как это было сделано для более простой задачи в статье [16]. Однако отличия от приведенных выше конструкций возникают лишь в старших поправках по малому параметру, которые не влияют на факт захвата в резонанс.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для системы слабо связанных осцилляторов в форме уравнений (1) исследована задача Коши с начальными данными (3), которые в невозмущенной задаче соответствуют резонансу $\Omega(E_0) = \omega(0)$ вблизи равновесия $\mathcal{E} = 0$. Для класса возмущенных решений, параметризуемых начальными константами E_p , $\mathcal{E}_p$, ϕ_0 , ψ_0 , построена асимптотика по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ на большом промежутке времени $0 < t < \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Найдены условия на возмущение в форме $\nu = (f_c g_c - f_s g_s) \Omega'(E_0) < 0$, при которых решение в компонентах энергии E , $\mathcal{E}$ меняется на величину порядка единицы на далеких временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Изменения главного члена асимптотики в масштабе медленного времени $\theta = \varepsilon t$ описываются системой уравнений (20). Эти уравнения имеют единственное решение при дополнительном условии согласования с резонансными решениями в начальном погранслое.

Начальный погранслои охарактеризован масштабом $\tau = \varepsilon^{2/3} t$. Резонансные решения выделены требованием неограниченного роста главного члена асимптотики $\mathcal{E}$ на бесконечности $\tau \rightarrow \infty$. При $\nu < 0$ в ситуации общего положения резонансными оказываются почти все решения. Ключевую роль здесь играет уравнение П2, у которого не существует двухпараметрических решений, отличных от тех, что использованы в теореме 2 и которые приводят к резонансу [4]. Ситуация здесь резко отличается от других задач о захвате в резонанс. Например, при резонансе вдаль от равновесия начальный этап описывается уравнением смещенного маятника [1]. Для него существуют два различных семейства двухпараметрических решений, и только одно из них дает резонансные решения. Им соответствует область на начальной плоскости, ограниченная сепаратрисной петлей.

Описание резонанса на временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ посредством уравнений (20) дополняет результаты Нейштадта [1], [6]. Решающую роль здесь играет второе (алгебраическое) уравнение в (20), решение которого позволяет обойти условие $\bar{A}$ из [1], [6].

Список литературы

- [1] А. И. Нейштадт, “Усреднение, прохождение через резонансы и захват в резонанс в двухчастотных системах”, *УМН*, **69**:5 (2014), 3–80.
- [2] Л. А. Калякин, “Асимптотический анализ моделей авторезонанса”, *УМН*, **63**:5 (2008), 3–72.
- [3] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
- [4] А. А. Капаев, “Асимптотические формулы для функций Пенлеве второго”, *ТМФ*, **77**:3 (1988), 323–332.
- [5] В. И. Арнольд, “Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике”, *УМН*, **18**:6 (1963), 91–192.
- [6] А. И. Нейштадт, “Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах”, *Тр. МИАН*, **250** (2005), 198–218.
- [7] Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин, “Об усреднении для гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малыми амплитудами”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 660–669.
- [8] Л. А. Калякин, “Резонансный захват в нелинейной системе”, *ТМФ*, **144**:1 (2005), 74–82.
- [9] Л. А. Калякин, “Авторезонанс в динамической системе”, *Асимптотические методы функционального анализа*, Современная математика и ее приложения, **5**, Ин-т кибернетики АН Грузии, Тбилиси, 2003, 79–109.

- [10] N. A. Kudryashov, “The second Painlevé equation as a model for the electric field in a semiconductor”, *Phys. Lett. A.*, **233**:4–6 (1997), 397–400.
- [11] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, НИЦ “РХД”, М.–Ижевск, 2005.
- [12] Л. А. Калякин, “Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности”, *Уфимский матем. журн.*, **1**:2 (2009), 29–52.
- [13] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [14] Л. А. Калякин, “Усреднение в модели авторезонанса”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 449–452.
- [15] Л. А. Калякин, “Уравнение Пенлеве-II как модель резонансного взаимодействия осцилляторов”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **23**:2 (2017), 104–116.
- [16] Р. Н. Гарифуллин, “Асимптотическое решение задачи об авторезонансе. Внешнее разложение”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:9 (2006), 1605–1616.

Поступила в редакцию 29.03.2017