Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Врежински, В. А. Загребнов, Квазисредние Боголюбова: спонтанное нарушение симметрии и алгебра флуктуаций, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 2, 187–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:05:17

© 2018 г.

В. Ф. Врежински*, В. А. Загребнов^{†‡}

КВАЗИСРЕДНИЕ БОГОЛЮБОВА: СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И АЛГЕБРА ФЛУКТУАЦИЙ

Приводятся аргументы в пользу применения метода квазисредних Боголюбова для квантовых систем. Во-первых, поясняется, как он может быть использован при изучении фазовых переходов со спонтанным нарушением симметрии. С этой целью рассматривается пример бозе-эйнштейновской конденсации в непрерывных системах. Анализ различных типов обобщённой конденсации показывает, что единственными физически достоверными величинами являются те, которые определяются квазисредними Боголюбова. В этой связи также приводится решение задачи Либа–Зайрингера–Ингвасона. Во-вторых, изучается связь между спонтанным нарушением симметрии и критическими квантовыми флуктуациями, для чего используется масштабированный метод квазисредних Боголюбова и рассматривается пример структурного квантового фазового перехода. Показано, что опять же квазисредние дают адекватный инструмент для описания алгебры операторов критических квантовых флуктуаций как в коммутативном, так и в некоммутативном случаях.

Ключевые слова: квазисредние Боголюбова, обобщённая бозе-конденсация, критические квантовые флуктуации.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9378>

*Памяти Дмитрия Николаевича Зубарева
в честь 100-летия со дня его рождения*

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Концепция спонтанного нарушения симметрии (СНС) занимает центральное место в квантовой физике – как в статистической механике, так и в квантовой теории поля и физике элементарных частиц. Определение СНС хорошо известно ещё с середины 1960-х гг. (см. книги [1], раздел 6.5.2, и [2], раздел 4.3.4). Напомним, что

---

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil.
E-mail: wreszins@gmail.com

[†]Département de Mathématiques, Aix-Marseille Université, Marseille, France.
E-mail: valentin.zagrebnoy@univ-amu.fr

[‡]Institut de Mathématiques de Marseille, Marseille, France

начальной точкой является рассмотрение состояния (основного или температурного), которое предполагается инвариантным относительно действия группы симметрии G , но имеет нетривиальное разложение на экстремальные состояния, интерпретируемые как чистые термодинамические фазы (состояния). Эти экстремальные состояния, однако, не обладают инвариантностью относительно действия группы G , но только относительно действия некоторой её собственной подгруппы H .

Существуют два основных способа задания экстремальных состояний:

1) выбрать граничные условия для гамильтониана H_Λ в конечной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, а затем взять термодинамический предел $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ или $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ от средних значений соответствующих локальных состояний;

2) сделать замену $H_\Lambda \rightarrow H_\Lambda + hB_\Lambda$, где B_Λ – подходящее внешнее поле и h – действительный параметр, и далее сначала перейти к пределу $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ или $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$, а затем устремить $h \rightarrow +0$ (или $h \rightarrow -0$); здесь предполагается, что рассматриваемые состояния являются локально нормальными или локально финитными (см., например, монографию [3] и ссылки в ней).

Второй способ известен как метод *квазисредних* Боголюбова [4], [5].

Отметим, что, хотя метод граничных условий является достаточно понятным, например, для классических систем на решётке, его нельзя считать удовлетворительным для непрерывных и тем более квантовых систем. В настоящей статье мы выступаем в поддержку применения метода квазисредних Боголюбова для квантовых систем.

Во-первых, мы поясняем, как применять этот метод для изучения фазовых переходов с СНС (см. раздел 2). С этой целью мы рассматриваем квантовый фазовый переход, который представляет собой традиционную одномодовую бозе-эйнштейновскую конденсацию (БЭК, ВЕС) в идеальном бозе-газе. В этом простейшем случае конденсация происходит в единственной нулевой моде, что влечёт спонтанное нарушение симметрии относительно группы G – калибровочной группы преобразований. Далее мы рассматриваем случай, когда конденсация распределяется по бесконечно большому числу мод. Наш анализ различных типов такой обобщённой БЭК (обЭК, gBEC) показывает, что физически достоверными величинами являются те, которые определяются методом квазисредних Боголюбова (см. замечание 2.3 и теорему 2.1).

Мы распространяем наш анализ на неидеальный бозе-газ. Из полученных результатов следует, что мы можем прояснить общий вопрос, поставленный Либом, Зайрингером и Ингвасоном [6], об эквивалентности между БЭК и нарушением калибровочной симметрии (НКС, GSB), определёнными через одномодовое квазисреднее Боголюбова, для любого типа БЭК в духе работы ван ден Берга, Льюиса и Пуле [7] и работы [8] (см. замечание 2.6, в котором также подчёркнуто, что квазисредние приводят к эргодическим состояниям, и это делает понятным важный концептуальный аспект самого приёма квазисредних).

Во-вторых, используя метод квазисредних Боголюбова и рассматривая в качестве базового примера структурный квантовый фазовый переход, мы подробно изучаем связь между СНС и критическими квантовыми флуктуациями (см. раздел 3). Анализ, проведенный в разделе 4, показывает, что опять же квазисредние Боголюбова предоставляют адекватный аппарат для описания алгебры флуктуационных операторов на критической линии переходов. При этом мы изучаем как коммутативные, так и некоммутативные случаи этой алгебры (см. теоремы 4.1 и 4.2).

Здесь хотелось бы отметить, что именно Дмитрий Николаевич Зубарев был первым, кто отметил [9] значимость квазисредних Боголюбова в теории неравновесных процессов. В этом случае инфинитезимальные внешние источники приводят к нарушению временной инвариантности уравнения Лиувилля для статистического оператора. Хотя этот подход хорошо известен в математической физике как принцип предельного поглощения, в работе [9] он был развит в применении к проблеме многих тел. Это элегантное расширение теории сегодня известно как метод неравновесного статистического оператора Зубарева [10], [11]. Данный интересный аспект метода квазисредних Боголюбова лежит вне рамок настоящей статьи.

2. НЕПРЕРЫВНЫЕ БОЗОННЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Традиционные или обобщённые конденсации и внедиагональный дальний порядок. Отметим, что существование оБЭК делает бозонные системы более привлекательными с точки зрения демонстрации эффективности метода квазисредних Боголюбова, чем, скажем, спиновые решеточные системы. Это становится ясным даже на уровне идеального бозе-газа.

С этой целью рассмотрим БЭК идеального бозе-газа в трёхмерном анизотропном параллелепипеде $\Lambda := V^{\alpha_1} \times V^{\alpha_2} \times V^{\alpha_3}$ с периодическими граничными условиями и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, т.е. объём $|\Lambda| = V$. В бозонном пространстве Фока $\mathcal{F}_\Lambda := \mathcal{F}_{\text{boson}}(\mathcal{L}^2(\Lambda))$ гамильтониан такой системы для большого канонического ансамбля с химическим потенциалом $\mu < 0$ определяется как

$$H_{0,\Lambda,\mu} = T_\Lambda - \mu N_\Lambda = \sum_{k \in \Lambda^*} (\varepsilon_k - \mu) b_k^* b_k, \quad \text{dom}(H_{0,\Lambda,\mu}) = \text{dom}(T_\Lambda). \quad (2.1)$$

Здесь спектр одночастичного кинетического оператора есть $\{\varepsilon_k = k^2\}_{k \in \Lambda^*}$, где множество Λ^* дуально Λ :

$$\Lambda^* := \left\{ k_j = \frac{2\pi}{V^{\alpha_j}} n_j : n_j \in \mathbb{Z} \right\}_{j=1}^{d=3}, \quad \varepsilon_k = \sum_{j=1}^d k_j^2. \quad (2.2)$$

Через $b_k := b(\varphi_k^\Lambda)$ и $b_k^* = (b(\varphi_k^\Lambda))^*$ мы обозначили бозонные операторы уничтожения и рождения для k -й моды, действующие в пространстве Фока $\mathcal{F}_\Lambda$. Они индексированы элементами ортонормированного базиса $\{\varphi_k^\Lambda(x) = e^{ikx}/\sqrt{V}\}_{k \in \Lambda^*}$ пространства $\mathcal{L}^2(\Lambda)$, образованного собственными функциями самосопряжённого одночастичного оператора кинетической энергии $-\Delta$ с периодическими граничными условиями, действующего в пространстве $\mathcal{L}^2(\Lambda)$. Формально эти операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (ККС) $[b_k, b_{k'}^*] = \delta_{k,k'}$ для $k, k' \in \Lambda^*$. Тогда $N_k = b_k^* b_k$ есть оператор числа частиц одночастичного состояния φ_k^Λ и $N_\Lambda = \sum_{k \in \Lambda^*} N_k$ является оператором полного числа частиц в Λ .

Для заданных температуры $\beta^{-1} := k_B T$ (где k_B – постоянная Больцмана) и химического потенциала μ обозначим через $\omega_{\beta,\mu,\Lambda}^0(\cdot)$ состояние большого канонического распределения Гиббса для идеального бозе-газа, порождённое гамильтонианом (2.1):

$$\omega_{\beta,\mu,\Lambda}^0(\cdot) = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda}(\exp(-\beta H_{0,\Lambda,\mu}) \cdot)}{\text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda} \exp(-\beta H_{0,\Lambda,\mu})}. \quad (2.3)$$

Проблема существования БЭК связана с решением в области Λ уравнения

$$\rho = \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*} \omega_{\beta, \mu, \Lambda}^0(N_k) = \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} \quad (2.4)$$

для заданной полной плотности частиц ρ . Заметим, что в силу (2.2) термодинамический предел $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^3$ в правой части уравнения (2.4),

$$\mathcal{I}(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*} \omega_{\beta, \mu, \Lambda}^0(N_k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (2.5)$$

существует при любом $\mu < 0$. При $\mu = 0$ он достигает своего (конечного) максимального значения $\mathcal{I}(\beta, \mu)|_{\mu=0} = \rho_c(\beta)$, которое называется *критической плотностью частиц* для заданной температуры.

Напомним, что существование конечной критической плотности $\rho_c(\beta)$ служит причиной возникновения (посредством механизма насыщения) БЭК нулевой моды: $\rho_0(\beta) := \rho - \rho_c(\beta)$, когда полная плотность частиц ρ становится больше $\rho_c(\beta)$. Заметим, что на самом деле для $\alpha_1 < 1/2$ весь конденсат располагается в моде $k = 0$ одночастичного основного состояния:

$$\rho_0(\beta) = \rho - \rho_c(\beta) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho), \Lambda}^0(b_0^* b_0) = \lim_{\Lambda} \left[\frac{1}{V} \frac{1}{e^{-\beta \mu_{\Lambda}(\beta, \rho)} - 1} \right]_{\rho \geq \rho_c(\beta)}, \quad (2.6)$$

$$\mu_{\Lambda}(\beta, \rho)|_{\rho \geq \rho_c(\beta)} = -\frac{1}{V} \frac{1}{\beta(\rho - \rho_c(\beta))} + o\left(\frac{1}{V}\right), \quad (2.7)$$

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho), \Lambda}^0(b_k^* b_k) = 0, \quad (2.8)$$

где $\mu_{\Lambda}(\beta, \rho)$ – единственное решение уравнения (2.4) и $k = 0$.

Следуя работе [7], введём оБЭК.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Полная плотность $\rho_{\text{гBEC}}(\beta, \mu)$ оБЭК определяется как двойной предел:

$$\rho_{\text{гBEC}}(\beta, \mu) := \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*: \|k\| \leq \delta} \omega_{\beta, \mu, \Lambda}(b_k^* b_k). \quad (2.9)$$

Здесь $\omega_{\beta, \mu, \Lambda}(\bullet)$ обозначает соответствующее состояние большого канонического ансамбля Гиббса для конечного объема.

Тогда в соответствии с номенклатурой, предложенной в работе [7], БЭК нулевой моды в идеальном бозе-газе есть не что иное, как оБЭК типа I. В самом деле, в силу (2.6) и (2.9) ненулевая БЭК влечёт ненулевую оБЭК: $\rho_{\text{гBEC}}(\beta, \rho) > 0$. Обозначим эту связь как

$$\text{BEC} \implies \text{гBEC}. \quad (2.10)$$

Кроме того, соотношения (2.6) и (2.9) дают $\rho_0(\beta, \rho) = \rho_{\text{гBEC}}(\beta, \rho)$.

Напомним также, что $\text{BEC} \Rightarrow \text{ODLRO}$, где $\text{ODLRO}^{1)}$ означает внедиагональный дальний порядок (ВДДП) бозонного поля

$$b(x) = \sum_{k \in \Lambda^*} b_k \varphi_k^{\Lambda}(x). \quad (2.11)$$

¹⁾Off-diagonal long range order.

Действительно, по определению ВДП [12] величина внедиагональной пространственной корреляции $\text{LRO}(\beta, \rho)$ задаётся как

$$\begin{aligned} \text{LRO}(\beta, \rho) &= \lim_{\|x-y\| \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}, \Lambda}^0(b^*(x)b(y)) = \\ &= \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}, \Lambda}^0\left(\frac{b_0^*}{\sqrt{V}} \frac{b_0}{\sqrt{V}}\right) = \rho_0(\beta, \rho) \end{aligned} \quad (2.12)$$

и совпадает с корреляцией пространственных средних для нулевой моды локальных наблюдаемых (2.11). Напомним, что пространственное среднее $\eta_{\Lambda, p}(b)$ для p -й моды поля (2.11) равно

$$\eta_{\Lambda, p}(b) := \frac{1}{V} \int_{\Lambda} dx b(x) e^{-ipx} = \frac{b_p}{\sqrt{V}}, \quad p \in \Lambda^*. \quad (2.13)$$

Известно, что для идеального бозе-газа величина $\text{LRO}(\beta, \rho)$ совпадает с плотностью конденсата $\rho_0(\beta, \rho)$ при БЭК (и, следовательно, также с оБЭК типа I) [7].

Чтобы оценить важность оБЭК по сравнению с квазисредними, изучим более анизотропный термодинамический предел в случае $\alpha_1 = 1/2$, известном как ящик Казимира. В этом случае наблюдается бесконечно много макроскопически занятых состояний. Это называется оБЭК типа II, и она определяется формулой (2.9). Полная плотность $\rho_0(\beta, \rho)$ конденсата в асимптотике распределяется между бесконечно многими низкоэнергетическими состояниями $\{\varphi_k^{\Lambda}\}_{k \in \Lambda^*}$ так, что

$$\begin{aligned} \rho_0(\beta, \rho) &= \rho - \rho_c(\beta) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*: \|k\| \leq \delta} \{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu_{\Lambda}(\beta, \rho))} - 1\}^{-1} = \\ &= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi n_1)^2/2 + A}, \quad \rho > \rho_c(\beta). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь параметр $A = A(\beta, \rho) \geq 0$ есть единственный корень уравнения (2.14). Тогда величина конденсата для нулевой моды равна

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}, \Lambda}^0(b_0^* b_0) = A^{-1}(\beta, \rho).$$

Заметим, что, в отличие от БЭК типа I (2.6), величина $A^{-1}(\beta, \rho)$ для нулевой моды БЭК типа II меньше, чем (2.6). Следовательно, связь между БЭК и оБЭК нетривиальна.

Чтобы прояснить это момент, рассмотрим случай $\alpha_1 > 1/2$ (так называемый ящик ван ден Берга–Льюиса–Пуле [7]). В этом случае мы получаем

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}, \Lambda}^0\left(\frac{b_k^* b_k}{V}\right) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu_{\Lambda}(\beta, \rho))} - 1\}^{-1} = 0, \quad k \in \Lambda^*, \quad (2.15)$$

т.е. для любой моды $k \in \Lambda^*$ не существует макроскопически занятых состояний при любом значении ρ плотности частиц. Поэтому плотность БЭК нулевой моды равна нулю, но ненулевая оБЭК (так называемая конденсация типа III) существует в смысле формулы (2.9):

$$\rho - \rho_c(\beta) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*: \|k\| \leq \delta} \{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu_{\Lambda}(\beta, \rho))} - 1\}^{-1} > 0, \quad \rho > \rho_c(\beta), \quad (2.16)$$

где полная плотность конденсата такая же, как для типов I и II.

Заметим, что даже для идеального бозе-газа вычисление ВДДП для типов II и III является нетривиальной задачей. Это, в частности, касается режима, когда существует вторая критическая плотность $\rho_m(\beta) > \rho_c(\beta)$, которая разделяет различные типы оБЭК (см. работы [13] и [8]). Также понятно, что концепция БЭК только нулевой моды более ограничена, чем оБЭК.

Тот факт, что оБЭК отличается от БЭК, необязательно имеет причиной особую анизотропию ($\alpha_1 > 1/2$) или какую-либо другую геометрическую особенность идеального бозе-газа [8]. Фактически явление оБЭК типа III имеет место из-за отталкивающего взаимодействия. Простым примером является гамильтониан [14]

$$H_\Lambda = \sum_{k \in \Lambda^*} \varepsilon_k b_k^* b_k + \frac{a}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*} b_k^* b_k^* b_k b_k, \quad a > 0. \quad (2.17)$$

Подводя итог, отметим, что оБЭК (2.9) охватывает случаи (например, (2.17)), когда вычисление обычной БЭК даёт тривиальный результат: оБЭК не влечёт БЭК (см. (2.10)). Также можно сделать вывод, что связи между БЭК, оБЭК и ВДДП очень тонкие. Это мотивирует и подтверждает актуальность использования метода квазисредних Боголюбова [4], [5], который мы рассматриваем также в связи со СНС калибровочной инвариантности гиббсовских состояний (далее мы называем такое СНС как НКС).

2.2. Конденсаты, квазисредние Боголюбова и чистые состояния. Теперь изучим состояния системы бозонов и в связи с этим предположим (см. монографию [12], раздел 4.3.2), что они являются аналитическими в смысле определения из книги [15] (см. раздел 5.2.3).

Мы начинаем с гамильтониана с периодическими граничными условиями для системы бозонов в кубической области $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ с ребром L и объёмом $V = L^3$:

$$H_{\Lambda, \mu} = H_{0, \Lambda, \mu} + V_\Lambda, \quad (2.18)$$

где член взаимодействия имеет вид

$$V_\Lambda = \frac{1}{2V} \sum_{k, p, q \in \Lambda^*} \nu(p) b_{k+p}^* b_{q-p}^* b_q b_k, \quad (2.19)$$

а $\nu(p)$ – фурье-образ в $\mathbb{R}^3$ потенциала двух тел $v(x)$, который удовлетворяет ограничению

$$|\nu(k)| \leq \nu(0) < \infty. \quad (2.20)$$

Определим группу G (глобальных) калибровочных преобразований $\{\tau_s\}_{s \in [0, 2\pi]}$ с помощью канонического отображения Боголюбова для ККС:

$$\tau_s(b^*(f)) = b^*(e^{is}f) = e^{is}b^*(f), \quad \tau_s(b(f)) = b(e^{is}f) = e^{-is}b(f), \quad (2.21)$$

где $b^*(f)$ и $b(f)$ – операторы рождения и уничтожения, действующие на тестовую функцию f из пространства Шварца. Заметим, что для $f = \varphi_k^\Lambda$ они совпадают с операторами b_k^* , b_k из (2.11), а $\tau_s(\bullet) = e^{isN_\Lambda}(\bullet)e^{-isN_\Lambda}$ (см. (2.1)). В соответствии с определением (2.21) и с учётом соотношений (2.1), (2.19) гамильтониан (2.18) калибровочно инвариантен:

$$H_{\Lambda, \mu} = e^{isN_\Lambda} H_{\Lambda, \mu} e^{-isN_\Lambda}. \quad (2.22)$$

Заметим, что данное свойство влечёт калибровочную инвариантность гиббсовского состояния (2.3) в случае гамильтониана (2.18) для неидеального бозе-газа:

$$\omega_{\beta,\mu,\Lambda}(\cdot) = \omega_{\beta,\mu,\Lambda}(\tau_s(\cdot)) = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda}(\exp(-\beta H_{\Lambda,\mu})\tau_s(\cdot))}{\text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda} \exp(-\beta H_{\Lambda,\mu})}. \quad (2.23)$$

Эта симметрия приводит к правилам отбора. Например,

$$\omega_{\beta,\mu,\Lambda}(A_{n,m}) = 0 \quad \text{при} \quad A_{n,m} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m b_{k_i}^* b_{k_j}, \quad n \neq m. \quad (2.24)$$

Квазигамильтониан, отвечающий (2.18), с источниками НКС возьмём в виде

$$H_{\Lambda,\mu,\lambda_\phi} = H_{\Lambda,\mu} + H_{\Lambda}^{\lambda_\phi}. \quad (2.25)$$

Здесь источники включаются только в нулевой моде ($k = 0$):

$$H_{\Lambda}^{\lambda_\phi} = \sqrt{V}(\bar{\lambda}_\phi b_0 + \lambda_\phi b_0^*) \quad (2.26)$$

при

$$\lambda_\phi = \lambda e^{i\phi}, \quad \lambda \geq 0, \quad \arctg \lambda_\phi = \phi \in [0, 2\pi). \quad (2.27)$$

В этом случае соответствующее гиббсовское состояние – это не калибровочно-инвариантное состояние (2.24), поскольку, например,

$$\omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda_\phi}(b_k) = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda}(\exp(-\beta H_{\Lambda,\mu,\lambda_\phi})b_k)}{\text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda} \exp(-\beta H_{\Lambda,\mu,\lambda_\phi})} \neq 0 \quad \text{при} \quad k = 0. \quad (2.28)$$

Для $\omega_{\beta,\mu,\lambda_\phi}(\cdot) := \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda_\phi}(\cdot)$ НКС состояния (2.28), вызванное источниками в (2.25), сохраняется в термодинамическом пределе. Но оно также может произойти в этом пределе спонтанно, без всяких внешних источников. Введём обозначение

$$\omega_{\beta,\mu}(\cdot) := \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda_\phi}(\cdot) \Big|_{\lambda_\phi=0}. \quad (2.29)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что состояние $\omega_{\beta,\mu}$ испытывает спонтанное нарушение G -инвариантности (*спонтанное НКС*), если:

- 1) $\omega_{\beta,\mu}$ является G -инвариантным,
- 2) $\omega_{\beta,\mu}$ нетривиальным образом разлагается на неэргодические состояния $\omega'_{\beta,\mu}$, другими словами, по меньшей мере два различных состояния присутствуют в разложении

$$\omega_{\beta,\mu}(\cdot) = \int_0^{2\pi} d\nu(s) \omega'_{\beta,\mu}(\tau_s \cdot)$$

и $\omega'_{\beta,\mu}(\tau_s \cdot) \neq \omega'_{\beta,\mu}(\cdot)$ при некотором s .

Заметим, что эргодические состояния характеризуются свойством кластеризации, из которого следует некоррелированность пространственных средних (2.13) для нулевой моды идеального бозе-газа, а также, вообще говоря, и неидеального бозе-газа.

Сначала возьмём $\lambda \geq 0$ и рассмотрим идеальный бозе-газ с гамильтонианом (2.1); определим гамильтониан

$$H_{0,\Lambda,\mu,\lambda_\phi} = H_{0,\Lambda,\mu} + H_{\Lambda}^{\lambda_\phi}, \quad (2.30)$$

который не является глобально калибровочно-инвариантным. Чтобы выделить нарушающую симметрию слагаемое H_0 , перепишем (2.30) как $H_{0,\Lambda,\mu,\lambda_\phi} = H_0 + H_k$ (с $k \neq 0$), где

$$H_0 = -\mu b_0^* b_0 + \sqrt{V}(\bar{\lambda}_\phi b_0 + \lambda_\phi b_0^*) = -\mu \left(b_0 - \frac{\sqrt{V}\lambda_\phi}{\mu} \right)^* \left(b_0 - \frac{\sqrt{V}\lambda_\phi}{\mu} \right) + \frac{V|\lambda_\phi|^2}{\mu}.$$

Напомним, что для идеального бозе-газа большая каноническая статистическая сумма $\Xi_{0,\Lambda}$ расщепляется на произведение по нулевой и остальным модам. Введём каноническое преобразование сдвига

$$\hat{b}_0 := b_0 - \frac{\lambda_\phi \sqrt{V}}{\mu}, \quad (2.31)$$

не меняя при этом ненулевые моды. Поскольку $\mu < 0$, мы получаем большую каноническую статистическую сумму в виде

$$\Xi_{0,\Lambda}(\beta, \mu, \lambda_\phi) = (1 - e^{\beta\mu})^{-1} \exp\left(-\frac{\beta|\lambda_\phi|^2}{\mu} V\right) \Xi'_{0,\Lambda}(\beta, \mu), \quad (2.32)$$

где

$$\Xi'_{0,\Lambda}(\beta, \mu) := \prod_{k \neq 0} (1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)})^{-1}, \quad \epsilon_k = k^2. \quad (2.33)$$

Напомним, что состояние из большого канонического ансамбля идеального бозе-газа записывается как (см. п. 2.1)

$$\omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda_\phi}^0(\cdot) := \frac{1}{\Xi_{0,\Lambda}(\beta, \mu, \lambda_\phi)} \text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda} [e^{-\beta H_{0,\Lambda,\mu,\lambda_\phi}}(\cdot)]. \quad (2.34)$$

Из соотношений (2.32)–(2.34) вытекает, что средняя плотность равна

$$\rho = \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda_\phi}^0\left(\frac{N_\Lambda}{V}\right) = \frac{|\lambda_\phi|^2}{\mu^2} + \frac{1}{V} \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \frac{1}{V} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (2.35)$$

Выражение (2.35) – стартовая точка нашего анализа. Поскольку критическая плотность $\rho_c(\beta) = \mathcal{I}(\beta, \mu)|_{\mu=0}$ конечна, мы имеем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $0 < \beta < \infty$ фиксировано. Тогда для любых значений $\rho_c(\beta) < \rho < \infty$ и всех $\lambda > 0$, $V < \infty$ существует единственное решение уравнения (2.35), имеющее вид

$$\mu_\Lambda(\rho, |\lambda_\phi|) = -\frac{|\lambda_\phi|}{\sqrt{\rho - \rho_c(\beta)}} + \alpha(|\lambda_\phi|, V), \quad (2.36)$$

где $\alpha(|\lambda_\phi|, V) \geq 0$ для любых $|\lambda_\phi|$ и V и

$$\lim_{|\lambda_\phi| \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\alpha(|\lambda_\phi|, V)}{|\lambda_\phi|} = 0. \quad (2.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно и вытекает из формулы (2.35).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Предложение 2.1 справедливо не только в кубе Λ , но и в трёхмерном анизотропном параллелепипеде $\Lambda := V^{\alpha_1} \times V^{\alpha_2} \times V^{\alpha_3}$ с периодическими граничными условиями и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, т.е. и тогда, когда при $\lambda = 0$ мы имеем конденсацию типа II или III.

Поскольку $|\lambda_\phi|^2 = \lambda_\phi \bar{\lambda}_\phi = \lambda^2$, мы получаем, что предел математического ожидания связан с производной давления в большом каноническом ансамбле по источникам нарушения симметрии (2.25):

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \lambda_\phi} p_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda_\phi} = - \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda_\phi}^0 \left(\frac{b_0^*}{\sqrt{V}} \right); \quad (2.38)$$

здесь

$$p_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda_\phi} := \frac{1}{\beta V} \ln \Xi_{0, \Lambda}(\beta, \mu, \lambda_\phi). \quad (2.39)$$

Напомним, что левая часть равенства (2.38) фактически представляет собой квазисреднее Боголюбова оператора наблюдаемой $b_0^*/\sqrt{V}$.

С помощью соотношений (2.33) и (2.39) мы получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_\phi} p_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda_\phi} = - \frac{\bar{\lambda}_\phi}{\mu}. \quad (2.40)$$

Для заданного ρ асимптотика химического потенциала задаётся формулой (2.36), отсюда с учётом (2.38) и (2.40) мы имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda_\phi}^0 \left(\frac{b_0^*}{\sqrt{V}} \right) = \sqrt{\rho_0(\beta, \rho)} e^{-i\phi}, \quad (2.41)$$

где в соответствии с (2.35) и (2.40)

$$\rho_0(\beta, \rho) = \rho - \rho_c(\beta, \rho)$$

есть конденсация идеального бозе-газа для нулевой моды. Таким образом, мы видим, что фаза в (2.38) сохраняется в (2.41) даже после перехода к пределу $\lambda \rightarrow +0$.

В работе [6] было предложено следующее определение, при этом использовался более общий метод исследования неидеального бозе-газа (см. ниже).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем говорить, что состояние $\omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda_\phi}$ испытывает спонтанное НКС в смысле квазисредних Боголюбова ((GSB)_{q-a}), если предельное состояние (2.29) остаётся калибровочно-инвариантным, в то время как состояние

$$\omega_{\beta, \mu, \phi}(\bullet) := \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda_\phi}(\bullet) \quad (2.42)$$

не является калибровочно-инвариантным, и при этом $\omega_{\beta, \mu, \phi} \neq \omega_{\beta, \mu, \phi'}$ при $\phi \neq \phi'$.

Отметим, что НКС в смысле квазисредних Боголюбова эквивалентно НКС в смысле определения 2.2, где эргодические состояния $\omega'_{\beta, \mu}$ из второго пункта определения совпадают с $\omega_{\beta, \mu, \phi}$ в (2.42) (см. теорему 2.1 ниже). Однако понятие НКС в смысле квазисредних Боголюбова полезно при сравнении с результатами работы [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Используя выражение (2.35) вместе с предложением 2.1 и соотношением (2.41), мы получаем

$$\begin{aligned}\rho_0(\beta, \rho) &= \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda \phi}^0 \left(\frac{b_0^*}{\sqrt{V}} \frac{b_0}{\sqrt{V}} \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda \phi}^0 \left(\frac{b_0^*}{\sqrt{V}} \right) \cdot \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda \phi}^0 \left(\frac{b_0}{\sqrt{V}} \right).\end{aligned}\quad (2.43)$$

Кроме некоррелированности заданных в формуле (2.13) пространственных средних $\eta_{\Lambda, 0}(b^*) = b_0^*/\sqrt{V}$ и $\eta_{\Lambda, 0}(b) = b_0/\sqrt{V}$ нулевой моды, для квазисредних Боголюбова формула (2.43) также устанавливает тождественность конденсации $\rho_0(\beta, \rho)$ для нулевой моды и величины $\text{LRO}(\beta, \rho)$ из (2.12), которую мы в этом случае будем обозначать как $(\text{ODLRO})_{\text{q-а}}$. Некоррелированность в правой части равенства (2.43) показывает, что в присутствии конденсата для квазисредних Боголюбова имеет место нетривиальное НКС в смысле определения 2.3 (см. также соотношение (2.41)).

Замечания 2.1 и 2.2 приводят нас к следующему определению квазисредних состояний идеального бозе-газа:

$$\omega_{\beta, \mu, \phi}^0 := \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda \phi}^0, \quad (2.44)$$

где двойной предел при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^3$ существует в силу *-слабой компактности множества состояний [2]. Далее мы используем обозначение ω для гиббсовского состояния в общем случае (2.18)–(2.20) и сохраняем обозначение ω^0 для случая идеального бозе-газа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Напомним, БЭК нулевой моды в бозе-газе происходит, если

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \omega_{\beta, \mu, \Lambda}(b_0^* b_0) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V^2} \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} dx dy \omega_{\beta, \mu, \Lambda}(b^*(x) b(y)) > 0. \quad (2.45)$$

В то же время это означает нетривиальность корреляции (2.12) пространственных средних нулевой моды (2.13),

$$\lim_{\|x-y\| \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda}(b^*(x) b(y)) > 0, \quad (2.46)$$

что мы и будем называть *ВДДП* в общем случае.

Как было показано в п. 2.1, даже для идеального бозе-газа данное определение является слишком ограничительным, поскольку левая часть равенства (2.45) может быть равна нулю, но при этом конденсация происходит вследствие конечности плотности $\rho_c(\beta, \mu)$. Мы говорим, что в бозе-газе происходит оБЭК (см. определение 2.1), если

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*: \|k\| \leq \delta} \omega_{\beta, \mu, \Lambda}(b_k^* b_k) = \rho - \rho_c(\beta, \mu) > 0. \quad (2.47)$$

Чтобы провести классификацию различных типов оБЭК, нужно рассмотреть значение предела

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \omega_{\beta, \mu, \Lambda}(b_k^* b_k) =: \rho_k, \quad k \in \Lambda^*. \quad (2.48)$$

Тогда в силу рассуждений из п. 2.1 $\rho_0 = \rho - \rho_c$ для ОБЭК типа I и $\rho_0 < \rho - \rho_c$ для ОБЭК типа II. Если существует множество нулевых $\{\rho_k\}_{k \in \Lambda^*}$ и нетривиальный предел (2.47), то происходит ОБЭК типа III, т. е. когда конденсат равен нулю и в нулевой моде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Мы говорим, что в бозе-газе происходит *БЭК типа квазисреднего Боголюбова* ((BEC)_{q-a}), если

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda, \phi} \left(\frac{b_0^*}{\sqrt{V}} \frac{b_0}{\sqrt{V}} \right) > 0. \quad (2.49)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Во-первых, факты, отмеченные в замечании 2.2, не зависят от анизотропии, т. е. от того, происходит ли конденсация при $\lambda = 0$ в единственной моде $k = 0$ (БЭК) либо она расширяется на большее число мод вплоть до ОБЭК типа II или III (см. п. 2.1). Конденсат типа I в моде $k = 0$ имеет место вследствие особого свойства гамильтониана (2.2), из которого следует, что $\varepsilon_k = 0$ при $k = 0$.

Во-вторых, для идеального газа эти результаты показывают, что метод квазисредних Боголюбова даёт ответ на вопрос об эквивалентности БЭК, НКС и ВДП, если они определены через одномодовое квазисреднее для $k = 0$:

$$(\text{BEC})_{q-a} \iff (\text{GSB})_{q-a} \iff (\text{ODLRO})_{q-a} \quad (2.50)$$

(здесь $\iff$ означает, что следствие справедливо в обе стороны).

Квазисреднее при $k \neq 0$, т. е. при $\varepsilon_k > 0$, требует определённых пояснений. Для этого мы рассмотрим вновь идеальный бозе-газ (2.1) с нарушающими симметрию источниками (2.26) в единственной моде $q \in \Lambda^*$, в общем случае не совпадающей с нулевой:

$$H_\Lambda^0(\mu; h) := H_\Lambda^0(\mu) + \sqrt{V}(\bar{h}b_q + hb_q^*), \quad \mu \leq 0. \quad (2.51)$$

Тогда для фиксированной плотности ρ уравнение (2.4) для конденсата в большом каноническом ансамбле с гамильтонианом (2.51) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\Lambda(\beta, \mu, h) := \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, h}^0(b_k^* b_k) = \\ &= \frac{1}{V} (e^{\beta(\varepsilon_q - \mu)} - 1)^{-1} + \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus q} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} + \frac{|h|^2}{(\varepsilon_q - \mu)^2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

В соответствии с методом квазисредних, чтобы исследовать возможность конденсации, необходимо прежде всего взять термодинамический предел в правой части равенства (2.52), а затем отключить нарушающие симметрию источники, взяв предел $h \rightarrow 0$. Напомним, что критическая плотность, которая определяет порог насыщения в бозонной системе, равна $\rho_c(\beta) = \mathcal{I}(\beta, \mu)|_{\mu=0}$ (см. формулу (2.5)), где $\mathcal{I}(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} \rho_\Lambda(\beta, \mu, h)|_{h=0}$.

Поскольку $\mu \leq 0$, мы должны различать два случая.

1. Пусть мода $q \in \Lambda^*$ такова, что $\lim_{\Lambda} \varepsilon_q > 0$. Тогда из соотношения (2.52) для простейшего, нарушающего калибровочную симметрию, q -модового математического ожидания мы получаем

$$\rho = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \rho_\Lambda(\beta, \mu, h) = \mathcal{I}(\beta, \mu), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q^*}{\sqrt{V}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{\varepsilon_q - \mu} = 0.$$

Это означает, что квазисреднее совпадает со средним. Следовательно, мы возвращаемся к анализу уравнения конденсата (2.52) при $h = 0$. Это приводит к решению $\mu_\Lambda(\beta, \rho)$ для случая конечного объёма и, следовательно, ко всем возможным типам конденсации в зависимости от значения α_1 (см. детали в п. 2.1).

2. С другой стороны, если $q \in \Lambda^*$ такова, что $\lim_\Lambda \varepsilon_q = 0$, то термодинамический предел в правой части уравнения конденсата (2.52) и нарушающее калибровочную симметрию q -модовое математическое ожидание дают

$$\rho = \lim_\Lambda \rho_\Lambda(\beta, \mu, h) = \mathcal{I}(\beta, \mu) + \frac{|h|^2}{\mu^2}, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q^*}{\sqrt{V}} \right) = \frac{\bar{h}}{-\mu}. \quad (2.53)$$

Если $\rho \leq \rho_c(\beta)$, то предел решения уравнения (2.53) записывается как

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu(\beta, \rho, h) = \mu_0(\beta, \rho) < 0,$$

где $\mu(\beta, \rho, h) = \lim_\Lambda \mu_\Lambda(\beta, \rho, h) < 0$ есть термодинамический предел решения уравнения (2.52) в случае конечного объёма. Следовательно, конденсация не происходит ни в какой моде и согласно соотношениям (2.53) соответствующее нарушающее калибровочную симметрию q -модовое математическое ожидание при $h \rightarrow 0$ (квазисреднее Боголюбова) опять же равно нулю. Однако если $\rho > \rho_c(\beta)$, то уравнение (2.52) даёт $\lim_{h \rightarrow 0} \mu(\beta, \rho, h) = 0$. Таким образом, с учётом (2.53) мы получаем плотность конденсата и квазисреднее Боголюбова в виде

$$\begin{aligned} \rho_0(\beta) &= \rho - \rho_c(\beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2}{\mu(\beta, \rho, h)^2}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu_\Lambda(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q^*}{\sqrt{V}} \right) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu_\Lambda(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_0^*}{\sqrt{V}} \right) = \sqrt{\rho_0(\beta)} e^{-i \arg h}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Рассмотрим первый случай более детально. Пусть $\lim_\Lambda \varepsilon_q =: \varepsilon_q > 0$. Тогда в силу уравнения (2.52) математическое ожидание плотности частиц для моды q в случае конечного объёма равно

$$\omega_{\beta, \mu, \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q^* b_q}{V} \right) = \frac{1}{V} (e^{\beta(\varepsilon_q - \mu)} - 1)^{-1} + \frac{|h|^2}{(\varepsilon_q - \mu)^2}. \quad (2.55)$$

В одночастичном спектре $\{\varepsilon_k\}_{k \in \Lambda^*}$ все $\varepsilon_k \geq 0$, при этом $\varepsilon_k = 0$ при $k = 0$ (см. (2.2)), поэтому решение уравнения (2.52) единственно и отрицательно: $\mu_\Lambda(\beta, \rho, h) < 0$. Тогда квазисреднее Боголюбова от $b_q^* b_q / V$ для любой плотности частиц $\rho > \rho_c(\beta)$ записывается как

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_\Lambda \omega_{\beta, \mu_\Lambda(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q^* b_q}{V} \right) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_\Lambda \frac{1}{V} (e^{\beta(\varepsilon_q - \mu_\Lambda(\beta, \rho, h))} - 1)^{-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \lim_\Lambda \frac{|h|^2}{(\varepsilon_q - \mu_\Lambda(\beta, \rho, h))^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Теперь уравнение (2.52) и нарушающее калибровочную симметрию q -модовое математическое ожидание принимают вид

$$\rho = \lim_{\Lambda} \rho_{\Lambda}(\beta, \mu, h) = \mathcal{I}(\beta, \mu) + \frac{|h|^2}{(\varepsilon_q - \mu)^2} =: \rho(\beta, \mu, h), \quad (2.57)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q^*}{\sqrt{V}} \right) = \frac{\bar{h}}{\varepsilon_q - \mu}. \quad (2.58)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Гамильтониан (2.51) даёт простейший пример модели конденсации, которая зависит от внешних источников в ненулевой моде. В самом деле, для идеального бозе-газа с одночастичным спектром (2.2) решение $\mu(\beta, \rho, h)$ уравнения конденсата (2.57) удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_c(\beta, h)} \mu(\beta, \rho, h) = 0, \quad \rho_c(\beta, h) := \sup_{\mu \leq 0} \rho(\beta, \mu, h) = \rho(\beta, \mu, h)|_{\mu=0} > \rho_c(\beta).$$

Поскольку $\varepsilon_q > 0$ и $\varepsilon_0 = 0$, конечная плотность насыщения $\rho_c(\beta, h)$ запускает механизм БЭК в нулевой моде идеального бозе-газа (2.51), если $\rho > \rho_c(\beta, h)$. В связи с этим мы отмечаем, что из уравнений (2.52), (2.55) и (2.57) получается следующее соотношение:

$$\rho - \rho_c(\beta, h) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0(b_0^* b_0), \quad (2.59)$$

и решение уравнения (2.52) при $V \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$\mu_{\Lambda}(\beta, \rho, h) = -(\rho - \rho_c(\beta, h))V^{-1} + o(V^{-1}).$$

В результате модель (2.51) описывает идеальный бозе-газ со внешними источниками, поведение которого неидентично поведению бозе-газа с $h = 0$ (см. п. 2.1). Это касается, например, более высокой критической плотности (2.57), $\rho(\beta, \mu, h)|_{\mu=0} \geq \rho_c(\beta)$, и ненулевого математического ожидания (2.55) плотности частиц для моды $q \neq 0$.

Подведем итог рассмотрения случая 1. Источники в ненулевой моде для идеального бозе-газа и соответствующие квазисредние Боголюбова дают те же результаты, что и для идеального бозе-газа без внешних источников. Таким образом, в этом случае квазисредние приводят к тем же выводам (и задачам), что и оБЭК из п. 2.1. Если сохранить источники в ненулевой моде, то такая оБЭК имеет критическую плотность, зависящую от источников, как в замечании 2.4.

Рассмотрим теперь случай 2. Прежде всего заметим, что с помощью уравнений (2.52), (2.53) мы заключаем, что $\mu(\beta, \rho, h) < 0$ при $h \neq 0$. Кроме того, при $k \neq q$, даже если $\lim_{\Lambda} \varepsilon_k = 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_k^* b_k}{V} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, h))} - 1} = 0. \quad (2.60)$$

Это означает, что (ВЕС) $_{q-a}$ при любой анизотропии α_1 происходит только в нулевой моде (БЭК типа I), в то время как при $\alpha_1 > 1/2$ оБЭК имеет тип III (см. п. 2.1). Диагонализация (2.31) $b_q \rightarrow \hat{b}_q$ и соотношение (2.54) позволяют применить метод квазисредних для вычисления ненулевого (GSB) $_{q-a}$ при $\rho > \rho_c(\beta)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q}{\sqrt{V}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\mu(\beta, \rho, h)} = e^{i \arg h} \sqrt{\rho - \rho_c(\beta)}, \quad (2.61)$$

где предел понимается в смысле $|h| \rightarrow 0$ для $h = |h|e^{i \arg h}$. Тогда, анализируя пределы (2.56) и (2.61), мы находим, что $(\text{GSB})_{\text{q-a}}$ и $(\text{BEC})_{\text{q-a}}$ эквивалентны:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q^*}{\sqrt{V}} \right) \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q}{\sqrt{V}} \right) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, h), \Lambda, h}^0 \left(\frac{b_q^* b_q}{V} \right) = \rho - \rho_c(\beta). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Заметим, что, в свою очередь, $(\text{GSB})_{\text{q-a}}$ и $(\text{BEC})_{\text{q-a}}$ эквивалентны $(\text{ODLRO})_{\text{q-a}}$ в силу уравнения (2.12). При этом в отличие от $(\text{BEC})_{\text{q-a}}$ для БЭК одной моды мы получаем, что

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, 0), \Lambda, 0}^0 \left(\frac{b_q^* b_q}{V} \right) = \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}^0(\beta, \rho, 0), \Lambda, 0} \left(\frac{b_q^*}{\sqrt{V}} \right) \omega_{\beta, \mu_{\Lambda}(\beta, \rho, 0), \Lambda, 0}^0 \left(\frac{b_q}{\sqrt{V}} \right) = 0$$

при любых ρ и $q \in \Lambda^*$, как только $\alpha_1 > 1/2$ (см. п. 2.1). С другой стороны, величина gBEC совпадает с $(\text{BEC})_{\text{q-a}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Для нулевой моды обычная БЭК и квазисредняя $(\text{BEC})_{\text{q-a}}$ в идеальном бозе-газе неэквивалентны: $(\text{BEC})_{\text{q-a}} \not\Rightarrow \text{BEC}$, в то же время $(\text{BEC})_{\text{q-a}} \iff \text{gBEC}$. Эта эквивалентность вместе с эквивалентностью (2.50) показывает, что метод квазисредних Боголюбова определено применим для идеального бозе-газа.

Соотношения (2.41), (2.44) указывают на то, что состояния $\omega_{\beta, \mu, \phi}$ не являются калибровочно-инвариантными. Если мы предположим, что они являются эргодическими состояниями в эргодическом разложении для $\omega_{\beta, \mu}$, то отсюда будет следовать эквивалентность $(\text{BEC})_{\text{q-a}} \iff (\text{GSB})_{\text{q-a}}$ для бозе-газа со взаимодействием, что сходно с эквивалентностью для идеального бозе-газа. Это проливает свет на явный механизм возникновения нарушающей симметрию фазы ϕ , что связано с формулой (2.36) для идеального бозе-газа из предложения 2.1. Заметим, что в этом случае химический потенциал остаётся пропорциональным $|\lambda|$ даже после взятия термодинамического предела (2.40). Данное свойство имеет место также для бозе-газа со взаимодействием (см. следующий пункт).

2.3. Взаимодействие, квазисредние и приближение Боголюбова. Рассмотрим неидеальный бозе-газ (2.18)–(2.20) со взаимодействием. Нашим инструментом будет знаменитое приближение Боголюбова [4], согласно которому $\eta_{\Lambda, 0}(b)$ и $\eta_{\Lambda, 0}(b^*)$, заданные формулой (2.13), заменяются комплексными числами (см. также [14], [16], [17]). Законность такой процедуры была показана Жинибром [18] на уровне термодинамики, а позже Либ, Зайрингер и Ингвасон [19], [6] и независимо от них Сюто [20] улучшили результаты работы [18] и оценили точность приближения Боголюбова. В нашем анализе мы воспроизводим метод работы [6], в котором используется неравенство Березина–Либа [21].

Напомним, что пространство Фока $\mathcal{F}_{\Lambda} \simeq \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}'$, где через $\mathcal{F}_0$ обозначено подпространство нулевой моды, а $\mathcal{F}' := \otimes \mathcal{F}_k$ с $k \neq 0$ (см. п. 2.1).

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $|z\rangle = e^{-|z|^2/2 + z b_0^*} |0\rangle$ – глауберов когерентный вектор в $\mathcal{F}_0$. Как и в работе [6], обозначим через $(H_{\Lambda, \mu, \lambda})'(z)$ нижний символ оператора $H_{\Lambda, \mu, \lambda}$ (2.25). Тогда соответствующее этому символу давление $p'_{\beta, \Lambda, \mu, \lambda}$ определяется формулой

$$\exp(\beta V p'_{\beta, \Lambda, \mu, \lambda}) = \Xi_{\Lambda}(\beta, \mu, \lambda)' = \int_{\mathbb{C}} d^2 z \, \text{Tr}_{\mathcal{F}'} \exp(-\beta (H_{\Lambda, \mu, \lambda})'(z)). \quad (2.63)$$

Рассмотрим плотность вероятности

$$\mathcal{W}_{\mu,\Lambda,\lambda}(z) := \Xi_{\Lambda}(\beta, \mu, \lambda)^{-1} \text{Tr}_{\mathcal{F}'} \langle z | \exp(-\beta H_{\Lambda,\mu,\lambda}) | z \rangle. \quad (2.64)$$

Как показано в работе [6], для почти всех $\lambda > 0$ плотность $\mathcal{W}_{\mu,\Lambda,\lambda}(\zeta\sqrt{V})$ сходится при $V \rightarrow \infty$ к дельта-функции в точке

$$\zeta_{\max}(\lambda) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{z_{\max}(\lambda)}{\sqrt{V}},$$

где $z_{\max}(\lambda)$ – точка максимума статистической суммы $\text{Tr}_{\mathcal{F}'} \exp(-\beta(H_{\Lambda,\mu,\lambda})'(z))$. Хотя в работе [6] в (2.27) было взято $\phi = 0$, результат для общего случая можно получить с помощью простейшей подстановки $b_0 \rightarrow b_0 e^{-i\phi}$, $b_0^* \rightarrow b_0^* e^{i\phi}$, мотивированной формулой (2.25). Заметим, что выражение (34) из [6] при этом переписывается как

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}(\eta_{\Lambda,0}(b^* e^{i\phi})) &= \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}(\eta_{\Lambda,0}(b e^{-i\phi})) = \\ &= \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda)}{\partial \lambda} = \zeta_{\max}(\lambda), \end{aligned} \quad (2.65)$$

что даёт, см. определение (2.13),

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}(\eta_{\Lambda,0}(b^*) \eta_{\Lambda,0}(b)) = |\zeta_{\max}(\lambda)|^2. \quad (2.66)$$

Здесь мы обозначили через

$$p(\beta, \mu, \lambda) = \lim_{V \rightarrow \infty} p_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda} \quad (2.67)$$

давление в большом каноническом ансамбле неидеального бозе-газа (2.18)–(2.20) в термодинамическом пределе. Равенство (2.65) вытекает из выпуклости функции $p_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}$ по $\lambda = |\lambda_{\phi}|$ в силу леммы Гриффитса [22]. В работе [6] было показано, что давление равно

$$p(\beta, \mu, \lambda)' = \lim_{V \rightarrow \infty} p'_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}. \quad (2.68)$$

Кроме того, $p(\beta, \mu, \lambda)$ (2.67) также равно давлению $p(\beta, \mu, \lambda)''$, которое в термодинамическом пределе ассоциировано с верхним символом оператора $H_{\Lambda,\mu,\lambda}$. Ключевым моментом [6] является доказательство того, что эти три давления p' , p , p'' совпадают с давлением $p_{\max}(\beta, \mu, \lambda)$, ассоциированным с $\max_z \text{Tr}_{\mathcal{F}'} \exp(-\beta(H_{\Lambda,\mu,\lambda})'(z))$:

$$p_{\max}(\beta, \mu, \lambda) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta V} \ln \{ \max_z \text{Tr}_{\mathcal{F}'} \exp(-\beta(H_{\Lambda,\mu,\lambda})'(z)) \}. \quad (2.69)$$

Теперь мы готовы доказать основной результат настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если в системе взаимодействующих бозонов, заданной соотношениями (2.18)–(2.27), наблюдается (ODLRO)_{q-a} или (BEC)_{q-a}, то предел*

$$\omega_{\beta,\mu,\phi} := \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda_{\phi}}$$

на множестве мономов $\{\eta_0(b^*)^m \eta_0(b)^n\}_{m,n \in \mathbb{N} \cup 0}$ существует и удовлетворяет равенствам

$$\omega_{\beta,\mu,\phi}(\eta_0(b^*)) = \sqrt{\rho_0} e^{i\phi}, \quad (2.70)$$

$$\omega_{\beta,\mu,\phi}(\eta_0(b)) = \sqrt{\rho_0} e^{-i\phi}, \quad (2.71)$$

а также имеет место (GSB)_{q-a},

$$\omega_{\beta,\mu,\phi}(\eta_0(b^*)\eta_0(b)) = \omega_{\beta,\mu,\phi}(\eta_0(b^*))\omega_{\beta,\mu,\phi}(\eta_0(b)) = \rho_0, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad (2.72)$$

при этом

$$\omega_{\beta,\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \omega_{\beta,\mu,\phi}. \quad (2.73)$$

В алгебре Вейля предел, который определяет $\omega_{\beta,\mu,\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, существует по направленностям переменных (λ, V) . Соответствующие состояния являются эргодическими и совпадают с состояниями, полученными в предложении П.1.

Наоборот, если (GSB)_{q-a} существует в том смысле, что при $\rho_0 \neq 0$ выполнены соотношения (2.70), (2.71), то имеет место (ODLRO)_{q-a} и (BEC)_{q-a}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только прямое утверждение, обратное следует из неравенства Шварца для состояний $\omega_{\beta,\mu,\phi}$ вместе с формулой (2.80), приведенной ниже.

Покажем, что (ODLRO)_{q-a} $\implies$ (GSB)_{q-a}. Сначала предположим, что некоторое состояние $\omega_{\beta,\mu,\phi_0}$, $\phi_0 \in [0, 2\pi)$, удовлетворяет (ODLRO)_{q-a}. Тогда в силу (2.66)

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}(\eta_{\Lambda,0}(b^*)\eta_{\Lambda,0}(b)) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} |\zeta_{\max}(\lambda)|^2 =: \rho_0 > 0. \quad (2.74)$$

Предел существует вследствие выпуклости функции $p(\beta, \mu, \lambda)$ по λ и соотношения (2.38). Отсюда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda)}{\partial \lambda} \neq 0. \quad (2.75)$$

В то же время равенство (2.65) показывает, что все состояния $\omega_{\beta,\mu,\phi}$ удовлетворяют (2.74). Таким образом, (GSB)_{q-a} не происходит в состояниях $\omega_{\beta,\mu,\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Тем самым мы доказали, что предположение (2.45) влечёт, что во всех состояниях $\omega_{\beta,\mu,\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, имеет место (ODLRO)_{q-a}.

Калибровочная инвариантность состояния $\omega_{\beta,\mu,\Lambda}$ (или, эквивалентно, гамильтониана $H_{\Lambda,\mu}$) даёт с учётом (2.26), (2.47), что

$$\omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}(\eta_{\Lambda,0}(b^*)\eta_{\Lambda,0}(b)) = \omega_{\beta,\mu,\Lambda,-\lambda}(\eta_{\Lambda,0}(b^*)\eta_{\Lambda,0}(b)). \quad (2.76)$$

Используя вновь соотношения (2.26), (2.36) и калибровочную инвариантность оператора $H_{\Lambda,\mu}$, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow -0} \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda)}{\partial \lambda} = - \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

Поскольку производная $\partial p(\beta, \mu, \lambda)/\partial \lambda$ выпукла и монотонно возрастает,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda)}{\partial \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \zeta_{\max}(\lambda) = \sqrt{\rho_0}, \quad (2.77)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -0} \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda)}{\partial \lambda} = - \lim_{\lambda \rightarrow +0} \zeta_{\max}(\lambda) = -\sqrt{\rho_0}. \quad (2.78)$$

Опять же при помощи (2.76) получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow -0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}(\eta_{\Lambda,0}(b^*)\eta_{\Lambda,0}(b)) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta,\mu,\Lambda,\lambda}(\eta_{\Lambda,0}(b^*)\eta_{\Lambda,0}(b)). \quad (2.79)$$

Согласно работе [6] носителем плотности $\mathcal{W}_{\mu,\lambda}$ при $\lambda = 0$ является диск с радиусом, равным правой производной (2.75). Из выпуклости давления как функции от λ следует, что для всех $\lambda_0^- < 0 < \lambda_0^+$

$$\frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda_0^-)}{\partial \lambda_0^-} \leq \lim_{\lambda \rightarrow -0} \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda)}{\partial \lambda} \leq \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda)}{\partial \lambda} \leq \frac{\partial p(\beta, \mu, \lambda_0^+)}{\partial \lambda_0^+}.$$

Отсюда по лемме Гриффитса (см., например, [22], [6]) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda}(\eta_{\Lambda, 0}(b^*)\eta_{\Lambda, 0}(b)) &\leq \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda} \left(\frac{b_0^* b_0}{V} \right) \leq \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda}(\eta_{\Lambda, 0}(b^*)\eta_{\Lambda, 0}(b)). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Тогда (2.79) и (2.80) дают

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda} \left(\frac{b_0^* b_0}{V} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda}(\eta_{\Lambda, 0}(b^*)\eta_{\Lambda, 0}(b)), \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (2.81)$$

Это доказывает, что состояния $\omega_{\beta, \mu, \phi}$ при всех $\phi \in [0, 2\pi)$ удовлетворяют условию (ODLRO)_{q-a}, как это и утверждалось.

Из (2.65) и (2.77) получаем равенства (2.70) и (2.71). Тогда соотношения (2.73) являются следствием калибровочной инвариантности состояния $\omega_{\beta, \mu}$. Эргодичность состояний $\omega_{\beta, \mu, \phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, вытекает из (2.70), (2.71) и (2.81) (см. второй пункт определения 2.2).

Можно провести аналогичные построения, используя алгебру Вейля вместо алгебры полиномов (см. книгу [12], раздел 4.3.2, и ссылки в ней для предложения П.1). Предел по направленностям переменных (λ, V) существует в силу *-слабой компактности и асимптотической абелевости алгебры Вейля для пространственных сдвигов (см., например, книгу [15], пример 5.2.19); разложение (2.73) по эргодическим состояниям, которое также является центральным, единственно. Следовательно, состояния $\omega_{\beta, \mu, \phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, совпадают с состояниями, построенными в предложении П.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Наше замечание 2.3 и теорема 2.1 проливают свет на проблему, сформулированную в работе [6], где авторы определили обобщённое НКС через квазисреднее (GSB)_{q-a}, т. е. как условие $\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lim_{V \rightarrow \infty} \omega_{\beta, \mu, \Lambda, \lambda}(\eta_{\Lambda, 0}(b)) \neq 0$. Если это условие относится не к калибровочной группе, мы обозначаем его как (SSB)_{q-a}. Аналогичным образом в указанной работе было модифицировано определение одномодовой конденсации (2.74) (обозначается как (BEC)_{q-a}), и авторы установили эквивалентность (GSB)_{q-a} $\iff$ (BEC)_{q-a}. Также они поставили вопрос: имеет ли место эквивалентность (BEC)_{q-a} $\iff$ BEC?

В теореме 2.1 мы показали, что (GSB)_{q-a} (2.70) влечёт (ODLRO)_{q-a} или (BEC)_{q-a}. Отметим, что для БЭК нулевой моды (см. определение 2.4) аналогичная теорема показывает, что ответ на поставленный вопрос утвердительный. Это вытекает из того решающего факта, что состояние $\omega_{\beta, \mu}$ является калибровочно-инвариантным, и этот факт находится в согласии с разложением (2.73) и приводит к неравенствам (2.80).

С другой стороны, для иных (но тем не менее одинаково важных, как это утверждается в (2.17)) типов конденсации сравнение (с точки зрения следствия $\implies$ или эквивалентности $\iff$) величин, рассчитанных в смысле квазисредних и вне этого

метода, может оказаться неверным. Например, для идеального бозе-газа величина $(\text{BEC})_{\text{q-a}}$ строго больше величины BEC нулевой моды для анизотропии $\alpha_1 \geq 1/2$, и $(\text{BEC})_{\text{q-a}} \not\Rightarrow \text{BEC}$ при $\alpha_1 > 1/2$ (см. п. 2.1). То же самое можно наблюдать и для бозе-газа (2.17) со взаимодействием, хотя в обоих случаях (идеального бозе-газа и модели (2.17)) мы получаем $(\text{BEC})_{\text{q-a}} \Rightarrow \text{gBEC}$ (см. п. 2.2). Таким образом, в общем случае ответ на поставленный выше вопрос отрицательный. Заметим, что, как установлено в теореме 2.1, квазисредние приводят к эргодическим состояниям, и этот факт проясняет важный концептуальный аспект метода квазисредних.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Состояния $\omega_{\beta,\mu,\phi}$ в теореме 2.1 обладают вторым свойством из предложения II.1: если $\phi_1 \neq \phi_2$, то $\omega_{\beta,\mu,\phi_1} \neq \omega_{\beta,\mu,\phi_2}$. По теореме Кадисона [23] два фактор-состояния либо взаимно сингулярны, либо квазиэквивалентны, следовательно, состояния $\omega_{\beta,\mu,\phi}$ при разных ϕ попарно взаимно сингулярны. Такое явление также наблюдается для спонтанной намагниченности в квантовых спиновых системах. Именно в этом смысле необходимо понимать термин “вырожденность” состояний (ср. с обсуждением в монографии [5]).

3. КВАЗИСРЕДНИЕ БОГОЛЮБОВА И КРИТИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ

Цель данного раздела – показать, что масштабированные внешние источники нарушения симметрии могут оказывать нетривиальное воздействие на квантовые флуктуации. Это демонстрирует полезность квазисредних не только при изучении фазовых переходов посредством $(\text{SSB})_{\text{q-a}}$, но также при анализе соответствующих критических, коммутативных и некоммутативных, квантовых флуктуаций. В связи с этим мы используем для иллюстрации пример конкретной модели, в которой возникает фазовый переход с дискретным $(\text{SSB})_{\text{q-a}}$ [24].

3.1. Алгебра флуктуационных операторов. Сначала рассмотрим общие положения, чтобы напомнить концепцию квантовых флуктуаций, основанную на некоммутативной центральной предельной теореме и соответствующих ККС.

Для описания какой-либо квантовой статистической модели (на решётке $\mathbb{Z}^d$) необходимо прежде всего определить микроскопическую динамическую систему, которая представляет собой триплет $(\mathcal{A}, \omega, \alpha_t)$, где:

а) $\mathcal{A} = \cup_{\Lambda} \mathcal{A}_{\Lambda}$ есть квазилокальная алгебра наблюдаемых, здесь Λ – ограниченное подмножество в $\mathbb{Z}^d$ и $[\mathcal{A}_{\Lambda'}, \mathcal{A}_{\Lambda''}] = 0$ при $\Lambda' \cap \Lambda'' = \emptyset$;

б) ω – состояние на $\mathcal{A}$; пусть τ_x – автоморфизм пространственных трансляций на расстояние $x \in \mathbb{Z}^d$, т. е. отображение $\tau_x: \mathcal{A}_{\Lambda} \ni A \rightarrow \tau_x(A) \in \mathcal{A}_{\Lambda+x}$, тогда состояние ω является трансляционно-инвариантным, если $\omega \circ \tau_x(A) \equiv \omega(\tau_x(A)) = \omega(A)$, и пространственно-кластеризующим, если $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \omega(A \tau_x(B)) = \omega(A)\omega(B)$ для $A, B \in \mathcal{A}$;

в) α_t – это динамика, которая описывается семейством локальных гамильтонианов $\{H_{\Lambda}\}_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d}$; обычно α_t определяется как предел по норме локальной динамики: $\alpha_t(A) := \lim_{\Lambda} \exp(itH_{\Lambda})A \exp(-itH_{\Lambda})$, т. е. $\alpha_t: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ есть замыкание $\mathcal{A}$ по норме, для равновесных состояний предполагается, что $\omega \circ \alpha_t = \omega$ (временная инвариантность).

Обычно также предполагается, что пространственные и временные трансляции коммутируют, $\tau_x(\alpha_t(A)) = \alpha_t(\tau_x(A))$, где $A \in \mathcal{A}_{\Lambda}$ и $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$.

Определяя переход от микросистемы $(\mathcal{A}, \omega, \alpha_t)$ к макросистеме физических наблюдаемых, необходимо различать два существенно различных класса макросистем.

Первый класс (макросистема I) соответствует слабому закону больших чисел и хорошо подходит для описания параметров порядка в системе. Формально этот класс наблюдаемых задаётся следующим образом. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ определим среднее по локальному пространству как отображение

$$m_\Lambda: A \rightarrow m_\Lambda(A) := |\Lambda|^{-1} \sum_{x \in \Lambda} \tau_x(A).$$

Тогда предельное отображение $m: A \rightarrow \mathcal{C}$, определяющееся как

$$m(A) = w - \lim_\Lambda m_\Lambda(A), \quad A \in \mathcal{A}, \quad (3.1)$$

существует в ω -слабой топологии, индуцированной эргодическим (см. п. “б” определения) состоянием ω .

Пусть $m(\mathcal{A}) = \{m(A): A \in \mathcal{A}\}$. Тогда макросистема I обладает следующими свойствами.

Иа. Множество $m(\mathcal{A})$ есть множество наблюдаемых на бесконечности, поскольку выполнено равенство $[m(\mathcal{A}), \mathcal{A}] = 0$.

Иб. Множество $m(\mathcal{A})$ – абелева алгебра, и $m(A) = \omega(A) \cdot \mathbb{1}$, следовательно, состояния на $m(\mathcal{A})$ являются вероятностными мерами.

Ив. Поскольку $m(\tau_a(A)) = m(A)$, отображение $m: \mathcal{A} \rightarrow m(\mathcal{A})$ неинъективно, что математически выражает гранулирование под действием слабого закона больших чисел.

Иг. Макродинамика $\tilde{\alpha}_t(m(A)) := m(\alpha_t(A))$ на $m(\mathcal{A})$, индуцированная микродинамикой α_t , очевидна, поскольку $m(\alpha_t(A)) = \omega(\alpha_t(A)) \cdot \mathbb{1} = \omega(A) \cdot \mathbb{1} = m(A)$.

Второй класс макроскопических наблюдаемых (макросистема II) отвечает квантовой центральной предельной теореме и хорошо подходит для описания квантовых флуктуаций, в частности коллективных и элементарных возбуждений (фононов, плазмонов, экситонов и пр.) в квантовых системах многих тел [12].

Построение макросистемы II должно быть более аккуратным. Пусть $A \in \mathcal{A}_{\text{sa}} := \{B \in \mathcal{A}: B = B^*\}$ – множество самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда можно определить локальное отображение $F_{k,\Lambda}^{\delta_A}: A \rightarrow F_{k,\Lambda}^{\delta_A}(A)$ как

$$F_{k,\Lambda}^{\delta_A}(A) := \frac{1}{|\Lambda|^{1/2+\delta_A}} \sum_{x \in \Lambda} (\tau_x(A) - \omega(A)) e^{ikx}, \quad k, \delta_A \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Это есть не что иное, как локальный флуктуационный оператор наблюдаемой A для моды k . Если $\delta_A = 0$, такой флуктуационный оператор называется нормальным.

Следующее важное утверждение было доказано в работах [25]–[27] и получило дальнейшее развитие в [28].

КВАНТОВАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть

$$\gamma_\omega(r) := \sup_{\Lambda, \Lambda'} \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}_\Lambda, \\ B \in \mathcal{A}_{\Lambda'}}} \left\{ \frac{\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)}{\|A\| \|B\|} : r \leq \text{dist}(\Lambda, \Lambda') \right\}, \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \gamma_\omega(|x|) < \infty.$$

Тогда для любого $A \in \mathcal{A}_{sa}$ существует соответствующая предельная характеристическая функция нормального флуктуационного оператора ($\delta_A = 0$) для нулевой моды $k = 0$:

$$\lim_{\Lambda} \omega(e^{iuF_{\Lambda}(A)}) = e^{-u^2 S_{\omega}(A,A)/2}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

где $S_{\omega}(A, B)$ – полубилинейная форма,

$$S_{\omega}(A, B) := \operatorname{Re} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \omega((A - \omega(A)) \tau_x(B - \omega(B))), \quad A, B \in \mathcal{A}_{sa}.$$

Перечислим свойства макросистемы II.

IIa. Результат (3.3) поясняет смысл квантового центрального предела для нормальных флуктуационных операторов. Если предел (3.3) существует при $\delta_{A,B} \neq 0$ и модифицированная полубилинейная форма задаётся как

$$S_{\omega, \delta_{A,B}}(A, B) = \lim_{\Lambda} \operatorname{Re} \frac{1}{|\Lambda|^{\delta_A + \delta_B}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \omega((A - \omega(A)) \tau_x(B - \omega(B))), \quad (3.4)$$

то мы говорим, что для нулевой моды аномальных флуктуаций существует квантовый центральный предел

$$\lim_{\Lambda} F_{\Lambda}^{\delta_A}(A) = F^{\delta_A}(A). \quad (3.5)$$

Флуктуационные операторы $F^{\delta_A}(A)$, $A \in \mathcal{A}_{sa}$, действуют в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, которое определяется соответствующей соотношениям (3.3) и (3.4) теоремой о реконструкции.

IIб. Рассмотрим $\mathcal{A}_{as}$ как векторное пространство с симплектической формой $\sigma_{\omega}(\cdot, \cdot)$, которая корректно и нетривиально определена при $\delta_A + \delta_B = 0$ в силу слабого закона больших чисел:

$$i\sigma_{\omega}(A, B) \cdot \mathbf{1} = \lim_{\Lambda} [F_{\Lambda}^{\delta_A}(A), F_{\Lambda}^{\delta_B}(B)] = 2i \operatorname{Im} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} (\omega(A \tau_y(B)) - \omega(A)\omega(B)). \quad (3.6)$$

Предположим, что $W(\mathcal{A}_{sa}, \sigma_{\omega})$ – алгебра Вейля, т.е. семейство операторов Вейля $W: \mathcal{A}_{sa} \ni A \mapsto W(A)$ таких, что

$$W(A)W(B) = W(A+B)e^{-i\sigma_{\omega}(A,B)/2}, \quad (3.7)$$

где операторы $A, B \in \mathcal{A}_{sa}$ действуют в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

ТЕОРЕМА О РЕКОНСТРУКЦИИ. Пусть $\tilde{\omega}$ – квазисвободное состояние алгебры Вейля $W(\mathcal{A}_{sa}, \sigma_{\omega})$, которое определяется полубилинейной формой $S_{\omega}(\cdot, \cdot)$:

$$\tilde{\omega}(W(A)) := e^{-S_{\omega}(A,A)/2}. \quad (3.8)$$

Из формулы (3.7) следует, что $W(A) := e^{i\Phi(A)}$, где $\Phi: A \mapsto \Phi(A)$ – бозонные полевые операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\tilde{\omega}}$ представлений ККС, отвечающих состоянию $\tilde{\omega}$. Таким образом, соотношения (3.2)–(3.8) определяют пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\tilde{\omega}}$ и операторы

$$\lim_{\Lambda} F_{\Lambda}^{\delta_A}(A) =: F^{\delta_A}(A) = \Phi(A). \quad (3.9)$$

Пв. Теорема о реконструкции задаёт переход от микросистемы $(\mathcal{A}_{\text{sa}}, \omega)$ к макросистеме флуктуационных операторов $(F(\mathcal{A}_{\text{sa}}, \sigma_\omega), \tilde{\omega})$. Заметим, что $F(\mathcal{A}_{\text{sa}}, \sigma_\omega) = \{F^{\delta A}(A)\}_{A \in \mathcal{H}_{\text{sa}}}$ есть алгебра ККС на симплектическом пространстве $(\mathcal{A}_{\text{sa}}, \sigma_\omega)$ (см. соотношения (3.7)–(3.9)).

Пг. Отображение $F: \mathcal{A}_{\text{sa}} \rightarrow F(\mathcal{A}_{\text{sa}}, \sigma_\omega)$ является неинъективным (гранулирующим для нулевой моды). Например, $\tilde{\tau}_x(F(A)) := F(\tau_x(A)) = F(A)$, но описывает нетривиальную макродинамику $\tilde{\alpha}_t(F(A)) := F(\alpha_t(A))$. Следовательно, макросистема Π , которая задана алгеброй флуктуационных операторов, представляет собой триплет $(F(\mathcal{A}_{\text{sa}}, \sigma_\omega), \tilde{\omega}, \tilde{\alpha}_t)$.

Определение алгебры $F(\mathcal{A}_{\text{sa}}, \sigma_\omega)$ флуктуационных операторов для заданной микросистемы $(\mathcal{A}, \omega, \alpha_t)$ с алгеброй ККС для бозонных полевых операторов позволяет математически описать так называемые коллективные возбуждения (фононы, плазмоны, экситоны и пр.) в чистом состоянии ω .

Отклоняясь от темы настоящей работы, отметим, что этот подход также позволяет дать математическое обоснование ещё одной физической идеи – теории линейного отклика [26]. В этом случае понятно, что алгебра флуктуаций более чувствительна к “лёгким” возмущениям микроскопического гамильтониана внешними источниками, чем, например, алгебра на бесконечности $m(\mathcal{A})$. Это свойство становится ещё более значимым, если (чистое) состояние ω принадлежит критической области [24]. Тогда возмущения микроскопического гамильтониана, которые не меняют равновесное состояние ω (“лёгкие” возмущения), могут порождать различные алгебры флуктуаций, не зависящие от квантовой или классической природы микросистемы.

Как мы поняли в п. 2.2, идея о том, что возмущения гамильтониана порождают равновесные состояния, восходит к концепции квазисредних Боголюбова. Этот метод был обобщен на смешанные состояния [29]. Напомним, что его можно сформулировать следующим образом.

Пусть $\{B_l = \tau_l(B)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ – множество операторов, разрушающих симметрию исходной системы, и

$$H_\Lambda(h) := H_\Lambda - \sum_{l \in \Lambda} h_l B_l, \quad h_l \in \mathbb{R}^1.$$

Тогда предельное состояние при $h_l = h$,

$$\langle \cdot \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \langle \cdot \rangle_{\Lambda, h}, \quad (3.10)$$

выделяет чистые состояния в смысле отвечающего симметрии разложения (квазисредние Боголюбова).

Если внешнее поле есть $h = \hat{h}/|\Lambda|^\alpha$, то очевидное обобщение формулы (3.10) даёт либо чистые состояния (при $\alpha < \alpha_c$), либо семейство смешанных состояний, индексированных параметрами $\hat{h}$ и $\alpha \geq \alpha_c$ [29].

В работе [24] показано, что алгебра флуктуаций для квантовой модели ферроэлектрика (структурный фазовый переход) зависит от параметра α , лежащего в критической области (ниже критической линии), даже для чистых состояний, т. е. при $\alpha < \alpha_c = 1$ мы получаем для корреляционных критических показателей (3.2) $\delta_Q = \alpha/2$, в то время как $\delta_P = 0$ (при $T \neq 0$, где T – температура). Здесь $A := Q$ и $B := P$ суть соответственно оператор смещения атома и оператор импульса в узле $l = 0$ решётки $\mathbb{Z}$. Второе наблюдение из работы [24] касается квантовой природы критических флуктуаций $F^\delta(\cdot)$ – флуктуаций в чистом состоянии ω , которые

лежат на критической линии. Было показано, что ожидаемые абелевы свойства критических флуктуаций изменяются на неабелевы коммутационные соотношения между $F^{\delta_Q}(Q)$ и $F^{\delta_P}(P)$ с $\delta_Q = -\delta_P > 0$ в критической точке $T = 0$, $\lambda = \lambda_c$. Здесь $\lambda := \hbar/\sqrt{m}$ есть квантовый параметр модели, m – масса атома в узле решётки $\mathbb{Z}$.

Поскольку обычно на критической линии мы имеем дальние корреляции, можно ожидать, что критические флуктуации чувствительны к упомянутым выше “лёгким” возмущениям $h = \hat{h}/|\Lambda|^\alpha$. С другой стороны, они также должны быть чувствительны к скорости убывания прямого взаимодействия между частицами: в нашей модели убывание матричных элементов гармонической силы задаётся как

$$\phi_{l,l'} \sim |l - l'|^{-(d+\sigma)} \quad \text{при} \quad |l - l'| \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Если $\sigma \geq 2$, мы полагаем взаимодействие (3.11) короткодействующим, а в случае $0 < \sigma < 2$ считаем его дальнодействующим, поскольку соответствующее дискретное преобразование Фурье имеет следующие два типа асимптотики при $k \rightarrow 0$:

$$\tilde{\phi}(k) \sim \begin{cases} a^\sigma k^\sigma + o(k^\sigma), & 0 < \sigma < 2, \\ a^2 k^2 + o(k^2), & \sigma \geq 2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Таким образом, нашей целью является нахождение показателя δ_A как функции от α и σ для квантовой ферроэлектрической модели с локальным взаимодействием (3.11). Отметим, что показатель $\delta_Q = \delta_Q(\alpha, \sigma)$ напрямую связан с критическим индексом, описывающим убывание двухточечной корреляционной функции для смещений на критической линии, где он равен $\eta = 2 - 2d\delta_A$ [30].

3.2. Квантовый фазовый переход, флуктуации и квазисредние. Пусть $\mathbb{Z}$ – d -мерная квадратная решётка. С каждым узлом решётки l , занятым частицей массы m , мы свяжем операторы координаты $Q_l \in \mathbb{R}^1$ и импульса $P_l = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial Q_l}$, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_l = L^2(\mathbb{R}^1, dx)$. Пусть Λ – конечное кубическое подмножество в $\mathbb{Z}$, $V = |\Lambda|$, и множество Λ^* дуально к Λ по отношению к периодическим граничным условиям. Локальный гамильтониан H_Λ рассматриваемой модели есть самосопряжённый оператор с областью определения $\text{dom}(H_\Lambda) \subset \mathcal{H}_\Lambda$, заданный как

$$H_\Lambda = \sum_{l \in \Lambda} \frac{P_l^2}{2m} + \frac{1}{4} \sum_{l, l' \in \Lambda} \phi_{l,l'} (Q_l - Q_{l'})^2 + \sum_{l \in \Lambda} U(Q_l) - h \sum_{l \in \Lambda} Q_l. \quad (3.13)$$

Здесь локальное гильбертово пространство $\mathcal{H}_\Lambda := \otimes_{l \in \Lambda} \mathcal{H}_l$. Заметим, что второе слагаемое в (3.13) описывает гармоническое взаимодействие между частицами, последнее слагаемое задаёт действие внешнего поля, а третье есть ангармонический одноузельный потенциал, действующий в каждой точке $l \in \mathbb{Z}$. Потенциал U имеет форму двойной ямы и описывает фазовый переход типа смещения, присущий однокомпонентному ферроэлектрику [30]. Например,

$$U(x) = \frac{a}{2} Q_l^2 + W(Q_l^2), \quad W(x) = \frac{1}{2} b x^2, \quad a < 0, \quad b > 0.$$

Другой пример – неполиномиальный потенциал U аналогичного вида с $a > 0$, в котором $W(x) = b e^{-\eta x}/2$, где $\eta > 0$ и $b > 0$. Тогда (3.13) принимает вид

$$H_\Lambda = \sum_{l \in \Lambda} \frac{P_l^2}{2m} + \frac{1}{4} \sum_{l, l' \in \Lambda} \phi_{l,l'} (Q_l - Q_{l'})^2 + \frac{a}{2} \sum_{l \in \Lambda} Q_l^2 + \sum_{l \in \Lambda} W(Q_l^2) - h \sum_{l \in \Lambda} Q_l. \quad (3.14)$$

Напомним, что в этой модели при низкой температуре происходит структурный фазовый переход, нарушающий Z_2 -симметрию $\{Q_l \rightarrow -Q_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ [31], [32], при условии, что квантовый параметр $\lambda < \lambda_c$.

Заметим, что модифицированная модель (3.14) может быть решена явно в приближении

$$\sum_{l \in \Lambda} W(Q_l^2) \rightarrow VW \left(\frac{1}{V} \sum_{l \in \Lambda} Q_l^2 \right),$$

известном как модель самосогласованных фононов (SCP) [30]. При этом мы получаем модель с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H_{\Lambda}^{\text{SCP}} = & \sum_{l \in \Lambda} \frac{P_l^2}{2m} + \frac{1}{4} \sum_{l, l' \in \Lambda} \phi_{l, l'} (Q_l - Q_{l'})^2 + \frac{a}{2} \sum_{l \in \Lambda} Q_l^2 + \\ & + VW \left(\frac{1}{V} \sum_{l \in \Lambda} Q_l^2 \right) - h \sum_{l \in \Lambda} Q_l, \end{aligned} \quad (3.15)$$

которая может быть решена методом аппроксимирующего гамильтониана [33] (см. также работы [34] и [24]). Тогда плотность свободной энергии для гамильтониана $H_{\Lambda}(c)$, аппроксимирующего гамильтониан (3.15), равна

$$f_{\Lambda}[H_{\Lambda}(c)] := -\frac{1}{\beta V} \ln \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda}(c)}, \quad \beta := \frac{1}{k_B T}. \quad (3.16)$$

Согласно методу аппроксимирующего гамильтониана

$$\begin{aligned} H_{\Lambda}(c) := & \sum_{l \in \Lambda} \frac{P_l^2}{2m} + \frac{1}{4} \sum_{l, l' \in \Lambda} \phi_{l, l'} (Q_l - Q_{l'})^2 + \frac{a}{2} \sum_{l \in \Lambda} Q_l^2 + \\ & + V \left[W(c) + W'(c) \left(\frac{1}{V} \sum_{l \in \Lambda} Q_l^2 - c \right) \right] - h \sum_{l \in \Lambda} Q_l, \end{aligned} \quad (3.17)$$

поэтому плотность свободной энергии (3.16) может быть записана в явном виде:

$$\begin{aligned} f_{\Lambda}[H_{\Lambda}(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))] = & \frac{1}{\beta V} \sum_{q \in \Lambda^*} \ln \left[2 \text{sh} \frac{\beta \lambda \Omega_q(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))}{2} \right] - \frac{1}{2} \frac{h^2}{\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))} + \\ & + [W(c_{\Lambda, h}(T, \lambda)) - c_{\Lambda, h}(T, \lambda) W'(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))]. \end{aligned}$$

Здесь $c = c_{\Lambda, h}(T, \lambda)$ – решения уравнения самосогласования

$$c = \frac{h^2}{\Delta^2(c)} + \frac{1}{V} \sum_{q \in \Lambda^*} \frac{\lambda}{2\Omega_q(c)} \text{cth} \frac{\beta \lambda}{2} \Omega_q(c). \quad (3.18)$$

Спектр $\Omega_q(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))$, $q \in \Lambda^*$, оператора $H_{\Lambda}(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))$ выражается через гармонический спектр ω_q и щель в спектре $\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))$:

$$\Omega_q^2(c_{\Lambda, h}(T, \lambda)) := \Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda)) + \omega_q^2,$$

где $\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda)) := a + 2W'(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))$ и

$$\omega_q^2 := \tilde{\phi}(0) - \tilde{\phi}(q), \quad \tilde{\phi}(q) := \sum_{l \in \Lambda} \phi_{l, 0} e^{-iq \cdot l}.$$

Метод аппроксимирующего гамильтониана в термодинамическом пределе $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ даёт следующее условие устойчивости для оператора $H_\Lambda(c_{\Lambda,h}(T, \lambda)) \geq 0$:

$$\Delta(c_h(T, \lambda)) = \lim_{\Lambda} \Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda)) \geq 0, \quad c_h(T, \lambda) := \lim_{\Lambda} c_{\Lambda,h}(T, \lambda). \quad (3.19)$$

Пусть $a > 0$ и $W: \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ есть монотонно убывающая функция с $W''(c) \geq w > 0$. Тогда по определению щели в спектре $\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))$ и с учётом условий (3.19) получаем, что областью устойчивости является $D = [c^*, \infty)$, где $c^* = \inf\{c \geq 0: \Delta(c) \geq 0\}$ и $\Delta(c^*) = a + 2W'(c^*) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеет место следующее равенство:*

$$\lim_{\Lambda} f_{\Lambda}[H_{\Lambda}^{\text{SCP}}] = \lim_{\Lambda} \sup_{c \geq c^*} f_{\Lambda}[H_{\Lambda}(c)] =: f(\beta, h). \quad (3.20)$$

По основной теореме метода аппроксимирующего оператора [24] термодинамики систем H_{Λ}^{SCP} и $H_{\Lambda}(c)$ при $c = c_{\Lambda,h}(T, \lambda)$ (3.18) эквивалентны. Следовательно, для изучения фазовой диаграммы модели (3.15) мы должны рассмотреть уравнение (3.18) в термодинамическом пределе $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$c_h(T, \lambda) = \rho(T, \lambda, h) + I_d(c_h(T, \lambda), T, \lambda). \quad (3.21)$$

Здесь мы расщепили термодинамический предел для интегральной суммы в (3.18) на член, отвечающий нулевой моде, и остальные слагаемые:

$$\begin{aligned} \rho(T, \lambda, h) &= \lim_{\Lambda} \rho_{\Lambda}(T, \lambda, h) := \\ &:= \lim_{\Lambda} \left\{ \frac{h^2}{\Delta^2(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} + \frac{1}{V} \frac{\lambda}{2\sqrt{\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))}} \operatorname{cth} \frac{\beta\lambda}{2} \sqrt{\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} \right\}, \\ I_d(c_h(T, \lambda), T, \lambda) &:= \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{q \in B_d} d^d q \frac{1}{2\Omega_q(c_h(T, \lambda))} \operatorname{cth} \frac{\beta\lambda}{2} \Omega_q(c_h(T, \lambda)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $B_d = \{q \in \mathbb{R}^d: |q| \leq \pi\}$ – первая зона Бриллюэна.

Чтобы проанализировать решение (3.21), рассмотрим два случая: $h = 0$ и $h \neq 0$.

СЛУЧАЙ $h = 0$. Из соотношений (3.21), (3.22) нетрудно получить, что при $T = 0$ найдется λ_c такое, что $c^* \leq I_d(c^*, 0, \lambda)$ при $\lambda \geq \lambda_c$, а $c^* = I_d(c^*, 0, \lambda_c)$ определяет критическое значение квантового параметра λ . Тогда линия $(\lambda, T_c(\lambda))$ критических температур, которая разделяет фазовую диаграмму (λ, T) на две области, удовлетворяет условиям

$$c^* = I_d(c^*, T_c(\lambda), \lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \leq \lambda_c, \quad T_c(\lambda_c) = 0. \quad (3.23)$$

С учётом (3.21) и (3.22) можно переписать условия (3.23) как уравнение критической линии

$$\rho_{c^*}(T_c(\lambda), \lambda) := \rho(T, \lambda, h)|_{c_h(T, \lambda) = c^*} = c^* - I_d(c^*, T_c(\lambda), \lambda) = 0. \quad (3.24)$$

Таким образом, мы получаем два решения уравнения (3.21), различающиеся величиной щели в спектре (3.19):

$$\rho(T, \lambda, 0) = 0, \quad c_0(T, \lambda) > c^* \quad \text{или} \quad \Delta(c_0(T, \lambda)) > 0: T > T_c(\lambda) \vee \lambda > \lambda_c, \quad (\text{A})$$

$$\rho(T, \lambda, 0) \geq 0, \quad c_0(T, \lambda) = c^* \quad \text{или} \quad \Delta(c_0(T, \lambda)) = 0: 0 \leq T_c(\lambda) \wedge \lambda \leq \lambda_c. \quad (\text{B})$$

Для $\lambda < \lambda_c$, двигаясь вдоль вертикальной линии $\lambda = \text{const}$, при $T_c(\lambda) > 0$ мы наблюдаем хорошо известный фазовый переход, управляемый температурой, с параметром порядка, который можно определить через ρ . С другой стороны, при $T < T_c(0)$, двигаясь вдоль горизонтальной прямой $T = \text{const}$, для λ таких, что $T_c(\lambda) = T$, мы наблюдаем фазовый переход, управляемый квантовым параметром $\lambda = \hbar/\sqrt{m}$.

Заметим, что для $\lambda > \lambda_c$, т.е. для лёгких атомов, управляемый температурой фазовый переход подавляется квантовым туннелированием или квантовыми флуктуациями. Убывание температуры $T_c(\lambda)$ для лёгких атомов хорошо известно как изотопный эффект в ферроэлектриках [30]. По теореме 3.1 термодинамики модели (3.15) и аппроксимирующего гамильтониана $H_\Lambda(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))$ эквивалентны. Поэтому доказательство того факта, что в модели (3.15) наблюдаются те же эффекты, включая существование величины λ_c , вытекает из решения уравнения (3.15) и монотонности соответствия $\lambda \mapsto I_d(c^*, 0, \lambda)$. Доказательство наличия изотопного эффекта в модели (3.13) было получено в работе [35] (см. также [31], [32]).

Далее введём канонические гиббсовские состояния для гамильтонианов (3.14), (3.15) и (3.17):

$$\omega_{\beta, \Lambda, *}(•) = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{H}_\Lambda}[\exp(-\beta H_{\Lambda, *})(•)]}{\text{Tr}_{\mathcal{H}_\Lambda} \exp(-\beta H_{\Lambda, *})}, \quad H_{\Lambda, *} = H_\Lambda, H_\Lambda^{\text{SCP}}, H_\Lambda(c). \quad (3.25)$$

Заметим, что эти состояния при $h = 0$ наследуют $\mathbb{Z}^2$ -симметрию $Q_l \rightarrow -Q_l$ гамильтонианов (3.14), (3.15) и (3.17):

$$\omega_{\beta, \Lambda, *}(Q_l) = \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, *}(-Q_l) = 0. \quad (3.26)$$

Случай $h \neq 0$. В этом случае мы получаем

$$\omega_{\beta, c_h}(Q_l) = \frac{h}{\Delta(c_h(T, \lambda))}. \quad (3.27)$$

Для неупорядоченной фазы (A) мы имеем $\lim_{h \rightarrow 0} c_h(T, \lambda) = c(T, \lambda) > c^*$. Отсюда $\Delta(c) > 0$ и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega_{\beta, c_h}(Q_l) = 0. \quad (3.28)$$

Для упорядоченной фазы (B) мы имеем $\lim_{h \rightarrow 0} c_h(T, \lambda) = c^*$, тогда в силу (3.22)

$$\rho_{c^*}(T, \lambda) = c^* - I_d(c^*, T, \lambda) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{\Delta^2(c_h)} > 0. \quad (3.29)$$

Наконец, равенства (3.27) и (3.29) дают значения физических параметров порядка:

$$\omega_{\beta, \pm}(Q_l) := \lim_{h \rightarrow \pm 0} \omega_{\beta, c_h}(Q_l) = \pm \sqrt{\rho_{c^*}(T, \lambda)} \neq 0. \quad (3.30)$$

Таким образом, используя квазисредние Боголюбова (3.30) и результаты п. 2.2, мы получаем два экстремальных трансляционно-инвариантных равновесных состояния $\omega_{\beta,+}$ и $\omega_{\beta,-}$ таких, что

$$\omega_{\beta,+}(Q_l) = -\omega_{\beta,-}(Q_l) = [\rho_{c^*}(T, \lambda)]^{1/2} \neq 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (3.31)$$

В этом случае нетрудно проверить, что флуктуации координаты и импульса являются нормальными, $\delta_Q = \delta_P = 0$ [24]. Мы вернёмся к этому наблюдению ниже в рамках более общего подхода масштабированных квазисредних Боголюбова.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что внешние источники в (3.14), (3.15) и (3.17) отвечают *масштабированным квазисредним* Боголюбова в пределе $h \rightarrow 0$, если этот предел связан с термодинамическим пределом $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}$ по формуле

$$h_\alpha := \frac{\hat{h}}{V^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (3.32)$$

Подобный выбор квазисреднего является достаточно гибким для того, чтобы отследить слабые и сильные внешние источники как функции от $\alpha > 0$. Это даёт основания для следующего предложения [24].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если $\alpha < 1$, то предельное равновесное состояние остаётся чистым,

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\beta, c_h}(Q_l) = \text{sgn } \hat{h} [\rho_{c^*}(T, \lambda)]^{1/2},$$

что схоже со пределом $h \rightarrow \pm 0$ стандартного (немасштабированного) квазисреднего Боголюбова (3.31).

Если $\alpha \geq 1$, то предельное равновесное состояние $\omega_{\beta, \hat{h}}(Q_l)$ становится смесью чистых состояний:

$$\omega_{\beta, \hat{h}}(Q_l) = a\omega_{\beta,+}(Q_l) + (1-a)\omega_{\beta,-}(Q_l),$$

где $a := a(\hat{h}, \alpha, \rho_{c^*}(T, \lambda)) \in [0, 1]$ определяется равенством

$$a(\hat{h}, \alpha, \rho) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hat{h}}{\xi \sqrt{\rho}} \right), & \alpha = 1, \\ \frac{1}{2}, & \alpha > 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

Здесь $\xi := \lim_{\Lambda} [\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))V] = (2\beta\rho)^{-1} + \sqrt{(2\beta\rho)^{-2} + \hat{h}^2/\rho}$.

Наш следующий шаг состоит в изучении влияния источников масштабированных квазисредних на квантовые флуктуационные операторы. Рассмотрим нулевую моду ($k = 0$ в (3.2)) флуктуационных операторов координаты и импульса:

$$F_{\delta_Q}(Q) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{1/2+\delta_Q}} \sum_{i \in \Lambda} (Q_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_i)), \quad (3.34)$$

$$F_{\delta_P}(P) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{1/2+\delta_P}} \sum_{i \in \Lambda} (P_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(P_i)). \quad (3.35)$$

Поскольку аппроксимирующий гамильтониан (3.17) представляет собой квадратичную форму, можно найти явный вид дисперсий флуктуационных операторов (3.34) и (3.35):

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2+\delta_Q}} \sum_{i \in \Lambda} (Q_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_i)) \right\}^2 \right) = \\ = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_Q}} \frac{\lambda}{2\sqrt{\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))}} \operatorname{cth} \frac{\beta\lambda}{2} \sqrt{\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2+\delta_P}} \sum_{i \in \Lambda} (P_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(P_i)) \right\}^2 \right) = \\ = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_P}} \frac{\lambda m \sqrt{\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))}}{2} \operatorname{cth} \frac{\beta\lambda}{2} \sqrt{\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Здесь $c_h := c_{\Lambda, h}(T, \lambda)$ – решение уравнения самосогласования (3.18), и в (3.37) в силу $\mathbb{Z}^2$ -симметрии $P_l \rightarrow -P_l$ гамильтониана (3.15) мы имеем, что $\omega_{\beta, \Lambda, c_h}(P_l) = 0$ для всех $l \in \Lambda$ при любых значениях β и h .

Заметим, что существование нетривиальных флуктуаций (3.36) и (3.37) является достаточным условием для доказательства существования характеристических функций (3.3) с полубилинейной формой $S_{\omega}(\cdot, \cdot)$. Следующая составная часть – это соответствующая алгебре флуктуационных операторов симплектическая форма $\sigma_{\omega}(\cdot, \cdot)$, для её нахождения необходимо вычислить предел коммутатора в (3.6). С помощью (3.34) и (3.35) получаем

$$\lim_{\Lambda} [F_{\Lambda}^{\delta_P}(P), F_{\Lambda}^{\delta_Q}(Q)] = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{1+\delta_P+\delta_Q}} \sum_{l, l' \in \Lambda} [P_l, Q_{l'}] = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{\delta_P+\delta_Q}} \frac{\hbar}{i}. \quad (3.38)$$

Завершим этот пункт следующим списком замечаний и комментариев.

1(A). Пусть $h = 0$ и $[0, \lambda_c] \ni \lambda \mapsto T_c(\lambda)$. Если точка (λ, T) фазовой диаграммы лежит выше критической линии, $T > T_c(\lambda)$, или если $\lambda > \lambda_c$ (см. (3.23)), то мы имеем случай (A), когда $\Delta(c_h(T, \lambda)) > 0$ при $h = 0$. Следовательно, нетривиальные дисперсии (3.36) и (3.37) возможны только для $\delta_Q = \delta_P = 0$. Таким образом, флуктуационные операторы смещения и импульса (3.34) и (3.35) удовлетворяют центральной предельной теореме. Они называются нормальными, или некритическими флуктуационными операторами. В этом случае коммутатор (3.38) отличен от нуля, поэтому операторы $F_0(P)$ и $F_0(Q)$ являются генераторами неабелевой алгебры нормальных флуктуаций. Поскольку в этой области фазовой диаграммы параметр порядка (3.22) $\rho(T, \lambda, h) = 0$ при $h = 0$, мы называем данную чистую фазу неупорядоченной. Заметим, что это влечёт $\omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_l) = 0$ даже без ссылки на Z_2 -симметрию (3.22).

1(B). Пусть $h = 0$. Если точка (λ, T) фазовой диаграммы лежит ниже критической линии, $T < T_c(\lambda)$, и $\lambda < \lambda_c$, то $\lim_{\Lambda} c_{\Lambda, h=0}(T, \lambda) = c^*$, т. е. для (3.19) мы имеем $\lim_{\Lambda} \Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))|_{h=0} = 0$, и параметр порядка (3.22) $\rho(T, \lambda, h)|_{h=0} > 0$. Следовательно, с помощью равенства (3.36) мы получаем $\delta_Q = 1/2$, а с помощью равенства (3.37) имеем $\delta_P = 0$, что подтверждает ненулевой центральный предел. Таким образом, флуктуационный оператор смещения $F_{1/2}(Q)$ является аномальным,

а флуктуационный оператор импульса $F_0(P)$ – нормальным. На основании (3.38) мы заключаем, что операторы $F_{1/2}(Q)$, $F_0(P)$, определённые формулами (3.34), (3.35), коммутируют, т. е. они порождают абелеву алгебру флуктуаций. Отметим, что, хотя $\rho(T, \lambda, h)|_{h=0} > 0$, наличие Z_2 -симметрии (3.22) влечёт, что параметр порядка для оператора смещения $\omega_{\beta, c^*}(Q_l) = 0$. Квазисреднее Боголюбова (3.30) даёт ненулевое значение этого параметра порядка. Это говорит о том, что ω_{β, c^*} есть наполовину смесь чистых состояний $\omega_{\beta, \pm}$ (3.31), и объясняет аномальность флуктуаций смещения.

2. Теперь предположим, что $h \neq 0$ и рассмотрим стандартные квазисредние Боголюбова.

2(A). Поскольку $\Delta(c_h(T, \lambda)) > 0$, то с помощью соотношений (3.36), (3.37) получаем конечные квазисредние

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{i \in \Lambda} (Q_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_i)) \right\}^2 \right),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{i \in \Lambda} (P_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(P_i)) \right\}^2 \right).$$

Это приводит к нормальным флуктуациям, как и в случае 1(A).

2(B). Поскольку $h \neq 0$, отличие от случая 1(B) возникает из-за того, что в (3.19) $\lim_{\Lambda} \Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda)) > 0$, и вследствие неравенства (3.29), которое верно для упорядоченной фазы. Тогда квазисредние, применённые к вычислению дисперсии оператора смещения (3.36),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_Q}} \frac{\lambda}{2\sqrt{\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))}} \operatorname{cth} \frac{\beta\lambda}{2} \sqrt{\Delta(c_{\Lambda, h}(T, \lambda))}, \quad (3.39)$$

не дают нетривиального результата ни при каких δ_Q . При этом квазисреднее для дисперсии оператора импульса (3.37) нетривиально только при $\delta_P = 0$.

2*(B). Трудность анализа в случае 2(A) является одной из причин для рассмотрения вместо (3.39) масштабированных квазисредних с параметром h_{α} (3.32).

1*(B). Мы завершим наши замечания рассмотрением случая, когда $h = 0$ и точка (λ, T) лежит на критической линии $(\lambda, T_c(\lambda))$ и $\lambda \leq \lambda_c$. Тогда при $h = 0$ мы имеем $\lim_{\Lambda} \Delta(c_{\Lambda, h}(T_c(\lambda), \lambda)) = 0$ и параметр порядка $\rho(T_c(\lambda), \lambda, h)|_{h=0} = 0$.

Если $\lambda < \lambda_c$, то $T_c(\lambda) > 0$. Следовательно, с учётом (3.37) флуктуационный оператор импульса нормален, $\delta_P = 0$, а флуктуационный оператор смещения аномален с показателем степени $\delta_Q > 0$, который зависит от асимптотики $O(V^{-\gamma})$, $\gamma > 0$, для лакуны $\Delta(c_{\Lambda, h}(T_c(\lambda), \lambda))$ при $h = 0$ в термодинамическом пределе. Заметим, что в масштабированном пределе $\lim_{\Lambda} \Delta(c_{\Lambda, h_{\alpha}}(T_c(\lambda), \lambda)) = 0$ асимптотика есть $O(V^{-\gamma})$ и, как следствие, неравенство $\delta_Q > 0$ можно модифицировать, варьируя степень α , хотя это оставляет неизменным соотношение $\delta_P = 0$. Мы изучим это явление в следующем разделе. На основании (3.38) заключаем, что соответствующая алгебра флуктуаций является абелевой.

Если $\lambda = \lambda_c$, то в (3.22) $T_c(\lambda_c) = 0$, и мы наблюдаем при нулевой температуре квантовый фазовый переход в критической точке $(0, \lambda_c)$ при изменении квантового

параметра λ . В этом случае дисперсии (3.36), (3.37) принимают вид

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_Q}} \frac{\lambda_c}{2\sqrt{\Delta(c_{\Lambda,h}(0, \lambda_c))}}, \quad (3.40)$$

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_P}} \frac{\lambda_c m \sqrt{\Delta(c_{\Lambda,h}(0, \lambda_c))}}{2}. \quad (3.41)$$

Поскольку $\Delta(c_{\Lambda,h}(0, \lambda_c)) = O(V^{-\gamma})$, выражение (3.40) показывает, что флуктуационный оператор смещения является аномальным с показателем $\delta_Q = \gamma/4 > 0$, который можно модифицировать, варьируя степень α . Флуктуационный оператор импульса также аномален, но подчиняется жёсткому условию $\delta_P = -\gamma/4 < 0$, которое вытекает из (3.41). Заметим, что равенство $\delta_Q + \delta_P = 0$ приводит к нетривиальному коммутатору (3.38). Следовательно, алгебра аномальных флуктуаций, порождённая операторами $F_{\delta_Q}(Q)$, $F_{\delta_P}(P)$, неабелева и, возможно, зависит от α .

В следующем разделе мы поясним связь между определением квантовых флуктуационных операторов и масштабированными квазисредними Боголюбова, рассмотренными в замечаниях выше.

4. КВАЗИСРЕДНИЕ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

4.1. Квантовые флуктуации ниже критической линии. Теперь рассмотрим (трудный) случай $2^*(B)$. Мы покажем, что масштабированные квазисредние Боголюбова с параметром h_α (3.32) хорошо подходят для анализа флуктуаций ниже критической линии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $0 \leq T < T_c(\lambda)$ и $\lambda < \lambda_c$. Тогда флуктуационный оператор импульса нормален, $\delta_P = 0$, а флуктуационный оператор смещения аномален с показателем $0 < \delta_Q \leq 1/2$, который зависит от параметра α масштабированного квазисреднего Боголюбова (3.32). Алгебра флуктуаций является абелевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \alpha < 1$. С помощью соотношений (3.22), (3.29) и (3.32) мы получаем, что

$$\omega_{\beta, \text{sgn } \hat{h}}(Q_l) = \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_l) = \lim_{\Lambda} \frac{\hat{h}}{V^\alpha \Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} = \text{sgn } \hat{h} \sqrt{\rho_{c^*}(T, \lambda)}. \quad (4.1)$$

Это показывает, что предел, отвечающий масштабированному квазисреднему, даёт чистое состояние (3.31), и что с учётом (3.36) вариация флуктуационного оператора смещения конечна, только если $\delta_Q = \alpha/2$. В этом случае

$$0 < \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2+\delta_Q}} \sum_{i \in \Lambda} (Q_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_i)) \right\}^2 \right) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_Q-\alpha}} \frac{\sqrt{\rho_{c^*}(T, \lambda)}}{2\beta|\hat{h}|} < \infty. \quad (4.2)$$

С другой стороны, конечный предел (3.37) влечёт $\delta_P = 0$, т.е. флуктуационный оператор импульса нормален. Поскольку $\alpha > 0$, с помощью (3.38) заключаем, что алгебра флуктуаций является абелевой.

Пусть теперь $\alpha = 1$. Тогда с учётом (3.21), (3.22) и (3.32) мы получаем, что

$$\begin{aligned}\rho_{c^*}(T, \lambda) &= \lim_{\Lambda} \rho_{\Lambda}(T, \lambda, h) = \lim_{\Lambda} \left\{ \frac{\hat{h}^2}{[V\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))]^2} + \frac{1}{V\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} \right\} = \\ &= c^* - I_d(c^*, T, \lambda) > 0,\end{aligned}\quad (4.3)$$

и это влечёт ограниченность величины $w_{\hat{h}}(T, \lambda) := \lim_{\Lambda} [V\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))] > 0$ при $h = \hat{h}/V$. Тогда параметр порядка для оператора смещения удовлетворяет соотношениям

$$-\sqrt{\rho_{c^*}(T, \lambda)} < \lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_I) = \lim_{\Lambda} \frac{\hat{h}}{V\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} = \frac{\hat{h}}{w_{\hat{h}}(T, \lambda)\sqrt{\rho_{c^*}(T, \lambda)}} < \sqrt{\rho_{c^*}(T, \lambda)}.$$

Это означает, что равновесное гиббсовское состояние

$$\omega_{\beta, \hat{h}}(\cdot) = \xi \omega_{\beta, +}(\cdot) + (1 - \xi) \omega_{\beta, -}(\cdot), \quad \xi = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\hat{h}}{(w_{\hat{h}}(T, \lambda)\sqrt{\rho_{c^*}(T, \lambda)})} \right] \in (0, 1), \quad (4.4)$$

является выпуклой комбинацией чистых состояний (4.1). Заметим, что соотношение (3.36) и неограниченность величины $w_{\hat{h}}(T, \lambda)$ влечёт $\delta_Q = 1/2$, при этом соотношение (3.37) даёт $\delta_P = 0$. Таким образом, в смешанном состоянии $\omega_{\beta, \hat{h}}(\cdot)$ флуктуации смещения аномальны, но флуктуационный оператор импульса остаётся нормальным; алгебра флуктуаций абелева, как и в предыдущем случае.

Пусть $\alpha > 1$. Тогда опять же в силу (3.21), (3.22) и (3.32) мы получаем, что

$$\rho_{c^*}(T, \lambda) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} = c^* - I_d(c^*, T, \lambda) > 0, \quad (4.5)$$

и отсюда с помощью (3.27) мы получаем параметр порядка для оператора смещения:

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_I) = \lim_{\Lambda} \frac{\hat{h}}{V^{\alpha} \Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} = 0. \quad (4.6)$$

Заметим, что масштабированные квазисредние (4.5), (4.6) в упорядоченной фазе (B) существенно отличаются от стандартных (3.29), (3.30). Используя (3.36) и (3.37), получаем $\delta_Q = 1/2$ и $\delta_P = 0$, что совпадает со случаем $\alpha = 1$, как и абелевость алгебры флуктуаций. Случай $\alpha > 1$ формально эквивалентен $\alpha = 1$ при $\hat{h} \rightarrow 0$, отсюда следует, что $\xi \rightarrow 1/2$ (см. (4.4)). Это можно также вывести из (4.6).

4.2. Абелева алгебра флуктуаций на критической линии. В этом пункте мы находим показатели δ_Q и δ_P на критической линии фазового перехода как функции от параметров d , σ и α (если они от α зависят). В связи с этим мы действуем следующим образом. Критическая линия определяется уравнением (3.24). Следовательно, $\rho_{c^*}(T_c(\lambda), \lambda) = 0$, и тогда выражение (3.22) при $\lim_{\Lambda} \Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda)) = c^*$ принимает вид

$$\lim_{\Lambda} \left\{ \frac{1}{V} \frac{\lambda}{2\sqrt{\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))}} \operatorname{cth} \frac{\beta_c \lambda}{2} \sqrt{\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} + \frac{\hat{h}^2}{V^{2\alpha} \Delta^2(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} \right\} = 0, \quad (4.7)$$

где $\beta_c := 1/k_B T_c(\lambda)$.

Поскольку для масштабированного квазисреднего (3.32) мы берем $h = \hat{h}/V^\alpha$, из соотношений (3.22) и (3.24) получаем, что $\lim_{\Lambda} c_{\Lambda,h}(T_c(\lambda), \lambda) = c^*$. Таким образом, $\lim_{\Lambda} \Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda)) = 0$. Теперь необходимо рассмотреть два случая:

а) если $T_c(\lambda) > 0$, то равенство (4.7) эквивалентно

$$\lim_{\Lambda} \left\{ \frac{1}{V \Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda)) \beta_c} + \frac{\hat{h}^2}{V^{2\alpha} \Delta^2(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))} \right\} = 0; \quad (4.8)$$

б) если $T_c(\lambda_c) = 0$, то равенство (4.7) эквивалентно

$$\lim_{\Lambda} \left\{ \frac{\lambda}{2V \sqrt{\Delta(c_{\Lambda,h}(0, \lambda))}} + \frac{\hat{h}^2}{V^{2\alpha} \Delta^2(c_{\Lambda,h}(0, \lambda))} \right\} = 0. \quad (4.9)$$

В обоих случаях при $V \rightarrow \infty$ величина лакуны Δ в (4.7) имеет асимптотику $\Delta \simeq V^{-\gamma}$, где либо $0 < \gamma < 1$ и $0 < \gamma < \alpha$ в (4.8), либо $0 < \gamma < 2$ и $0 < \gamma < \alpha$ в (4.9). Отметим, что ключом к вычислению этой асимптотики является уравнение (3.18). Чтобы сделать этот факт очевидным, перепишем (3.18) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} (c_{\Lambda} - c^*) + [c^* - I_d(c_{\Lambda}, T_c(\lambda), \lambda)] + \left[I_d(c_{\Lambda}, T_c(\lambda), \lambda) - \frac{1}{V} \sum_{\substack{q \in \Lambda^* \\ q \neq 0}} \frac{\lambda}{2\Omega_q(c_{\Lambda})} \operatorname{cth} \frac{\beta_c \lambda \Omega_q(c_{\Lambda})}{2} \right] = \\ = \left(\frac{\hat{h}}{V^\alpha \Delta} \right)^2 + \frac{1}{V} \frac{\lambda}{2\sqrt{\Delta}} \operatorname{cth} \frac{\beta_c \lambda \sqrt{\Delta}}{2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где мы ввели обозначения $c_{\Lambda} := c_{\Lambda,h}(T_c(\lambda), \lambda)$ и $\Delta := \Delta(c_{\Lambda,h}(T_c(\lambda), \lambda))$. Асимптотика левой части равенства (4.10) вытекает из предположения, что $h = \hat{h}/V^\alpha$ и из скорости сходимости суммы Дарбу–Римана к интегралу $I_d(c_{\Lambda}, T_c(\lambda), \lambda)$. Вместе с асимптотикой правой части это даёт показатель степени γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Если точка (T, λ) лежит на критической линии $(T_c(\lambda), \lambda)$ при $T_c(\lambda) > 0$, то в асимптотике по объёму щель в спектре $\Delta(c_{\Lambda,h}(T, \lambda))$ ведёт себя следующим образом:*

если $d > 2\sigma$, то

$$\gamma = \begin{cases} \frac{2\alpha}{3}, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{1}{2}, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = \frac{3}{4};$$

если $d = 2\sigma$, то

$$\gamma = \begin{cases} \frac{2\alpha}{3} + 0, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{1}{2} + 0, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = \frac{3}{4};$$

если $\sigma < d < 2\sigma$, то

$$\gamma = \begin{cases} 2\alpha \frac{\sigma}{d + \sigma}, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{1}{2}, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2d}.$$

Поскольку $T_c(\lambda) > 0$, правая часть равенства (4.10) имеет асимптотику (4.8), или

$$O[(V\Delta)^{-1} + (V^\alpha\Delta)^{-2}]. \quad (4.11)$$

Выберем α_c так, что $O[(V\Delta)^{-1}] = O[(V^{\alpha_c}\Delta)^{-2}]$. Тогда для асимптотики (4.11) мы очевидным образом получаем $O[(V\Delta)^{-1} + (V^{\alpha_c}\Delta)^{-2}] = O[(V\Delta)^{-1}]$, т.е. при $\alpha = \alpha_c$ щель в спектре Δ имеет такое же асимптотическое поведение, как и в случае $\hat{h} = 0$. Три режима убывания потенциала в зависимости от σ , представленные в предложении 4.2, рассмотрены в деталях в работе [36].

ТЕОРЕМА 4.1. *Если точка (T, λ) лежит на критической линии $(T_c(\lambda), \lambda)$ при $T_c(\lambda) > 0$, то алгебра флуктуационных операторов является абелевой. Флуктуационный оператор импульса $F_{\delta_P}(P)$ нормален ($\delta_P = 0$), а флуктуационный оператор смещения $F_{\delta_Q}(Q)$ аномален с критическим показателем, который задаётся следующим образом:*

если $d > 2\sigma$, то

$$\delta_Q = \begin{cases} \frac{\alpha}{3}, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{1}{4}, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = \frac{3}{4};$$

если $d = 2\sigma$, то

$$\delta_Q = \begin{cases} \frac{\alpha}{3} + 0, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{1}{4} + 0, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = \frac{3}{4};$$

если $\sigma < d < 2\sigma$, то

$$\delta_Q = \begin{cases} \alpha \frac{\sigma}{d + \sigma}, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{\sigma}{2d}, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы проверить абелевость алгебры флуктуационных операторов с генераторами F^{δ_Q} и F^{δ_P} , достаточно заметить, что предел коммутатора удовлетворяет равенству

$$\lim_{\Lambda} [F_{\Lambda}^{\delta_P}, F_{\Lambda}^{\delta_Q}] = \lim_{\Lambda} \frac{1}{|\Lambda|^{1+\delta_P+\delta_Q}} \sum_{l, l' \in \Lambda} [P_l, Q_{l'}] = 0.$$

Вторая часть теоремы вытекает из (3.36) и (3.37), что даёт на критической линии при $h = \hat{h}/V^\alpha$ следующие равенства:

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2+\delta_Q}} \sum_{i \in \Lambda} (Q_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_i)) \right\}^2 \right) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_Q}} \frac{k_B T_c(\lambda)}{\Delta(c_{\Lambda, h}(T_c(\lambda), \lambda))}, \quad (4.12)$$

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\beta, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2+\delta_P}} \sum_{i \in \Lambda} (P_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(P_i)) \right\}^2 \right) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_P}} m k_B T_c(\lambda). \quad (4.13)$$

Поэтому дисперсия (4.12) нетривиальна тогда и только тогда, когда $\delta_Q = \gamma/2$, а дисперсия (4.13) нетривиальна тогда и только тогда, когда $\delta_P = 0$. Здесь δ_Q взята из предложения 4.2.

Если в теореме положить $\sigma = 2$, то её утверждение отвечает короткодействующим взаимодействиям с $\sigma \geq 2$ (см. формулу (3.12)). Это наблюдение совпадает с результатом работы [24], если положить $\alpha = \infty$, т. е. в случае, когда нет источников квазисредних.

4.3. Неабелева алгебра флуктуаций на критической линии. В этом случае мы имеем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Если точка (T, λ) совпадает с критической точкой $(0, \lambda_c)$, то в асимптотике по объёму то щель в спектре $\Delta(c_{\Lambda, h}(0, \lambda), 0)$ ведёт себя следующим образом:*

если $d > 3\sigma/2$, то

$$\gamma = \begin{cases} \frac{2\alpha}{3}, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{2}{3}, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = 1;$$

если $d = 3\sigma/2$, то

$$\gamma = \begin{cases} \frac{2\alpha}{3} + 0, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{1}{2} + 0, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = 1;$$

если $\sigma/2\sigma < d < 3\sigma/2$, то

$$\gamma = \begin{cases} 2\alpha \frac{\sigma}{2d + 3\sigma}, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{\sigma}{d}, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = \frac{1}{2} + \frac{3\sigma}{4d}.$$

В точке $(0, \lambda_c)$ на критической линии мы получаем предел (4.9), т. е. щель в спектре имеет асимптотику $\Delta \simeq V^{-\gamma}$. Тогда правая часть равенства (4.10) имеет следующую асимптотику: $O[(V^\alpha \Delta)^{-2} + (V \Delta^{1/2})^{-1}]$. Аналогично предложению 4.2 мы определяем параметр $\alpha = \alpha_c$ из условия $O[(V^\alpha \Delta)^{-2}] = O[(V \Delta^{1/2})^{-1}]$. Снова необходимо рассмотреть три режима для величины σ из предложения 4.3 [36].

ТЕОРЕМА 4.2. *Если точка (T, λ) совпадает с критической точкой $(0, \lambda_c)$, то алгебра флуктуационных операторов является неабелевой, поскольку флуктуационный оператор смещения $F_{\delta_Q}(Q)$ аномален ($\delta_Q > 0$), а флуктуационный оператор импульса $F_{\delta_P}(P)$ сверхнормален (сжат) и удовлетворяет условию $\delta_P = -\delta_Q$, а показатель δ_Q имеет следующий вид:*

если $d > 3\sigma/2$, то

$$\delta_Q = \begin{cases} \frac{\alpha}{6}, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{1}{6}, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = 1;$$

если $d = 3\sigma/2$, то

$$\delta_Q = \begin{cases} \frac{\alpha}{6} + 0, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{1}{8} + 0, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = 1;$$

если $\sigma/2\sigma < d < 3\sigma/2$, то

$$\delta_Q = \begin{cases} \alpha \frac{\sigma}{2d + 3\sigma}, & \alpha < \alpha_c, \\ \frac{\sigma}{4d}, & \alpha \geq \alpha_c, \end{cases} \quad \alpha_c = \frac{1}{2} + \frac{3\sigma}{4d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учётом (3.23) из предела $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_c - 0} (T_c(\lambda), \lambda) = (0, \lambda_c)$ получаем, что $\beta_c = (k_B T_c(\lambda))^{-1} \rightarrow \infty$. Тогда дисперсии (3.36) и (3.37) принимают вид

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda} \omega_{\infty, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2 + \delta_Q}} \sum_{i \in \Lambda} (Q_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(Q_i)) \right\}^2 \right) &= \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_Q}} \frac{\lambda}{\sqrt{\Delta(c_{\Lambda, h}(0, \lambda_c))}}, \\ \lim_{\Lambda} \omega_{\infty, \Lambda, c_h} \left(\left\{ \frac{1}{V^{1/2 + \delta_P}} \sum_{i \in \Lambda} (P_i - \omega_{\beta, \Lambda, c_h}(P_i)) \right\}^2 \right) &= \lim_{\Lambda} \frac{1}{V^{2\delta_P}} \frac{\lambda m}{2} \sqrt{\Delta(c_{\Lambda, h}(0, \lambda_c))}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta \simeq V^{-\gamma}$, достаточно применить предложение 4.3 при $\delta_Q = \gamma/4 = -\delta_P$, чтобы получить для нетривиальных величин дисперсий возможные значения δ_Q . Неабелевость алгебры флуктуационных операторов вытекает из формулы (3.38) для коммутатора.

Обратим внимание на то, что замечание о значении $\sigma = 2$, приведённое в конце п. 4.2, также верно для квантовых флуктуаций в точке $(0, \lambda_c)$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В представленной статье мы проанализировали метод квазисредних Боголюбова для квантовых систем, в которых происходит фазовый переход с параметром порядка.

Прежде всего, мы проверили возможность применения этого метода к анализу фазовых переходов со спонтанным нарушением симметрии. С этой целью мы рассмотрели пример бозе-эйнштейновской конденсации в непрерывных идеальных системах и системах со взаимодействием. Существование различных типов конденсации привело нас к выводу о том, что физически значимы только те величины, которые определяются через квазисредние Боголюбова (см. п. 2.2 и 2.3).

Новизна второй части работы состоит в том, что мы привели аргументы в пользу применения метода масштабированных квазисредних Боголюбова. Рассмотрев в качестве базового примера структурный фазовый переход, мы изучили связь между спонтанным нарушением симметрии и критическими квантовыми флуктуациями. Наш анализ в разделе 3 показал, что опять же масштабированные квазисредние являются адекватным инструментом описания алгебры квантовых флуктуационных операторов. Тонкая природа квантовых флуктуаций становится заметной уже на уровне вопроса о существовании параметра порядка, который может быть разрушен квантовыми флуктуациями даже при нулевой температуре (см. п. 3.2). Заметим, что для такого анализа достаточно использовать стандартный метод Боголюбова.

Уместность метода квазисредних Боголюбова становится очевидной для мезоскопических квантовых флуктуационных операторов, определенных квантовым центральным пределом, поскольку предел чувствителен к величине α , определяющей

поведение масштабирующего параметра. В противоположность неабелевой алгебре нормальных флуктуационных операторов в неупорядоченной фазе, критические квантовые флуктуации в упорядоченной фазе и на критической линии зависят от α (см. раздел 4). Это касается как аномальных, так и супернормальных (сжатых) квантовых флуктуаций. Они образуют разнообразные абелевы и неабелевы алгебры, которые все зависят от α (см. пп. 4.1, 4.2).

Некоторые моменты, касающиеся представленной статьи, получили свое развитие в работах [37], [38].

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы приводим для удобства читателя утверждение основной теоремы Фаннеса–Пуле–Вербёра [39] (см. также её обобщение на ненулевые импульсы в работе [40] и книге [12]). К сожалению, ни в работе [39], ни в работе [40] не показано, что состояния $\omega_{\beta,\mu,\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, в приведённой ниже теореме являются эргодическими. Простое, но поучительное доказательство этого факта дано в книге [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ П.1. Пусть $\omega_{\beta,\mu}$ – аналитическое калибровочно-инвариантное равновесное состояние. Если для состояния $\omega_{\beta,\mu}$ имеет место ВДДП (2.45), то существуют эргодические состояния $\omega_{\beta,\mu,\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, не являющиеся трансляционно-инвариантными и удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) состояния $\omega_{\beta,\mu,\phi} \neq \omega_{\beta,\mu,\theta}$ для любых $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ таких, что $\theta \neq \phi$;
- 2) состояние $\omega_{\beta,\mu}$ имеет разложение

$$\omega_{\beta,\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \omega_{\beta,\mu,\phi};$$

- 3) для любого полинома Q от операторов $\eta(b_0)$, $\eta(b_0^*)$ и для всех $\phi \in [0, 2\pi)$

$$\omega_{\beta,\mu,\phi}(Q(\eta(b_0^*), \eta(b_0))X) = \omega_{\beta,\mu,\phi}(Q(\sqrt{\rho_0}e^{-i\phi}, \sqrt{\rho_0}e^{i\phi})X), \quad X \in \mathcal{A}.$$

Вслед за книгой [12] заметим, что доказательство этого предложения конструктивное. Важным моментом является разделяющий характер (или точность) состояний $\omega_{\beta,\mu}$, т.е. если $\omega_{\beta,\mu}(A) = 0$, то $A = 0$. Это свойство, которое зависит от расширения множества состояний $\omega_{\beta,\mu}$ до алгебры фон Неймана $\pi_\omega(\mathcal{A})''$ [15], [41], верно для тепловых состояний, но не имеет места для основных состояний даже без их расширения: фактически основное состояние (вакуум) не является точным на $\mathcal{A}$ (см. предложение 3 в [42]). Таким образом, мы видим, что тепловые и основные состояния могут различаться с точки зрения их разложения из п. 2 предложения П.1 (ср. также с нашим обсуждением в разделе 5).

Благодарности. В. Ф. Врежински благодарит Д. Л. Сьюэлла за то, что он в течение нескольких лет делился с ним своими взглядами на ВДДП. В. Ф. Врежински также благодарит организаторов конференции “Operator Algebras and Quantum Physics” (Сан-Паулу, Бразилия), сопутствующей XVIII конференции IAMP (Сантьяго-де-Чили, Чили), за возможность представить доклад. Мы благодарим Б. Нахтергаля за полезные замечания и предложения, касающиеся проблем, которые мы обсуждали в представленной работе и в препринте [37].

Список литературы

- [1] D. Ruelle, *Statistical Mechanics. Rigorous Results*, Benjamin, New York, 1969.
- [2] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. 1. C^* - and W^* -algebras, symmetry groups, decomposition of states*, Springer, Berlin, 1987.
- [3] G. L. Sewell, *Quantum Theory of Collective Phenomena*, Oxford Univ. Press, New York, 1986.
- [4] Н. Н. Боголюбов, *Собрание научных трудов в 12 томах. Статистическая механика, т. 8: Теория неидеального бозе-газа, сверхтекучести и сверхпроводимости*. 1946–1992, Наука, М., 2007.
- [5] Н. Н. Боголюбов, *Собрание научных трудов в 12 томах. Статистическая механика, т. 6: Лекции по квантовой статистике. Квазисредние в задачах статистической механики*, Наука, М., 2007.
- [6] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. Yngvason, “Bose–Einstein condensation and spontaneous symmetry breaking”, *Rep. Math. Phys.*, **59**:3 (2007), 389–399.
- [7] M. van den Berg, J. T. Lewis, J. V. Pulè, “A general theory of Bose–Einstein condensation”, *Helv. Phys. Acta*, **59**:8 (1986), 1271–1288.
- [8] M. Beau, V. A. Zagrebnov, “The second critical density and anisotropic generalised condensation”, *Condens. Matter Phys.*, **13**:2 (2010), 23003, 10 pp.
- [9] Д. Н. Зубарев, “Граничные условия для статистических операторов в теории неравновесных процессов и квазисредние”, *ТМФ*, **3**:2 (1970), 276–286.
- [10] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, М., 1971.
- [11] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Рёнке, *Статистическая механика неравновесных процессов*, т. 1, Физматлит, М., 2002.
- [12] A. F. Verbeure, *Many-Body Boson Systems. Half a Century Later*, Springer, Berlin, 2011.
- [13] M. van den Berg, J. T. Lewis, M. Lunn, “On the general theory of Bose–Einstein condensation and the state of the free boson gas”, *Helv. Phys. Acta*, **59**:8 (1986), 1289–1310.
- [14] V. A. Zagrebnov, J.-B. Bru, “The Bogoliubov model of weakly imperfect Bose gas”, *Phys. Rep.*, **350**:5–6 (2001), 291–434.
- [15] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982.
- [16] Th. Jaeck, V. A. Zagrebnov, “Exactness of the Bogoliubov approximation in random external potentials”, *J. Math. Phys.*, **51**:12 (2010), 123306, 16 pp.
- [17] V. A. Zagrebnov, “The Bogoliubov c -number approximation for random boson systems”, *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, **11**:1 (2014), 123–140.
- [18] J. Ginibre, “On the asymptotic exactness of the Bogoliubov approximation for many boson systems”, *Comm. Math. Phys.*, **8**:1 (1968), 26–51.
- [19] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. Yngvason, “Justification of c -number substitutions in bosonic hamiltonians”, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:8 (2005), 080401, 4 pp.
- [20] A. Sütő, “Equivalence of Bose–Einstein condensation and symmetry breaking”, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:8 (2005), 080402, 4 pp.
- [21] E. H. Lieb, “The classical limit of quantum spin systems”, *Commun. Math. Phys.*, **31**:4 (1973), 327–340.
- [22] R. B. Griffiths, “Spontaneous magnetization in idealized ferromagnets”, *Phys. Rev.*, **152**:1 (1966), 240–246.
- [23] R. V. Kadison, “States and representations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**:2 (1962), 304–319.
- [24] A. Verbeure, V. A. Zagrebnov, “Phase transitions and algebra of fluctuation operators in an exactly soluble model of a quantum anharmonic crystal”, *J. Stat. Phys.*, **69**:1–2 (1992), 329–359.

- [25] D. Goderis, A. Verbeure, P. Vets, “Non-commutative central limits”, *Probab. Theory Related Fields*, **82**:4 (1987), 527–544.
- [26] D. Goderis, A. Verbeure, P. Vets, “Dynamics of fluctuations for quantum lattice systems”, *Commun. Math. Phys.*, **128**:3 (1990), 533–549.
- [27] D. Goderis, P. Vets, “Central limit theorem for mixing quantum systems and the CCR-algebra of fluctuations”, *Commun. Math. Phys.*, **122**:2 (1989), 249–265.
- [28] M. Requardt, “Fluctuation operators and spontaneous symmetry breaking”, *J. Math. Phys.*, **43**:1 (2002), 351–372.
- [29] Й. Г. Бранков, В. А. Загребнов, Н. С. Тончев, “Описание предельных гиббсовских состояний для модели Кюри–Вейсса–Изинга”, *ТМФ*, **66**:1 (1986), 109–120.
- [30] V. L. Aksenov, N. M. Plakida, S. Stamenković, *Neutron Scattering by Ferroelectrics*, World Sci., Singapore, 1990.
- [31] R. A. Minlos, E. A. Pechersky, V. A. Zagrebnov, “Analyticity of the Gibbs state for a quantum anharmonic crystal: No order parameter”, *Ann. Henri Poincaré*, **3**:5 (2002), 921–938.
- [32] S. Albeverio, Yu. Kondratiev, Yu. Kozitsky, M. Röckner, *The Statistical Mechanics of Quantum Lattice Systems. A Path Integral Approach*, EMS Tracts in Mathematics, **8**, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009.
- [33] Н. Н. Боголюбов (мл.), Й. Г. Бранков, В. А. Загребнов, А. М. Курбатов, Н. С. Тончев, “Некоторые классы точно решаемых модельных задач квантовой статистической механики: метод аппроксимирующего гамильтониана”, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 3–45.
- [34] Н. М. Плакида, Н. С. Тончев, “Точно решаемая d -мерная модель структурного фазового перехода”, *ТМФ*, **63**:2 (1985), 270–279.
- [35] A. Verbeure, V. A. Zagrebnov, “No-go theorem for quantum structural phase transitions”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**:18 (1995), 5415–5421.
- [36] P. Jousset, V. A. Zagrebnov, “Quantum critical fluctuations in ferroelectric model: Quasi-average approach”, *J. Math. Phys.*, **39**:2 (1998), 921–930.
- [37] W. F. Wreszinski, V. A. Zagrebnov, *On ergodic states, spontaneous symmetry breaking and the Bogoliubov quasi-averages*, arXiv: 1607.03024.
- [38] G. L. Sewell, W. F. Wreszinski, “On the mathematical theory of superfluidity”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:1 (2009), 015207, 23 pp.
- [39] M. Fannes, J. V. Pulè, A. Verbeure, “On Bose condensation”, *Helv. Phys. Acta*, **55**:4 (1982), 391–399.
- [40] J. V. Pulè, A. F. Verbeure, V. A. Zagrebnov, “On nonhomogeneous Bose condensation”, *J. Math. Phys.*, **46**:8 (2005), 083301, 8 pp.
- [41] N. M. Hugenholtz, “States and representations in statistical mechanics”, *Mathematics of Contemporary Physics*, ed. R. F. Streater, Academic Press, London, New York, 1972, 145–193.
- [42] W. F. Wreszinski, “Passivity of ground states of quantum systems”, *Rev. Math. Phys.*, **17**:1 (2005), 1–14.
- [43] G. L. Sewell, *Quantum Mechanics and Its Emergent Macrophysics*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2002.

Поступила в редакцию 1.04.2017