Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Тареева, Т. И. Щелкачёва, p -Спиновое стекло спина единица: точное решение для больших p , *ТМФ*, 2018, том 194, номер 2, 295–303

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:25:22

© 2018 г.

Е. Е. Тареева*, Т. И. Щелкачева*

p -СПИНОВОЕ СТЕКЛО СПИНА ЕДИНИЦА: ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ БОЛЬШИХ p

Изучено низкотемпературное поведение p -спиновой модели спинового стекла для спина единица (три состояния) при больших значениях p . Показано, что фаза, соответствующая первому этапу нарушения репличной симметрии, неустойчива при очень низких температурах, и получена аналитически в явном виде нижняя граница интервала устойчивости (температура Гарднер) для больших значений p . Это значение температуры для модели спина единица имеет ту же форму зависимости от p , что и в случае изинговых спинов (для двух состояний). В состоянии, соответствующем первому этапу нарушения репличной симметрии, имеет место сосуществование обычного спинового стекла, квадрупольного ориентационного стекла и квадрупольного дальнего порядка, несмотря на то что квадрупольное взаимодействие в гамильтониане модели отсутствует.

Ключевые слова: спиновые стекла, квадрупольное стекло, метод реплик, переход Гарднер.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9380>

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель p -спинового стекла, в которой случайным образом взаимодействуют p изинговых спинов, была предложена в работах [1], [2] как естественное обобщение модели Шеррингтона–Киркпатрика (с $p = 2$) [3]. Наиболее интересным свойством p -спиновой модели является наличие температурного интервала, в котором решение, соответствующее первому этапу нарушения репличной симметрии (1НРС), устойчиво. В случае сферической p -спиновой модели этот интервал простирается до нуля температуры, а переход от реплико-симметричного (РС-) решения к 1НРС-решению

Работа Е. Е. Тареевой была поддержана Российским научным фондом (грант № 14-22-00093, разделы 3, 4), работа Т. И. Щелкачевой поддержана РФФИ (грант № 17-02-00320, раздел 2).

*Институт физики высоких давлений им. Л. Ф. Верещагина РАН, Троицк, Московская обл., Россия. E-mail: etare@ms2.inr.ac.ru

сопровождается скачком значений параметра порядка стекла [4]. В статьях [5]–[8] была замечена и исследована аналогия между спиновыми 1НРС-стеклами и реальными структурными стеклами. Эта аналогия легла в основу ряда равновесных теорий структурных стекол, включая наиболее популярную теперь теорию перехода первого рода в системах с беспорядком (RFOT) (см., например, обзоры [9]–[11]).

В случае, когда сферические условия на изинговые спины не накладываются [1], [2], интервал устойчивости 1НРС-решения становится конечным и увеличивается с ростом p . Для $p = 2$ он равен нулю. Низкотемпературная граница области стабильности 1НРС-решения для изинговых p -спиновых стекол и переход к решению с бесконечно или полностью нарушенной репличной симметрией (ПНРС) были обнаружены и описаны Гарднер [2]. В последние годы было показано, что переход Гарднер играет важную роль в равновесных теориях структурных стекол при высоком давлении. Было продемонстрировано, что в структурных стеклах существует третий переход, а именно переход Гарднер, который происходит в промежуточной (по плотности или давлению) области между переходом в стекло и переходом в несжимаемое состояние (jamming) [12]–[17]. Этот последний переход происходит при давлениях более высоких, чем давление Гарднер. Можно сказать, что при высоких давлениях именно несферические p -спиновые стекла становятся прототипом поведения реальных стекол. При очень низких температурах в случае спиновых стекол или при очень высоких давлениях в случае реальных стекол медленная динамика определяется устройством пространства состояний, соответствующим именно ПНРС [18].

Существующие работы [18]–[21] по переходу Гарднер в моделях типа p -спинового стекла, а также наш собственный опыт исследования подобных моделей [22]–[28] приводят нас к выводу, что переход Гарднер является феноменом, характерным для широкого класса моделей, хотя и с конкретными особенностями в каждом частном случае. В связи с этим и имея в виду возможное дальнейшее применение более общих результатов к реальным структурным стеклам, мы предприняли предлагаемое исследование поведения p -спинового стекла спина единица.

p -Спиновое стекло спина единица, т. е. с $S = 0, \pm 1$, является частным случаем задач, рассмотренных в работах [29], [30], так что некоторая часть наших результатов повторяет результаты этих работ. Однако, что очень существенно, авторы статей [29], [30] не обратили никакого внимания на очень важные моменты: на исследование устойчивости 1НРС-решения и существование перехода Гарднер в системе, а также на сосуществование спинового и квадрупольного стекол при чисто спиновом взаимодействии. Исследованию именно этих двух проблем и посвящена настоящая работа. Мы получаем в явном виде аналитическим путем температуру Гарднер как нижнюю границу 1НРС-состояния и показываем, что в системе сосуществуют спиновое и квадрупольное стекло. В контексте реальных стекол введение состояний частицы с $S = 0$ может рассматриваться как включение вакансий.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дано описание модели и получены основные уравнения с помощью обычного для теории спинового стекла метода реплик. Для больших p построены реплико-симметричное и 1НРС-решения. В разделе 3 исследована устойчивость 1НРС-решения. Для случая больших значений p в явном виде найдена низкотемпературная граница области устойчивости (температура Гарднер). В разделе 4 для 1НРС-решения продемонстрировано сосуществование спинового и ориентационного квадрупольного стекол.

2. МОДЕЛЬ. ПРЕДЕЛ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ *p* ДЛЯ РС- И 1НРС-РЕШЕНИЙ

Рассмотрим *p*-спиновую модель с гамильтонианом

$$H = - \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p} J_{i_1 \dots i_p} \hat{S}_{i_1} \hat{S}_{i_2} \dots \hat{S}_{i_p}. \quad (1)$$

Здесь $\hat{S}$ – диагональный оператор *z*-компоненты спина единица ($S = 0, +1, -1$), N – число узлов в решетке, $i = 1, 2, \dots, N$ и p – число взаимодействующих спинов. Независимые случайные взаимодействия $J_{i_1 \dots i_p}$ распределены по Гауссу:

$$P(J_{i_1 \dots i_p}) = \frac{\sqrt{N^{p-1}}}{\sqrt{p!} \pi J} \exp \left[- \frac{(J_{i_1 \dots i_p})^2 N^{p-1}}{p! J^2} \right]. \quad (2)$$

Используя стандартным образом метод реплик [3], запишем свободную энергию, усредненную по беспорядку, в виде

$$\begin{aligned} \frac{F}{NkT} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \max \left[- \frac{t^2}{4} \sum_{\alpha} \left(\frac{2 + y_{\alpha}}{3} \right)^p + t^2 \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \frac{2 + y_{\alpha}}{3} - \right. \\ \left. - \frac{t^2}{4} \sum_{\alpha \neq \beta} (q^{\alpha\beta})^p + t^2 \sum_{\alpha, \beta} q^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} - \ln \text{Tr} e^{\hat{\theta}} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\hat{\theta} = t^2 \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha\beta} \hat{S}_{\alpha} \hat{S}_{\beta} + t^2 \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \frac{2 + \hat{Q}_{\alpha}}{3}. \quad (4)$$

Здесь $\hat{Q}$ – оператор квадрупольного момента частицы, который появляется из-за того, что $(\hat{S}_{\alpha})^2 = (2 + \hat{Q}_{\alpha})/3$, $y_{\alpha} = \langle \langle \hat{Q}_{\alpha} \rangle \rangle$ – параметр дальнего квадрупольного порядка, $q^{\alpha\beta} = \langle \langle \hat{S}_{\alpha} \hat{S}_{\beta} \rangle \rangle$ – обычный параметр порядка спинового стекла. Множители Лагранжа $\lambda_{\alpha\beta}$ и μ_{α} возникают при определении параметров порядка $q^{\alpha\beta}$ и y_{α} с помощью δ -функций, $t = J/kT$. В дальнейшем мы используем также регулярный параметр дальнего порядка для спинов $x_{\alpha} = \langle \langle \hat{S}_{\alpha} \rangle \rangle$ и параметр порядка квадрупольного стекла $q_{\alpha\beta}^{(Q)} = \langle \langle \hat{Q}_{\alpha} \hat{Q}_{\beta} \rangle \rangle$. Вместо y_{α} мы иногда используем связанный с последним дополнительный параметр порядка $w_{\alpha} = \langle \langle (\hat{S}_{\alpha})^2 \rangle \rangle$, имея в виду возможность применения наших уравнений к другим моделям, а также для того, чтобы было удобнее использовать результаты наших работ [23]–[28]. Еще одним преимуществом использования этого параметра является тот факт, что $0 \leq w_{\alpha} \leq 1$.

Рассмотрим прежде всего случай симметричных реплик, когда

$$q^{\alpha\beta} = q, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda, \quad y_{\alpha} = y, \quad \mu_{\alpha} = \mu.$$

Из выражения (3) получаем реплико-симметричную свободную энергию в виде

$$- \frac{F_{\text{PC}}}{NkT} = \frac{t^2}{4} \left(\frac{2 + y}{3} \right)^p - \frac{t^2}{3} \mu (2 + y) - \frac{t^2}{4} q^p + \frac{t^2}{2} \lambda q + \int dz^G \ln \Psi_{\text{PC}}. \quad (5)$$

Здесь

$$\Psi_{\text{PC}} = 1 + 2e^{t^2(\mu - \lambda/2)} \text{ch}(tz\sqrt{\lambda}), \quad \int dz^G = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

Условия экстремума дают следующие уравнения для параметров порядка:

$$\mu = \frac{p}{4} \left(\frac{2+y}{3} \right)^{p-1}, \quad \lambda = \frac{p}{2} q^{p-1},$$

$$w \equiv \frac{2+y}{3} = \int dz^G \frac{2e^{t^2(\mu-\lambda/2)} \operatorname{ch}(tz\sqrt{\lambda})}{1 + 2e^{t^2(\mu-\lambda/2)} \operatorname{ch}(tz\sqrt{\lambda})}, \quad (6)$$

$$q = \int dz^G \left(\frac{2e^{t^2(\mu-\lambda/2)} \operatorname{sh}(tz\sqrt{\lambda})}{1 + 2e^{t^2(\mu-\lambda/2)} \operatorname{ch}(tz\sqrt{\lambda})} \right)^2. \quad (7)$$

В случае $p \rightarrow \infty$ уравнения можно решить точно, учитывая тот факт, что все параметры порядка входят в $\hat{\theta}$ и F в виде степеней q^p и w^p , а $0 \leq q \leq 1$ и $0 \leq w \leq 1$. Если мы предположим, что $q < 1$ и $w < 1$, то $q^p = w^p = 0$, и мы выводим из уравнений (6), (7) равенства $q = 0$ и $w = 2/3$ ($y = 0$). Другие параметры порядка x и $q^{(Q)}$, определяемые уравнением

$$q_{\text{PC}}^{(Q)} = \int dz^G \left\{ \frac{\operatorname{Tr}[\hat{Q}e^{\hat{\theta}_{\text{PC}}}]}{\operatorname{Tr} e^{\hat{\theta}_{\text{PC}}}} \right\}^2, \quad (8)$$

также оказываются равными нулю. Таким образом, мы получили полностью разупорядоченную парафазу со свободной энергией

$$\frac{F_{\text{PC}}}{NkT} = -\ln 3.$$

Существует еще одно реплико-симметричное решение. Если $0 \leq q < 1$, а $w = 1$, имеем $q^p = 0$, $w^p = 1$. В этом случае из уравнений (6), (7) нетрудно получить, что $q = 0$, $x = 0$, $w = 1$ ($y = 1$) и $q^{(Q)} = 1$. Эта фаза не упорядочена по спинам, но в ней присутствует регулярный дальний квадрупольный порядок. Квадрупольного стекла в этой фазе нет, так как $q^{(Q)} = y^2$. Заметим, что такой же по характеру упорядочения является высокотемпературная фаза в спиновом стекле спина единица в случае $p = 2$ [31].

В случае упомянутого выше второго решения свободная энергия имеет вид

$$\frac{F_{\text{PC}}}{NkT} = -\frac{J^2}{(2kT)^2} - \ln 2. \quad (9)$$

Важно подчеркнуть, что для этого решения вклад в упорядочение дают только спины в состояниях $S = +1, -1$, и результирующая свободная энергия (9) в точности совпадает с результатом для изинговых спинов [1], [2]. Именно от этого решения ответвляется 1НРС-решение.

Проведем теперь первый этап нарушения репличной симметрии [32] (n реплик делятся на n/m_1 групп по m_1 реплик в каждой группе) и получим выражение для свободной энергии. Параметры порядка для 1НРС обозначим $q^{\alpha\beta} = q_0$, если α и β принадлежат разным группам, и $q^{\alpha\beta} = q_1$, если α и β из одной группы, $w_1 \equiv w_{1\text{НРС}}$, $y_1 \equiv y_{1\text{НРС}}$, $x_1 \equiv x_{1\text{НРС}}$. Свободная энергия принимает вид

$$-\frac{F_{1\text{НРС}}}{NkT} = \frac{t^2}{4} \left(\frac{2+y_1}{3} \right)^p - \frac{t^2}{3} \mu(2+y_1) + \frac{t^2}{4} [(m_1-1)q_1^p - m_1q_0^p] -$$

$$- \frac{t^2}{2} \lambda_1(m_1-1)q_1 + \frac{t^2}{2} \lambda_0 m_1 q_0 + \frac{1}{m_1} \int dz^G \ln \int ds^G \Psi_{1\text{НРС}}^{m_1}. \quad (10)$$

Здесь

$$\Psi_{1\text{HPC}} = 1 + 2e^{t^2(\mu-\lambda_1/2)} \operatorname{ch} \omega, \quad \omega = tz\sqrt{\lambda_0} + ts\sqrt{\lambda_1 - \lambda_0}.$$

Условия экстремума для $F_{1\text{HPC}}$ дают следующие уравнения для параметров порядка:

$$q_0 = \int dz^G \left\{ \frac{\int ds^G \Psi_{1\text{HPC}}^{(m_1-1)} 2e^{t^2(\mu-\lambda_1/2)} \operatorname{sh} \omega}{\int ds^G \Psi_{1\text{HPC}}^{m_1}} \right\}^2, \quad (11)$$

$$q_1 = \int dz^G \frac{\int ds^G \Psi_{1\text{HPC}}^{(m_1-2)} 4e^{2t^2(\mu-\lambda_1/2)} \operatorname{sh}^2 \omega}{\int ds^G \Psi_{1\text{HPC}}^{m_1}}, \quad (12)$$

$$w_1 \equiv \frac{2 + y_1}{3} = \int dz^G \frac{\int ds^G \Psi_{1\text{HPC}}^{(m_1-1)} 2e^{t^2(\mu-\lambda_1/2)} \operatorname{ch} \omega}{\int ds^G \Psi_{1\text{HPC}}^{m_1}}. \quad (13)$$

Рассмотрим эти уравнения при $p \rightarrow \infty$. В соответствии с правилами Паризи [32] имеем $q_0 < q_1$. Таким образом, из формул (11)–(13) немедленно получаем для параметров порядка, что $q_0 = 0$, $q_1 = 1$, $y_1 = 1$. Мы пришли к фазе стекла с ненулевым параметром порядка спинового стекла $q_1 = 1$. В этой фазе сохранился дальний квадрупольный порядок.

Из выражения (10) можно получить свободную энергию

$$\frac{F_{1\text{HPC}}}{NkT} = -\frac{m_1 J^2}{(2kT)^2} - \frac{1}{m_1} \ln 2. \quad (14)$$

Она снова совпадает со свободной энергией аналогичной фазы для случая изинговых спинов [1], [2]. Выражение для m_1 можно легко вывести из условия экстремума для $F_{1\text{HPC}}/(NkT)$:

$$\frac{m_1^2 J^2}{(2kT)^2} = \ln 2. \quad (15)$$

При $m_1 = 1$ свободные энергии (9) и (14) равны между собой. Из равенства (15) получаем, что $kT_c/J = 1/(2\sqrt{\ln 2})$, поэтому комбинация $m_1 J/(2kT)$ не зависит от температуры и свободная энергия $F_{1\text{HPC}}$ не зависит от температуры при температурах ниже T_c . Все это в точности совпадает со случаем изинговых спинов [1], [2].

Наши решения (РС- и 1HPC-) представляют собой специальный случай результатов, полученных в работах [29], [30]. Однако наиболее интересные проблемы, касающиеся устойчивости 1HPC-решения, перехода Гарднер и возможности сосуществования квадрупольного и спинового стекол, в указанных статьях не исследовались. Перейдем теперь к их рассмотрению.

3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ 1HPC-РЕШЕНИЯ: ПЕРЕХОД ГАРДНЕР

Нарушим репличную симметрию еще раз и получим соответствующую свободную энергию $F_{2\text{HPC}}$. Разность свободных энергий $\Delta F_{12} = F_{2\text{HPC}} - F_{1\text{HPC}}$ вблизи точки неустойчивости 1HPC-решения можно представить в виде ряда по отклонениям параметров порядка и затем диагонализировать [33]. Точкой неустойчивости может оказаться точка, в которой коэффициент полученного ряда, соответствующий параметру порядка v_2 , связанному с нарушением внутригрупповой симметрии, перестает быть равным нулю. Это происходит в точке бифуркации, определяемой

интегральным уравнением для v_2 . Условие бифуркации $\lambda_{\text{1HPC repl}} = 0$, определяющее температуру неустойчивости $T = T_G$, означает, что появляется ненулевое малое решение для 2HPC-параметра порядка стекла. Величина $\lambda_{\text{1HPC repl}}$ является одним из собственных значений соответствующего гессиана (см. более подробно работы [23]–[28]). Имеем

$$\lambda_{\text{1HPC repl}} = 1 - \frac{t^2}{2} p(p-1)(q_1)^{(p-2)} \int dz^G \int ds^G [\text{Tr } e^{\theta_{\text{1HPC}}}]^{m_1} \times \\ \times \left\{ \frac{\text{Tr}(S^2 e^{\theta_{\text{1HPC}}})}{\text{Tr } e^{\theta_{\text{1HPC}}}} - \left[\frac{\text{Tr}(S e^{\theta_{\text{1HPC}}})}{\text{Tr } e^{\theta_{\text{1HPC}}}} \right]^2 \right\}^2 \left\{ \int ds^G (\text{Tr } e^{\theta_{\text{1HPC}}})^{m_1} \right\}^{-1}. \quad (16)$$

Значение $\lambda_{\text{1HPC repl}}$ зависит только от параметров 1HPC-решения. Из формулы (4) выводим теперь равенство $\theta_{\text{1HPC}} = st\sqrt{p/2}$. 1HPC-решение устойчиво, если верно неравенство $\lambda_{\text{1HPC repl}} > 0$.

Легко видеть, что в пределе бесконечно больших p 1HPC-стекло устойчиво при всех температурах, кроме $T = 0$. При больших, но конечных значениях p условие $\lambda_{\text{1HPC repl}} > 0$ нарушается при температуре $T_G \neq 0$. Эту температуру перехода Гарднер T_G можно вычислить в явном виде из условия $\lambda_{\text{1HPC repl}} = 0$. Согласно выражению (16) имеем

$$\lambda_{\text{1HPC repl}} = 1 - \frac{t^2}{2} p(p-1) \frac{\int ds^G (\Psi(s))^{m-4} (3 + \Psi(s))^4}{\int ds^G (\Psi(s))^m}, \quad (17)$$

где

$$\Psi(s) \equiv \text{Tr } e^{\hat{\theta}_{\text{1HPC repl}}} = 1 + 2 \text{ch} \left(st \sqrt{\frac{p}{2}} \right). \quad (18)$$

Уравнение (17) можно представить в форме, которая демонстрирует то, что его асимптотическое поведение аналогично поведению асимптотики соответствующего уравнения из работы [2]:

$$0 = 1 - \frac{t^2}{2} p(p-1) \frac{\int ds^G 16(1 + 2 \text{ch}(st\sqrt{p/2}))^{m-4} (2 + \text{ch}(st\sqrt{p/2}))^4}{\int ds^G \Psi(s)(1 + 2 \text{ch}(st\sqrt{p/2}))^m}. \quad (19)$$

Определяя температуру перехода, мы учитываем, что при больших p величины T и m малы. При больших p интегралы $\int ds^G \Psi(s)^\eta$ для $\eta > 0$ приближенно равны 2×2^p , а для $\eta < 0$ они пропорциональны $1/\sqrt{\pi p}$. Учитывая это и проводя суммирование числовых рядов, представляющих коэффициенты, не зависящие от p , мы получаем окончательное уравнение для низкотемпературного предела устойчивости 1HPC-фазы:

$$1 = \frac{p^{3/2} t}{4\sqrt{\pi} 2^p} \left(\frac{5}{6} - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \right),$$

так что

$$\frac{kT_G}{J} = \frac{0.1076}{\sqrt{\pi}} \frac{p^{3/2}}{2^p}. \quad (20)$$

Мы видим, что функциональный вид зависимости температуры Гарднер от p (20) имеет ту же форму, что и в случае изинговых спинов. Интересно заметить, что вклад в значения параметров порядка от всех проекций спинов имеет место только

при высоких температурах. При низких температурах и больших p основной вклад происходит только от крайних значений $(+1, -1)$. Весьма вероятно, что такое поведение окажется характерным и для более высоких спинов.

4. КВАДРУПОЛЬНОЕ СТЕКЛО

Главным отличием модели со спином единица от случая изинговских спинов является наличие квадрупольного упорядочения. Напомним, что взаимодействие квадруполей в исходном гамильтониане модели отсутствует. Определим, используя представление о квазисредних [34], параметр порядка ориентационного квадрупольного стекла в 1НРС-состоянии с помощью обобщения формулы (11):

$$q_0^{(Q)} = \int dz^G \left\{ \frac{\int ds^G [\text{Tr } e^{\hat{\theta}_{1\text{НРС repl}}}]^{m_1-1} [\text{Tr } \hat{Q} e^{\hat{\theta}_{1\text{НРС repl}}}]}{\int ds^G [\text{Tr } e^{\hat{\theta}_{1\text{НРС repl}}}]^{m_1}} \right\}^2,$$

$$q_1^{(Q)} = \int dz^G \frac{\int ds^G [\text{Tr } e^{\hat{\theta}_{1\text{НРС repl}}}]^{m_1-2} [\text{Tr } \hat{Q} e^{\hat{\theta}_{1\text{НРС repl}}}]^2}{\int ds^G [\text{Tr } e^{\hat{\theta}_{1\text{НРС repl}}}]^{m_1}}.$$

Регулярный дальний квадрупольный порядок определяется параметром y_1 , введенным с помощью выражения (13). Функция $\theta_{1\text{НРС}}$ (4) не меняется, так как никакого нового взаимодействия в гамильтониан мы не ввели.

Появление квадрупольного стекла означает замену $q^{(Q)} = y^2$ на неравенство $q^{(Q)} > y^2$. Мы рассматриваем наше 1НРС-решение и случай больших, но конечных значений p . Для доказательства факта наличия квадрупольного стекла удобно переписать уравнения для параметров порядка y_1 и $q_1^{(Q)}$ (при $q_1^{(Q)} > q_0^{(Q)}$) в следующем виде:

$$y_1 = 1 - 3 \frac{\int ds^G (\Psi(s))^{m-1}}{\int ds^G (\Psi(s))^m}, \quad (21)$$

$$q_1^{(Q)} = 1 - 6 \frac{\int ds^G (\Psi(s))^{m-1}}{\int ds^G (\Psi(s))^m} + 9 \frac{\int ds^G (\Psi(s))^{m-2}}{\int ds^G (\Psi(s))^m}, \quad (22)$$

где $\Psi(s)$ дается соотношением (19). Теперь

$$q_1^{(Q)} - y_1^2 = 9 \left[\frac{\int ds^G (\Psi(s))^{m-2}}{\int ds^G (\Psi(s))^m} - \left(\frac{\int ds^G (\Psi(s))^{m-1}}{\int ds^G (\Psi(s))^m} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Будем далее действовать так же, как при получении температуры Гарднер. При больших p интегралы $\int ds^G (\Psi(s))^\eta$ при $\eta < 0$ пропорциональны $1/\sqrt{\pi p}$, так что рассматриваемую разность можно записать в виде

$$q_1^{(Q)} - y_1^2 = 9 \left[\frac{\Sigma_1}{\sqrt{\pi p} 2^p} - \left(\frac{\Sigma_2}{\sqrt{\pi p} 2^p} \right)^2 \right] > 0, \quad (24)$$

где Σ_i обозначают сходящиеся суммы, в которые не входит зависимость от p и явные значения которых не важны для больших p . Таким образом, мы показали наличие квадрупольного стекла в рассматриваемом случае. Заметим, что впервые факт существования дальнего квадрупольного порядка и квадрупольного стекла в чисто спиновой системе с гамильтонианом (1) был обнаружен в работе [31] для $p = 2$ в РС-приближении.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы провели подробное исследование низкотемпературной фазовой диаграммы p -спиновой модели спинового стекла для случая спина единица (случай трех состояний) при больших значениях p . Мы показали, что фаза, соответствующая 1НРС, становится неустойчивой при низких температурах. В явном виде аналитически вычислена низкотемпературная граница этой фазы (температура Гарднер). Эта температура неустойчивости имеет ту же функциональную зависимость от p , что и в случае изинговых спинов (для двух состояний). Гамильтониан модели содержит только взаимодействие спинов, но тем не менее в 1НРС-состоянии присутствует не только квадрупольное ориентационное стекло, но и регулярный дальний квадрупольный порядок.

Интересно, что вклад в параметры порядка все три состояния дают только при высоких температурах и конечных p . При низких температурах и больших p стекло ведет себя так, как если бы в нем было два состояния, соответствующих значениям $+1$ и -1 . Это делает поведение модели похожим на поведение в изинговом случае. Весьма важным отличием является, однако, сосуществование в 1НРС-фазе спинового стекла, квадрупольного стекла и дальнего квадрупольного порядка.

Благодарности. Авторы благодарны В. Н. Рыжову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] D. J. Gross, M. Mezard, "The simplest spin glass", *Nucl. Phys. B*, **240**:4 (1984), 431–452.
- [2] E. Gardner, "Spin glasses with p -spin interactions", *Nucl. Phys. B*, **257**:6 (1985), 747–765.
- [3] D. Sherrington, S. Kirkpatrick, "Solvable model of a spin-glass", *Phys. Rev. Lett.*, **35**:26 (1975), 1792–1796; S. Kirkpatrick, D. Sherrington, "Infinite-ranged models of spin-glasses", *Phys. Rev. B*, **17**:11 (1978), 4384–4403.
- [4] A. Crisanti, H.-J. Sommers, "The spherical p -spin interaction spin glass model: the statics", *Z. Phys. B Condens. Matter*, **87**:3 (1992), 341–354.
- [5] T. R. Kirkpatrick, P. G. Wolynes, "Connection between some kinetic and equilibrium theories of the glass transition", *Phys. Rev. A*, **35**:7 (1987), 3072–3080.
- [6] T. R. Kirkpatrick, P. G. Wolynes, "Stable and metastable states in mean-field Potts and structural glasses", *Phys. Rev. B*, **36**:16 (1987), 8552–8564.
- [7] T. R. Kirkpatrick, D. Thirumalai, "Dynamics of the structural glass transition and the p -spin-interaction spin-glass model", *Phys. Rev. Lett.*, **58**:20 (1987), 2091–2094.
- [8] T. R. Kirkpatrick, D. Thirumalai, P. G. Wolynes, "Scaling concepts for the dynamics of viscous liquids near an ideal glassy state", *Phys. Rev. A*, **40**:2 (1989), 1045–1054.
- [9] G. Parisi, F. Zamponi, "Mean field theory of hard sphere glasses and jamming", *Rev. Modern Phys.*, **82**:1 (2010), 789–845.
- [10] P. G. Wolynes, V. Lubchenko, *Structural Glasses and Supercooled Liquids: Theory, Experiment, and Applications*, Hoboken, NJ, John Wiley and Sons, 2012.
- [11] L. Berthier, G. Biroli, "Theoretical perspective on the glass transition and amorphous materials", *Rev. Modern Phys.*, **83**:2 (2011), 587–645.
- [12] J. Kourchan, G. Parisi, P. Urbani, F. Zamponi, "Exact theory of dense amorphous hard spheres in high dimension. II. The high density regime and the Gardner transition", *J. Phys. Chem. B*, **117**:42 (2013), 12979–12994.
- [13] P. Charbonneau, J. Kourchan, G. Parisi, P. Urbani, F. Zamponi, "Fractal free energy landscapes in structural glasses", *Nat. Commun.*, **5** (2014), 3725, 6 pp.

- [14] P. Charbonneau, Y. Jin, G. Parisi, C. Rainone, B. Seoane, F. Zamponi, “Numerical detection of the Gardner transition in a mean-field glass former”, *Phys. Rev. E*, **92**:1 (2015), 012316, 15 pp.
- [15] P. Charbonneau, J. Kurchan, G. Parisi, P. Urbani, F. Zamponi, “Exact theory of dense amorphous hard spheres in high dimension. III. The full replica symmetry breaking solution”, *J. Stat. Mech. Theor. Exp.*, **2014**:10 (2014), P10009, 75 pp.
- [16] C. Rainone, P. Urbani, H. Yoshino, F. Zamponi, “Following the evolution of glassy states under external perturbations: compression and shear-strain”, *Phys. Rev. Lett.*, **114**:1 (2015), 015701, 5 pp.
- [17] P. Urbani, G. Biroli, “Gardner transition in finite dimensions”, *Phys. Rev. B*, **91**:10 (2015), 100202, 5 pp.
- [18] A. Montanari, F. Ricci-Tersenghi, “On the nature of the low-temperature phase in discontinuous mean-field spin glasses”, *Eur. Phys. J. B*, **33**:3 (2003), 339–346.
- [19] A. Montanari, F. Ricci-Tersenghi, “Cooling-schedule dependence of the dynamics of mean-field glasses”, *Phys. Rev. B*, **70**:13 (2004), 134406, 8 pp.
- [20] T. Rizzo, “Replica-symmetry-breaking transitions and off-equilibrium dynamics”, *Phys. Rev. E*, **88**:3 (2013), 032135, 12 pp.
- [21] D. J. Gross, I. Kanter, H. Sompolinsky, “Mean-field theory of the Potts glass”, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:3 (1985), 304–307.
- [22] N. V. Gribova, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, “Low-temperature phase transition in the three-state Potts glass”, *Phys. Rev. E*, **68**:6 (2003), 067103, 4 pp.
- [23] T. I. Schelkacheva, N. M. Chtchelkatchev, “Replica analysis of the generalized p -spin interaction glass model”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:44 (2011), 445004, 14 pp.
- [24] T. I. Schelkacheva, E. E. Tareyeva, N. M. Chtchelkatchev, “Full versus first-stage replica symmetry breaking in spin glasses”, *Phys. Rev. B*, **82**:13 (2010), 134208, 5 pp.
- [25] T. I. Schelkacheva, E. E. Tareyeva, N. M. Chtchelkatchev, “Pressure-induced orientational glass phase in molecular para-hydrogen”, *Phys. Rev. E*, **79**:2 (2009), 021105, 7 pp.
- [26] E. E. Tareyeva, T. I. Schelkacheva, N. M. Chtchelkatchev, “Continuous and discontinuous transitions in generalized p -spin glass models”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:7 (2014), 075002, 12 pp.
- [27] T. I. Schelkacheva, E. E. Tareyeva, N. M. Chtchelkatchev, “Generalized Sherrington–Kirkpatrick glass without reflection symmetry”, *Phys. Rev. E*, **89**:4 (2014), 042149, 5 pp.
- [28] Е. Е. Тареева, Т. И. Щелкачёва, Н. М. Щелкачёв, “Некоторые особенности поведения неизинговых спиновых стекол”, *ТМФ*, **182**:3 (2015), 500–512.
- [29] P. Mottishaw, “First-order spin-glass transitions: an exact solution”, *Europhys. Lett.*, **1**:8 (1986), 409–414.
- [30] J. M. de Araújo, F. A. da Costa, F. D. Nobre, “First-order transitions and triple point on a random p -spin interaction model”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**:10 (2000), 1987.
- [31] Е. А. Лучинская, Е. Е. Тареева, “Спиновое стекло с $S = 1$ ”, *ТМФ*, **90**:2 (1992), 273–277.
- [32] G. Parisi, “A sequence of approximated solutions to the S-K model for spin glasses”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **13**:4 (1980), L115–L121.
- [33] J. R. L. Almeida, D. J. Thouless, “Stability of the Sherrington–Kirkpatrick solution of a spin glass model”, *J. Phys. A*, **11**:5 (1978), 983–990.
- [34] Н. Н. Боголюбов, “Квазисредние в задачах статистической механики”, *Собрание научных трудов в 12 томах. Статистическая механика*, т. 6: *Равновесная статистическая механика*, 1945–1986, Наука, М., 2006, 236–327.