Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова–Заболотской, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 3, 403–417

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 06:04:18

© 2018 г.

М. О. Корпусов*

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА–ЗАБОЛОТСКОЙ

Рассмотрена серия нелинейных эволюционных уравнений, которые объединяет наличие нелинейности вида $\partial^2 u^2 / \partial t^2$. Такая нелинейность присутствует в уравнении Хохлова–Заболотской, в других уравнениях теории нелинейных волн в жидкости, а также в уравнениях теории электромагнитных волн и ионно-звуковых волн в плазме. Рассмотрены достаточные условия возникновения режима blow up и найдены начальные функции, для которых решение, понимаемое в классическом смысле, отсутствует вовсе, даже локально во времени, т. е. изучен вопрос о мгновенном разрушении классических решений.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, нелинейные волны, мгновенное разрушение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9384>

1. ВВЕДЕНИЕ

В модельные нелинейные уравнения теории волн, например в уравнения акустических волн, входят некоэрцитивные нелинейности, т. е. нелинейности, устроенные гораздо более сложным образом, чем степенные. Настоящая работа посвящена качественному исследованию некоторого класса таких уравнений. Мы рассматриваем нелинейное уравнение акустических волн (см., например, монографии [1] и [2]), имеющее следующий вид:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\varepsilon}{c_0^4 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где $p = p(w, t)$ – это давление в среде, ε – так называемый нелинейный акустический параметр, ρ_0 – равновесная плотность в среде, c_0 – равновесная скорость звука.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м-2011).

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: korpusov@gmail.com

Здесь и далее в статье $w = (x, y, z)$. Другим важным уравнением, которое мы рассматриваем, является широко известное уравнение Хохлова–Заболотской, имеющее следующий вид [1], [3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x} - \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2}, \quad \tau = t - \frac{x}{c_0}, \quad (1.2)$$

где $u = u(w, t)$ – это компонента вдоль направления оси Ox скорости жидкости. Наконец, третье уравнение, которое мы исследуем, – это модельное нелинейное уравнение теории ионно-звуковых волн в плазме [4]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \varphi - \varepsilon \varphi - \frac{\varepsilon^2}{2} \varphi^2 \right) + \Delta \varphi = 0, \quad (1.3)$$

где $\varphi(w, t)$ – это потенциал электрического поля, а $\varepsilon = 1/r_D^2$ – малый параметр; здесь

$$r_D = \left(\frac{kT_e}{4\pi e^2 n_0} \right)^{1/2}$$

есть дебаевский радиус.

Все три уравнения объединяет наличие некоэрцитивной нелинейности вида второй производной $\partial^2 v^2 / \partial t^2$ от квадрата функции v . Мы рассматриваем задачи Коши для этих уравнений, а также смешанные краевые задачи в ограниченных областях. Для всех рассматриваемых задач мы получаем достаточные условия возникновения режима blow up и предъявляем класс начальных условий, при которых классические решения отсутствуют даже локально во времени. С точки зрения физики это означает, что такие начальные условия невозможно создать на практике.

При исследовании достаточных условий возникновения режима blow up мы будем пользоваться методом нелинейной емкости Похожаева и Митидиери [5]. Отметим, что вопрос о достаточных условиях возникновения режима blow up для уравнения Хохлова–Заболотской (1.2), а также начальные условия, при которых имеет место мгновенное разрушение решений задачи Коши, были нами исследованы в работе [6] (см. также работу [7]).

2. РАЗРУШЕНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ (1.1)–(1.3)

Сначала рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1), которая в классическом смысле $p(w, t) \in \mathbb{C}_{w,t}^{2,2}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ имеет следующий вид:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\varepsilon}{c_0^4 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}, \quad p(w, 0) = p_0(w), \quad p'(w, 0) = p_1(w), \quad (2.1)$$

где $w \in \mathbb{R}^3$ и $t > 0$. Прежде чем давать слабую постановку задачи Коши, перепишем уравнение (2.1) в следующем виде:

$$-a \Delta(p - b) = \frac{\partial^2 (p - b)^2}{\partial t^2}, \quad a := \frac{c_0^4 \rho_0}{\varepsilon}, \quad b := \frac{c_0^2 \rho_0}{2\varepsilon}. \quad (2.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Слабым решением* задачи Коши для уравнения (2.1) называется функция $p(w, t) \in L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))$, удовлетворяющая равенству

$$\begin{aligned} & -a \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (p(w, t) - b) \Delta_w \phi(w, t) dw dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [2(p_0(w) - b)p_1(w)\phi(w, 0) - (p_0(w) - b)^2 \phi'_t(w, 0)] dw = \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi''_{tt}(w, t)(p(w, t) - b)^2 dw dt \quad (2.3) \end{aligned}$$

для всех функций $\phi(w, t) \in \mathbb{C}^2_{w,t}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, которые удовлетворяют условиям $\phi(w, T) = \phi'_t(w, T) = 0$ и $\text{supp}_w \phi(w, t) \subset K \subset \mathbb{R}^3$ равномерно по $t \in [0, T]$, где K — это компакт, свой для каждой фиксированной пробной функции $\phi(w, t)$; в (2.3) начальные функции $p_0(w), p_1(w) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Прежде всего отметим, что справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Всякое классическое решение $p(w, t) \in \mathbb{C}^{2,2}_{w,t}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ задачи Коши (2.1) является слабым решением $p(w, t) \in L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))$ задачи (2.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p(w, t) \in \mathbb{C}^{2,2}_{w,t}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, то $p(w, t) \in L^2(0, T; L^2(K))$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^3$, т.е. $p(w, t) \in L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))$. Теперь осталось умножить обе части уравнения (2.2) на пробную функцию $\phi(w, t)$, удовлетворяющую условиям определения 1, и после интегрирования по частям с учетом начальных условий прийти к равенству (2.3). Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если $p_1(w) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $p_0(w) - b \in L^2(\mathbb{R}^3)$, то при выполнении условия*

$$\int_{\mathbb{R}^3} (p_0(w) - b)p_1(w) dw < 0 \quad (2.4)$$

время существования слабого решения конечно и имеет место следующая оценка сверху:

$$T \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (p_0(w) - b)^2 dw}{-\int_{\mathbb{R}^3} (p_0(w) - b)p_1(w) dw}. \quad (2.5)$$

Если же $p_0(w) = b$, то слабое решение уравнения (2.3) имеет вид

$$p(w, t) = b \quad \text{для почти всех } (w, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T] \quad (2.6)$$

при произвольном $T > 0$, т.е. слабое решение существует глобально во времени. Однако если при этом $p_1(w) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ и $p_1(w) \not\equiv 0$ для $w \in \mathbb{R}^3$, то отсутствует локальное во времени классическое решение задачи Коши (2.1), т.е. имеет место мгновенное разрушение классического решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала сделаем общее предположение, что $p_1(w) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $p_0(w) - b \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Теперь выберем пробную функцию $\phi(w, t)$ из определения 1 специальным образом. Пусть

$$\begin{aligned}\phi(w, t) &= \phi_R(w)\phi_T(t), \\ \phi_T(t) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \phi_R(x) = \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \\ \phi_0(s) &= \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq 1/2; \\ 0, & \text{если } s \geq 1, \end{cases} \quad \phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, +\infty).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Пользуясь неравенством Гёльдера, можно получить следующее неравенство:

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (p(w, t) - b) \Delta_w \phi(w, t) dw dt \right| \leq c_1(R) c_2(T) I_R^{1/2}, \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}c_1(R) &:= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_w \phi_R(w)|^2}{\phi_R(w)} dw \right)^{1/2} = R^{-1/2} c_0, \\ c_0 &:= \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi \right)^{1/2}, \\ c_2(T) &:= \left(\int_0^T \phi_T^2(t) dt \right)^{1/2} = \left(\frac{T}{5} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

и

$$I_R := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (p(w, t) - b)^2 \phi_R(w) dw dt.$$

Кроме того, в силу теоремы Лебега имеет место следующее предельное соотношение при $R \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}J_R &:= \int_{\mathbb{R}^3} [2(p_0(w) - b)p_1(w)\phi(w, 0) - (p_0(w) - b)^2 \phi'_t(w, 0)] dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[2(p_0(w) - b)p_1(w) + \frac{2}{T}(p_0(w) - b)^2 \right] \phi_R(w) dw \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \left[2(p_0(w) - b)p_1(w) + \frac{2}{T}(p_0(w) - b)^2 \right] dw := J_\infty.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Таким образом, из равенства (2.3) мы получаем неравенство

$$ac_0 R^{-1/2} c_2(T) I_R^{1/2} + J_R \geq \frac{2}{T^2} I_R, \tag{2.10}$$

которое эквивалентно

$$\frac{T^2}{2} \left(\frac{T}{5} \right)^{1/2} ac_0 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \frac{T^2}{2} J_R \geq I_R. \tag{2.11}$$

Воспользуемся неравенством $ab \leq \epsilon a^2 + b^2/4\epsilon$, верным для $a, b \geq 0$, и получим оценку

$$\frac{T^2}{2} \left(\frac{T}{5} \right)^{1/2} a c_0 R^{-1/2} I_R^{1/2} \leq \epsilon I_R + \frac{1}{4\epsilon} \frac{T^5}{20} a^2 c_0^2 R^{-1},$$

из которой в свою очередь имеем (при $\epsilon = 1/2$)

$$0 \leq I_R \leq T^2 J_R + \frac{T^5}{20} a^2 c_0^2 R^{-1} \leq M < +\infty, \quad (2.12)$$

где $M > 0$ и не зависит от $R > 0$. Положим теперь $R = N \in \mathbb{N}$ и введем следующую последовательность функций: $f_N(w, t) := (p(w, t) - b)^2 \phi_N(w)$;

$$0 \leq f_N(w, t) \leq f_{N+1}(w, t) \quad \text{для почти всех } (w, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]. \quad (2.13)$$

Из (2.12) получим неравенство

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f_N(w, t) dw dt \leq M < +\infty. \quad (2.14)$$

На основании соотношений (2.13) и (2.14) и теоремы Беппо Леви приходим к выводу о том, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f_N(w, t) dw dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(w, t) dw dt, \quad (2.15)$$

где $f(w, t) := (p(w, t) - b)^2$. Отсюда и из неравенства (2.11) с учетом предельного свойства (2.9) мы получаем следующую априорную оценку:

$$T^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[(p_0(w) - b) p_1(w) + \frac{1}{T} (p_0(w) - b)^2 \right] dw \geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (p(w, t) - b)^2 dw dt. \quad (2.16)$$

Проанализируем эту априорную оценку. Действительно, если выполнено неравенство (2.4), то вследствие неотрицательности правой части (2.16) приходим к оценке сверху (2.5). Если же $p_0(w) = b$, то, очевидно, из априорной оценки вытекает равенство (2.6). Если при этом $p_1(w) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ и $p_1(w) \not\equiv 0$ для $w \in \mathbb{R}^3$, то отсутствует локальное во времени классическое решение задачи Коши, поскольку иначе мы пришли бы к противоречивым условиям $p(w, t) = b$, $p'_t(w, t) = 0$ и $p'_t(w, 0) = p_1(w) \not\equiv 0$. Теорема доказана.

Теперь мы рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.2) Хохлова–Заболотской, в котором функция $u(w, \tau) \in \mathbb{C}_{y,z,\tau}^{2,2,2}(\mathbb{R}^2 \times [0, T]) \cap \mathbb{C}_\tau^1([0, T]; \mathbb{C}_x^1(\mathbb{R}^1))$ в классическом смысле удовлетворяет следующей задаче:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x} - \frac{c_0}{2} \Delta_\perp u = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad w \in \mathbb{R}^3, \quad \tau > 0, \quad (2.17)$$

$$u(w, 0) = u_0(w), \quad u'_\tau(w, 0) = u_1(w). \quad (2.18)$$

Дадим определение слабого решения задачи Коши (2.17), (2.18).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Слабым решением задачи Коши для уравнения (2.17) называется функция $u(w, \tau) \in L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))$, удовлетворяющая равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(w, \tau) \phi'_{x\tau}(w, \tau) dw d\tau - \frac{c_0}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(w, \tau) \Delta_{\perp} \phi(w, \tau) dw d\tau + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0(w) \phi_x(w, 0) + \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_1(w) u_0(w) \phi(w, 0) - \frac{\varepsilon}{2c_0^2} u_0^2(w) \phi'_\tau(w, 0) \right] dw = \\ & = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(w, \tau) \phi''_{\tau\tau}(w, \tau) dw d\tau \end{aligned} \quad (2.19)$$

для всех функций $\phi(w, \tau) \in \mathbb{C}^{2,2,2}_{y,z,\tau}(\mathbb{R}^2 \times [0, T]) \cap \mathbb{C}^1_{\tau}([0, T]; \mathbb{C}^1_x(\mathbb{R}^1))$, которые удовлетворяют условиям $\phi(w, T) = \phi'_\tau(w, T) = 0$ и $\text{supp}_w \phi(w, \tau) \subset K \subset \mathbb{R}^3$ равномерно по $\tau \in [0, T]$, где K – это компакт, свой для каждой фиксированной пробной функции $\phi(w, \tau)$; в (2.19) начальные функции $u_0(w), u_1(w) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Имеет место следующая лемма, доказательство которой в точности повторяет доказательство леммы 1.

ЛЕММА 2. Всякое классическое решение

$$u(w, \tau) \in \mathbb{C}^{2,2,2}_{y,z,\tau}(\mathbb{R}^2 \times [0, T]) \cap \mathbb{C}^1_{\tau}([0, T]; \mathbb{C}^1_x(\mathbb{R}^1))$$

является слабым решением из класса $u(w, \tau) \in L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))$ в смысле определения 2.

Наконец, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если $u_1(w) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_0(w) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, то при выполнении условия

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_0(w) u_1(w) dw < 0 \quad (2.20)$$

время существования слабого решения (2.19) конечно и имеет место следующая оценка сверху:

$$T \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^3} u_0^2(w) dw}{-\int_{\mathbb{R}^3} u_0(w) u_1(w) dw}. \quad (2.21)$$

Если же $u_0(w) = 0$, то слабое решение равенства (2.19) имеет вид

$$u(w, \tau) = 0 \quad \text{для почти всех } (w, \tau) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T] \quad (2.22)$$

при произвольном $T > 0$, т. е. слабое решение существует глобально во времени. Однако если при этом $u_1(w) \in \mathbb{C}^{1,2,2}_{x,y,z}(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_1(w) \not\equiv 0$ для $w \in \mathbb{R}^3$, то отсутствует локальное во времени классическое решение задачи Коши (2.17), т. е. имеет место мгновенное разрушение классического решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве пробной функции возьмем следующую:

$$\phi(w, \tau) = \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 \phi_1(w), \quad \phi_1(w) := \phi_0 \left(\frac{x^2}{R^4} + \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right),$$

где

$$\phi_0(s) := \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq 1/2, \\ 0, & \text{если } s \geq 1, \end{cases} \quad \phi_0(s) \in \mathbb{C}^\infty[0, +\infty).$$

Подставим эту пробную функцию в равенство (2.19) и получим

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{T} \int_0^T \int_{B_R} u(w, \tau) \phi_{1x}(w) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) dw d\tau + \int_{B_R} u_0(w) \phi_{1x}(w) dw + \\ & + \frac{\varepsilon}{c_0^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0(w) u_1(w) + \frac{u_0^2(w)}{T} \right) \phi_1(w) dw - \\ & - \frac{c_0}{2} \int_0^T \int_{B_R} u(w, \tau) \Delta_\perp \phi_1(w) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 dw d\tau = \\ & = \frac{1}{T^2} \frac{\varepsilon}{c_0^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(w, \tau) \phi_1(w) dw. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь мы использовали обозначение

$$B_R := \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{R^4} + \frac{y^2 + z^2}{R^2} \leq 1 \right\}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{B_R} u(w, t) \phi_{1x}(w) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) dw d\tau \right| \leq \\ & \leq \left(\int_0^T \int_{B_R} \frac{|\phi_{1x}(w)|^2}{\phi_1(w)} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 dw d\tau \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \\ & \left| \int_0^T \int_{B_R} u(w, \tau) \Delta_\perp \phi_1(w) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 dw d\tau \right| \leq \\ & \leq \left(\int_0^T \int_{B_R} \frac{|\Delta_\perp \phi_1(w)|^2}{\phi_1(w)} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^4 dw d\tau \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \\ & \left| \int_{B_R} u_0(w) \phi_{1x}(w) dw \right| \leq \left(\int_{B_R} u_0^2(w) dw \right)^{1/2} \left(\int_{B_R} |\phi_{1x}(w)|^2 dw \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$I_R := \int_0^T \int_{B_R} u^2(w, t) \phi_1(w) dw d\tau.$$

Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$I_R = \int_0^T \int_{B_R} u^2(w, \tau) \phi_1(w) dw d\tau \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(w, \tau) \phi_1(w) dw d\tau := I.$$

Из полученных оценок вытекает, что

$$\begin{aligned} & \frac{2c_0^2 T}{\varepsilon} c_3(R, T)^{1/2} I_R^{1/2} + \frac{c_0^3 T^2}{2\varepsilon} c_4^{1/2}(R, T) I_R^{1/2} + \frac{c_0^2 T^2}{\varepsilon} a_0 + \\ & + T^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0(w) u_1(w) + \frac{1}{T} u_0^2(w) \right) \phi_1(w) dw \geq I, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 c_3(R, T) &:= \int_0^T \int_{B_R} \frac{|\phi_{1x}(w)|^2}{\phi_1(w)} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 dw d\tau = R^{4-4} T c_5, \\
 c_4(R, T) &:= \int_0^T \int_{B_R} \frac{|\Delta_\perp \phi_1(w)|^2}{\phi_1(w)} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^4 dw d\tau = R^{4-4} T c_6, \\
 c_5 &:= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2} \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\phi_{0\xi}(|\xi|^2)|}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \quad c_6 := \frac{1}{5} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\perp \xi \phi_0(|\xi|^2)|}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \\
 a_0 &:= \left(\int_{B_R} u_0^2(w) dw \right)^{1/2} \left(\int_{B_R} |\phi_{1x}(w)|^2 dw \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Используя арифметическое неравенство Гёльдера $ab \leq \epsilon a^2 + b^2/4\epsilon$ с параметром $\epsilon = 1/4$, получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2c_0^2 T^2}{\epsilon} \right)^2 c_3(R, T) + \frac{1}{4} I + \left(\frac{c_0^3 T^2}{2\epsilon} \right)^2 c_4(R, T) + \frac{1}{4} I + \frac{c_0^2 T^2}{\epsilon} a_0 + \\
 + T^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0(w) u_1(w) + \frac{1}{T} u_0^2(w) \right) \phi_1(w) dw \geq I.
 \end{aligned}$$

Отсюда при $u_0(w), u_1(w) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ в силу теоремы Лебега

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \left(\int_{B_R} u_0^2(w) dw \right)^{1/2} \left(\int_{B_R} |\phi_{0x}(w)|^2 dw \right)^{1/2} = \\
 &= \left(\int_{B_R} u_0^2(w) dw \right)^{1/2} \left(R^{4-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\phi_{0\xi_1}(|\xi|^2)| \right)^{1/2} \rightarrow +0.
 \end{aligned}$$

Кроме того, в силу теоремы Лебега

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0(w) u_1(w) + \frac{1}{T} u_0^2(w) \right) \phi_0(w) dw \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0(w) u_1(w) + \frac{1}{T} u_0^2(w) \right) dw.$$

Применяя теорему Бешпо Леви, получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 2 \left(\frac{2c_0^2 T^2}{\epsilon} \right)^2 T c_5 + 2 \left(\frac{c_0^3 T^2}{2\epsilon} \right)^2 T c_6 + \\
 + 2T^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0(w) u_1(w) + \frac{1}{T} u_0^2(w) \right) dw \geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(w, \tau) dw d\tau.
 \end{aligned}$$

Из этой априорной оценки в силу той же теоремы Бешпо Леви получаем предельное свойство

$$I_R = \int_0^T \int_{B_R} u^2(w, \tau) \phi_1(w) dw d\tau \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty.$$

Заметим, что ранее мы вывели неравенство (2.24), из которого предельным переходом получаем итоговое априорное неравенство

$$T^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0(w) u_1(w) + \frac{1}{T} u_0^2(w) \right) dw \geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(w, \tau) dw d\tau. \quad (2.25)$$

Далее нужно провести анализ этой априорной оценки, который в точности повторяет анализ априорной оценки (2.16). В результате получаем утверждение теоремы.

Дадим теперь определение слабого решения следующей задачи Коши в классической постановке для функции $u(w, t) \in \mathbb{C}_t^2([0, T]; \mathbb{C}_w^2(\mathbb{R}^3))$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta u - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 \right) + \Delta u = 0, \quad u(w, 0) = u_0(w), \quad u'_t(w, 0) = u_1(w), \quad (2.26)$$

где $w \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Предварительно перепишем уравнение (2.26) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta(u + d) - r(u + d)^2 \right) + \Delta(u + d) = 0, \quad d := \frac{1}{\varepsilon}, \quad r := \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Слабым решением задачи Коши для уравнения (2.26) называется функция $u(w, t) \in L^2(0, T; L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3))$, удовлетворяющая равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} [(u(w, t) + d) \Delta_w \phi''_{tt}(w, t) + (u(w, t) + d) \Delta_w \phi(w, t)] dw dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} [(u_0(w) + d) \Delta_w \phi'_t(w, 0) - u_1(w) \Delta_w \phi(w, 0)] dw + \\ & + r \int_{\mathbb{R}^3} [2(u_0(w) + d) u_1(w) \phi(w, 0) - (u_0(w) + d)^2 \phi'_t(w, 0)] dw = \\ & = r \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(w, t) + d)^2 \phi''_{tt}(w, t) dw dt \end{aligned} \quad (2.27)$$

для всех функций $\phi(w, t) \in \mathbb{C}_t^2([0, T]; \mathbb{C}_w^2(\mathbb{R}^3))$, которые удовлетворяют условиям $\phi(w, T) = \phi'_t(w, T) = 0$ и $\text{supp}_w \phi(w, t) \subset K \subset \mathbb{R}^3$ равномерно по $t \in [0, T]$, где K — это компакт, свой для каждой фиксированной пробной функции $\phi(w, t)$; в (2.27) начальные функции $u_0(w)$, $u_1(w) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$.

Имеет место следующая лемма, доказательство которой в точности повторяет доказательство леммы 1.

ЛЕММА 3. Всякое классическое решение $u(w, t) \in \mathbb{C}_t^2([0, T]; \mathbb{C}_w^2(\mathbb{R}^3))$ является слабым решением из класса $u(w, t) \in L^2(0, T; L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3))$ в смысле определения 3.

Дадим определение класса начальных функций U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что функция $u_1(w)$ принадлежит классу гладкости U , если найдется такая ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей, что $u_1(w) \in H^2(\Omega)$, $\Delta_w u_1(w) \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ и $\Delta_w u_1(w) \not\equiv 0$ при $w \in \Omega$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если $u_1(w) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_0(w) + d \in L^2(\mathbb{R}^3)$, то при выполнении условия

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(w) + d) u_1(w) dw < 0 \quad (2.28)$$

время существования слабого решения конечно и имеет место следующая оценка сверху:

$$T \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(w) + d)^2 dw}{-\int_{\mathbb{R}^3} (u_0(w) + d) u_1(w) dw}. \quad (2.29)$$

Если же $u_0(w) = -d$ и $u_1(w) \in U$, то слабое решение равенства (2.3) отсутствует даже локально во времени, т.е. имеет место мгновенное разрушение слабого решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в целом повторяет доказательства теорем 1 и 2. Нужно при помощи неравенства Гёльдера оценить слагаемые в равенстве (2.27) с пробной функцией $\phi(w, t)$ вида (2.7). А именно, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(w, t) + d) \Delta_w \phi_{tt}''(w, t) dw dt \right| &= \frac{2}{T^2} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(w, t) + d) \Delta_w \phi_R(w) dw dt \right| \leq \\ &\leq \frac{2T^{1/2}}{T^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_w \phi_R(w)|^2}{\phi_R(w)} dw \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(w, t) + d) \Delta_w \phi(w, t) dw dt \right| &\leq \\ &\leq \left(\int_0^T \phi_T^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_w \phi_R(w)|^2}{\phi_R(w)} dw \right)^{1/2} I_R^{1/2} = \\ &= \left(\frac{T}{5} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_w \phi_R(w)|^2}{\phi_R(w)} dw \right)^{1/2} I_R^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где

$$I_R := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(w, t) + d)^2 \phi_R(w) dw dt,$$

и

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(w) + d) \Delta_w \phi_t'(w, 0) dw \right| &= \frac{2}{T} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (u_0(w) + d) \Delta_w \phi_R(w) dw \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{T} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_w \phi_R(w)|^2 dw \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_0(w) + d|^2 dw \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(w) \Delta_w \phi(w, 0) dw \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_1(w) \Delta_w \phi_R(w) dw \right| \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_1^2(w) dw \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_w \phi_R(w)|^2 dw \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Поскольку $u_0(w) + d \in L^2(\mathbb{R}^3)$ и $u_1(w) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, то согласно теореме Лебега при $R \rightarrow +\infty$ справедливо следующее предельное свойство:

$$\begin{aligned} r \int_{\mathbb{R}^3} \left[2(u_0(w) + d)u_1(w)\phi(w, 0) - (u_0(w) + d)^2 \phi_t'(w, 0) \right] dw &= \\ &= 2r \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(w) + d)u_1(w) + \frac{1}{T}(u_0(w) + d)^2 \right] \phi_R(w) dw \rightarrow \\ &\rightarrow 2r \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(w) + d)u_1(w) + \frac{1}{T}(u_0(w) + d)^2 \right] dw. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_w \phi_R(w)|^2}{\phi_R(w)} dw &= R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi, \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_w \phi_R(w)|^2 dw &= R^{3-4} \int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Из равенства (2.27) и оценок (2.30)–(2.35) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{2T^{1/2}}{T^2} c_8 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \left(\frac{T}{5}\right)^{1/2} c_8 R^{-1/2} I_R^{1/2} + \\ + \frac{2}{T} a_1 R^{-1/2} + a_2 R^{-1/2} + J_R \geq \frac{2}{T^2} I_R, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$\begin{aligned} c_8 &:= \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2}{\phi_0(|\xi|^2)} d\xi \right)^{1/2}, \\ a_1 &:= \|u_0(w) + d\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \\ a_2 &:= \|u_1(w)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\int_{1/2 \leq |\xi|^2 \leq 1} |\Delta_\xi \phi_0(|\xi|^2)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \\ J_R &:= 2r \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(w) + d)u_1(w) + \frac{1}{T}(u_0(w) + d)^2 \right] \phi_R(w) dw. \end{aligned}$$

Далее, рассуждая точно так же, как при доказательстве теоремы 1, при помощи теоремы Бешпо Леви приходим в пределе при $R = N \rightarrow +\infty$ ($N \in \mathbb{N}$) к априорной оценке

$$T^2 r \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_0(w) + d)u_1(w) + \frac{1}{T}(u_0(w) + d)^2 \right] dw \geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u(w, t) + d)^2 dw dt, \quad (2.37)$$

из которой уже стандартным образом выводим утверждения теоремы. В частности, при $u_0(w) = -d$ имеем $u(w, t) = -d$ для почти всех $(w, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]$. После подстановки этих равенств в определение 3 слабого решения получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_1(w) \Delta_w \phi(w, 0) dw = 0$$

для всех пробных функций $\phi(w, t)$, удовлетворяющих условиям определения 3. Положим

$$\phi(w, t) = \phi_1(w) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \phi_1(w) \in C_0^\infty(\Omega),$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям определения 4 класса U начальных функций $u_1(w)$. Тогда получим равенство

$$\int_{\Omega} u_1(w) \Delta_w \phi_1(w) dw = 0 \iff \int_{\Omega} \Delta_w u_1(w) \phi_1(w) dw = 0,$$

следовательно, $\Delta_w u_1(w) = 0$ для всех $w \in \Omega$, что противоречит определению класса U . Теорема доказана.

3. РАЗРУШЕНИЕ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ (1.1)–(1.3)

Рассмотрим сначала следующую вторую смешанную краевую задачу:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\varepsilon}{c_0^4 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}, \quad (w, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$p(w, 0) = p_0(w), \quad p'(w, 0) = p_1(w) \quad \text{при} \quad w \in \bar{\Omega}, \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n_w} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{при} \quad (w, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3.3)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является ограниченной областью с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $n = n(w)$ – это непрерывное поле внутренних нормалей к границе $\partial\Omega$. Функцию $p(w, t) \in \mathbb{C}_{w,t}^{2,2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$, удовлетворяющую задаче (3.1)–(3.3), назовем классическим решением. С необходимостью $p_0(w), p_1(w) \in \mathbb{C}^2(\bar{\Omega})$ и выполнены условия согласования

$$\left. \frac{\partial p_0(w)}{\partial n_w} \right|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial p_1(w)}{\partial n_w} \right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено условие

$$\int_{\Omega} p_1(w)(p_0(w) - b) dw < 0, \quad b := \frac{c_0^2 \rho_0}{2\varepsilon}, \quad (3.4)$$

тогда классическое решение $p(w, t) \in \mathbb{C}_{w,t}^{2,2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ задачи (3.1)–(3.3) не существует глобально во времени и имеет место оценка сверху для времени T существования решения:

$$T \leq \frac{\int_{\Omega} (p_0(w) - b)^2 dw}{-2 \int_{\Omega} p_1(w)(p_0(w) - b) dw} < +\infty. \quad (3.5)$$

Если $p_0(w) = b$, то классическое решение задачи (3.1)–(3.3) не существует ни для какого $T > 0$ при условии, что

$$p_1(w) \not\equiv 0 \quad \text{для} \quad w = (x, y, z) \in \Omega, \quad (3.6)$$

т. е. имеет место мгновенное разрушение классического решения задачи (3.1)–(3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $p(w, t) \in \mathbb{C}_{w,t}^{2,2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$, можно проинтегрировать обе части уравнения (3.1) по области Ω и в результате очевидных преобразований с учетом граничного условия (3.3) получить равенство

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} (p(w, t) - b)^2 dw = 0,$$

которое легко интегрируется с учетом начальных условий (3.2):

$$0 \leq \int_{\Omega} (p(w, t) - b)^2 dw = \int_{\Omega} (p_0(w) - b)^2 dw + 2t \int_{\Omega} (p_0(w) - b)p_1(w) dw.$$

Отсюда приходим к первому утверждению теоремы. Осталось заметить, что если $p_0(w) = b$, то

$$\int_{\Omega} (p(w, t) - b)^2 dw = 0 \quad \text{для всех } t \in [0, T],$$

следовательно, $p(w, t) = b$ и $p'_t(w, t) = 0$ для всех $(w, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]$. Если выполнено свойство (3.6), то классическое решение отсутствует даже локально во времени, т. е. имеет место мгновенное разрушение классического решения. Теорема доказана.

Рассмотрим вторую смешанную краевую задачу для уравнения (1.3) нелинейных ионно-звуковых волн:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta u - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 \right) + \Delta u = 0 \quad \text{при } (w, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$u(w, 0) = u_0(w), \quad u'(w, 0) = u_1(w) \quad \text{при } w = (x, y, z) \in \bar{\Omega}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_w}(w, t) = 0 \quad \text{при } (w, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3.9)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, решение $u(w, t) \in \mathbb{C}_t^2([0, T]; \mathbb{C}_w^2(\bar{\Omega}))$, начальные функции $u_0(w)$, $u_1(w) \in \mathbb{C}^2(\bar{\Omega})$ и выполнены условия согласования

$$\left. \frac{\partial u_0(w)}{\partial n_w} \right|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u_1(w)}{\partial n_w} \right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнено условие

$$\int_{\Omega} u_1(w)(u_0(w) + d) dw < 0, \quad d := \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.10)$$

тогда классическое решение $u(w, t) \in \mathbb{C}_t^2([0, T]; \mathbb{C}_w^2(\bar{\Omega}))$ не существует глобально во времени и имеет место оценка сверху для времени T существования решения:

$$T \leq \frac{\int_{\Omega} (u_0(w) + d)^2 dw}{-2 \int_{\Omega} u_1(w)(u_0(w) + d) dw} < +\infty. \quad (3.11)$$

Если $u_0(w) = -d$, то классическое решение задачи (3.7)–(3.9) не существует ни для какого $T > 0$ при условии, что $u_1(w) \not\equiv 0$ для $w \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 4. Действительно, интегрируя уравнение (3.7) по области Ω , с учетом граничного условия (3.9) приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} (u(w, t) + d)^2 dw = 0 \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (3.12)$$

Далее доказательство проводится точно так же, как доказательство соответствующих утверждений в теореме 4.

Наконец, рассмотрим смешанную третью краевую задачу для уравнения (1.2) Хохлова–Заболотской в ограниченной области $\Omega = (0, L) \times D_{y,z}$, $D_{y,z} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x} - \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2}, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (w, \tau) \in \Omega \times (0, T), \quad (3.13)$$

$$u(w, 0) = u_0(w), \quad u'_{\tau}(w, 0) = u_1(w) \quad \text{при } w \in \bar{\Omega}, \quad (3.14)$$

$$u(w, \tau)|_{x=0} = u(w, \tau)|_{x=L} = 0 \quad \text{при } (y, z) \in \bar{D}_{y,z}, \quad \tau \in [0, T], \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_w}(w, \tau) = 0 \quad \text{при } x \in [0, L], \quad (y, z) \in \partial D_{y,z}, \quad \tau \in [0, T], \quad (3.16)$$

где, напомним, $w = (x, y, z)$, а двумерная область $D_{y,z} \in \mathbb{R}^2$ является ограниченной с гладкой границей $\partial D_{y,z}$. При этом под классическим решением задачи (3.13)–(3.16) понимается функция $u(w, \tau) \in \mathbb{C}_{y,z,\tau}^{2,2,2}(\bar{\Omega} \times [0, T]) \cap \mathbb{C}_{\tau}^1([0, T]; \mathbb{C}_x^1(\bar{\Omega}))$, причем с необходимостью $u_0(w)$, $u_1(w) \in \mathbb{C}_{x,y,z}^{1,2,2}(\bar{\Omega})$ и выполнены условия согласования

$$u_0(w)|_{x=0} = u_0(w)|_{x=L} = u_1(w)|_{x=0} = u_1(w)|_{x=L} = 0, \\ \left. \frac{\partial u_0(w)}{\partial n_w} \right|_{\partial \Omega} = \left. \frac{\partial u_1(w)}{\partial n_w} \right|_{\partial \Omega} = 0.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнено условие

$$\int_{\Omega} u_1(w) u_0(w) dw < 0, \quad (3.17)$$

тогда классическое решение $u(w, \tau) \in \mathbb{C}_{y,z,\tau}^{2,2,2}(\bar{\Omega} \times [0, T]) \cap \mathbb{C}_{\tau}^1([0, T]; \mathbb{C}_x^1(\bar{\Omega}))$ не существует глобально во времени и имеет место оценка сверху для времени T существования решения:

$$T \leq \frac{\int_{\Omega} u_0^2(w) dw}{-2 \int_{\Omega} u_1(w) u_0(w) dw} < +\infty. \quad (3.18)$$

Если $u_0(w) = 0$, то классическое решение задачи (3.13)–(3.16) не существует ни для какого $T > 0$ при условии, что $u_1(w) \not\equiv 0$ для $w \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 4. Действительно, интегрируя уравнение (3.13) по области Ω , с учетом граничных условий (3.15), (3.16) приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u^2(w, t) dw = 0 \quad \text{при } t \in [0, T].$$

Далее доказательство проводится точно так же, как доказательство соответствующего места в теореме 4.

Список литературы

- [1] С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Саичев, *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике*, Физматлит, М., 2008.
- [2] М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, М., 1990.
- [3] Н. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин, Е. А. Заболотская, *Нелинейная теория звуковых пучков*, Современные проблемы физики, Наука, М., 1982.
- [4] С. А. Габов, *Новые задачи математической теории волн*, Наука, М., 1998.
- [5] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Отсутствие слабых решений для некоторых вырожденных и сингулярных гиперболических задач в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ ”, *Тр. МИАН*, **232** (2001), 248–267.
- [6] М. О. Корпусов, С. Г. Михайленко, “Мгновенное разрушение классических решений задачи Коши для уравнения Хохлова–Заболоцкой”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57**:7 (2017), 1170–1175.
- [7] М. О. Корпусов, “Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:5 (2015), 103–162.

Поступила в редакцию 16.04.2017