Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. В. Макридин, Эффективный алгоритм нахождения многомерных законов сохранения для интегрируемых систем гидродинамического типа, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 2, 320–330

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:21:48

© 2018 г.

З. В. Макридин^{*†}

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Исследуется новое свойство интегрируемых систем – существование бесконечного набора локальных трехмерных законов сохранения для пар интегрируемых двумерных гидродинамических цепочек. Описывается эффективный алгоритм последовательного вычисления бесконечного набора трехмерных законов сохранения для пары коммутирующих потоков Бенни.

Ключевые слова: интегрируемая система, переопределенная система, гидродинамическая цепочка Бенни, уравнение Кадомцева–Петвиашвили, трехмерные законы сохранения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9385>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуется ранее неизвестное свойство интегрируемых систем, а именно наличие у трехмерных интегрируемых уравнений бесконечного множества квазилокальных трехмерных законов сохранения.

Теория интегрируемых двумерных систем появилась благодаря наблюдению того факта, что уравнение Кортевега–де Фриза имеет бесконечный набор локальных двумерных законов сохранения. Поиск бесконечных наборов локальных трехмерных законов сохранения для трехмерных интегрируемых уравнений (в частности и в первую очередь, для уравнения Кадомцева–Петвиашвили) показал, что таких законов сохранения может быть лишь конечное число. Например, уравнение Кадомцева–Петвиашвили, записанное в гидродинамических переменных, имеет только три локальных закона сохранения. Если это уравнение переписано в потенциальной форме, то легко показать, что локальных законов сохранения будет уже четыре.

Работа была поддержана грантом № 15-11-20013 Российского научного фонда.

^{*}Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
E-mail: makridin@hydro.nsc.ru

[†]Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Для бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили, записанного в форме алгебраического уравнения, связывающего вторые производные от одной общей функции, нам удалось найти десять локальных законов сохранения, плотности и токи которых зависят только от вторых производных указанной общей функции. Однако наличие конечного набора локальных законов сохранения не гарантирует интегрируемости в трехмерном случае, поскольку это необходимое, но не достаточное условие.

Тем не менее именно вычисление этих десяти локальных трехмерных законов сохранения позволило нам сформулировать гипотезу о существовании бесконечного набора трехмерных квазилокальных законов сохранения. Это новое свойство интегрируемых систем и изучено в настоящей работе на примере бездисперсионного предела уравнения Кадомцева–Петвиашвили.

Квазилокальными трехмерными законами сохранения в данном случае мы называем такие законы сохранения, плотности и токи которых зависят только от гидродинамических переменных (плотностей двумерных законов сохранения для соответствующих гидродинамических цепочек) или, иначе говоря, от вторых производных от той же самой общей функции, в том числе от всех независимых переменных (времен) высших коммутирующих потоков.

Ценность этого подхода заключается, в частности, в том, что описанная конструкция имеет приложения в теории усреднения Уизема: при усреднении периодических (или квазипериодических) решений данных трехмерных уравнений (а тем самым и соответствующих бесконечных двумерных цепочек) усредненные бесконечные запасы законов сохранения остаются локальными. Тем самым каждому усредненному трехмерному интегрируемому уравнению методом Уизема можно сопоставить пару коммутирующих гидродинамических цепочек, что позволяет не только эффективизировать применение метода гидродинамических редукций в таких задачах, но и выделять явные точные решения усредненных трехмерных систем уравнений. Эта задача должна быть предметом отдельной публикации. А в настоящей работе без потери общности и для уменьшения объема вычислений мы ограничимся построением бесконечного набора квазилокальных законов сохранения для бездисперсионного предела уравнения Кадомцева–Петвиашвили, а именно (см., например, [1])

$$(u_y - uu_x)_x = u_{tt}. \quad (1)$$

Итак, как уже было отмечено, в гидродинамических переменных уравнение (1) переписывается в виде квазилинейной системы первого порядка

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_y - uu_x \quad (2)$$

и допускает три локальных закона сохранения [2]

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_y - \left(\frac{u^2}{2}\right)_x, \quad (uv)_t = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)_x + \left(\frac{u^2}{2}\right)_y.$$

Помимо этого, бездисперсионное уравнение Кадомцева–Петвиашвили является уравнением Эйлера–Лагранжа с лагранжианом $S = \psi_t^2 - \psi_x \psi_y + \psi_x^3/3$, где $u = \psi_x$

и $v = \psi_t$. В этом случае законов сохранения становится четыре и они имеют вид [3]

$$\begin{aligned} & \left(-\psi_t^2 - \psi_x \psi_y + \frac{1}{3} \psi_x^3 \right)_t + (\psi_t \psi_y - \psi_x^2 \psi_t)_x + (\psi_x \psi_t)_y = 0, \\ & (\psi_y \psi_t)_t + \left(-\frac{1}{2} \psi_y^2 + \frac{1}{2} \psi_x^2 \psi_y \right)_x + \left(-\frac{1}{2} \psi_t^2 - \frac{1}{6} \psi_x^3 \right)_y = 0, \\ & (\psi_x \psi_t)_t + \left(-\frac{1}{2} \psi_t^2 + \frac{1}{3} \psi_x^3 \right)_x + \left(-\frac{1}{2} \psi_x^2 \right)_y = 0, \\ & (\psi_t)_t + \left(\frac{\psi_x^2}{2} - \psi_y \right)_x = 0. \end{aligned}$$

Следует отметить, что данные законы сохранения не могут быть выражены только через полевые переменные u и v . Если ввести новую функцию Ω [4] такую, что $\psi = \Omega_x$, последний закон сохранения интегрируется, мы получаем исходное бездисперсионное уравнение Кадомцева–Петвиашвили в терминах функции Ω

$$\Omega_{xy} = \Omega_{tt} + \frac{\Omega_{xx}^2}{2}. \quad (3)$$

Оставшиеся три закона сохранения переписываются в соответствии с введенными обозначениями.

Ранее [5] локальные законы сохранения не изучались ни для уравнения (3), ни для уравнений более общего типа $F(\Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy}, \Omega_{yt}, \Omega_{yy}, \Omega_{tt}) = 0$. Прямым вычислением нам удалось найти десять локальных трехмерных законов сохранения

$$(a_k)_y + (b_k)_t + (c_k)_x = 0, \quad k = 1, \dots, 10,$$

где плотности и токи являются функциями от переменных $\Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy}, \Omega_{yt}, \Omega_{yy}$ и вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= \Omega_{xx} \Omega_{xt}, & b_1 &= \frac{1}{3} \Omega_{xx}^3 - \Omega_{xy} \Omega_{xx} - \Omega_{xt}^2, \\ a_2 &= \frac{1}{6} \Omega_{xx}^3 + \frac{1}{2} \Omega_{xt}^2, & b_2 &= -\Omega_{xt} \Omega_{xy}, \\ a_3 &= \Omega_{xx}^2, & b_3 &= -2\Omega_{xx} \Omega_{xt}, \\ a_4 &= \Omega_{xx} \Omega_{xy} - \frac{1}{6} \Omega_{xx}^3, & b_4 &= -\Omega_{xt} \Omega_{xy} - \Omega_{xx} \Omega_{yt}, \\ a_5 &= \frac{1}{2} \Omega_{xt} \Omega_{xx}^2 + \Omega_{xt} \Omega_{xy}, & b_5 &= \frac{1}{6} \Omega_{xx}^4 - \Omega_{xt}^2 \Omega_{xx} - \Omega_{xy}^2 - \Omega_{xt} \Omega_{yt}, \\ a_6 &= \frac{1}{2} \Omega_{xx} \Omega_{xt}^2 + \frac{1}{2} \Omega_{xy}^2, & b_6 &= \frac{1}{3} \Omega_{xt} \Omega_{xx}^3 - \Omega_{xt} \Omega_{xy} \Omega_{xx} - \Omega_{xy} \Omega_{yt} - \\ & & & - \frac{1}{3} \Omega_{xt}^3, \\ a_7 &= \frac{1}{2} \Omega_{xt} \Omega_{xx}^2 + \Omega_{yt} \Omega_{xx}, & b_7 &= \frac{1}{6} \Omega_{xx}^4 - \Omega_{xt}^2 \Omega_{xx} - \Omega_{yy} \Omega_{xx} - \Omega_{xt} \Omega_{yt}, \\ a_8 &= \frac{1}{2} \Omega_{xy} \Omega_{xx}^2 + \Omega_{xt}^2 \Omega_{xx} + \Omega_{xt} \Omega_{yt}, & b_8 &= \frac{2}{3} \Omega_{xt} \Omega_{xx}^3 - 2\Omega_{xt} \Omega_{xy} \Omega_{xx} - \Omega_{xy} \Omega_{yt} - \\ & & & - \Omega_{xt} \Omega_{yy} - \frac{2}{3} \Omega_{xt}^3, \\ a_9 &= \frac{1}{3} \Omega_{xt}^3 + 2\Omega_{xx} \Omega_{xy} \Omega_{xt} + \Omega_{xy} \Omega_{yt}, & b_9 &= \frac{2}{3} \Omega_{xy} \Omega_{xx}^3 - 2\Omega_{xt} \Omega_{yt} \Omega_{xx} - \Omega_{xy}^2 \Omega_{xx} - \\ & & & - \Omega_{yt}^2 - 2\Omega_{xt}^2 \Omega_{xy} - \Omega_{xy} \Omega_{yy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \frac{1}{2}\Omega_{xx}^2\Omega_{xt}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{xy}\Omega_{xt}^2 + \\
&\quad + \Omega_{xx}\Omega_{yt}\Omega_{xt} + \frac{1}{2}\Omega_{xx}\Omega_{xy}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{yt}^2, \\
c_1 &= \Omega_{xt}\Omega_{xy} - \Omega_{xx}^2\Omega_{xt}, \\
c_2 &= \frac{1}{2}\Omega_{xy}^2 - \frac{1}{2}\Omega_{xx}^2\Omega_{xy}, \\
c_3 &= \Omega_{xt}^2 - \frac{2}{3}\Omega_{xx}^3, \\
c_4 &= \Omega_{xt}\Omega_{yt} - \frac{1}{2}\Omega_{xx}^2\Omega_{xy}, \\
c_5 &= -\frac{2}{3}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^3 - \frac{1}{2}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{3}\Omega_{xt}^3 + \Omega_{xy}\Omega_{yt}, \\
c_6 &= \frac{1}{15}\Omega_{xx}^5 - \frac{1}{3}\Omega_{xy}\Omega_{xx}^3 - \\
&\quad - \frac{1}{2}\Omega_{xt}^2\Omega_{xx}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{yt}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{xt}^2\Omega_{xy}, \\
c_7 &= -\frac{2}{3}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^3 - \frac{1}{2}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{3}\Omega_{xt}^3 + \Omega_{xt}\Omega_{yy}, \\
b_{10} &= \frac{1}{3}\Omega_{xt}\Omega_{xx}^4 + \frac{1}{3}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^3 - \Omega_{xy}\Omega_{yt}\Omega_{xx} - \\
&\quad - \Omega_{xt}\Omega_{yy}\Omega_{xx} - \frac{2}{3}\Omega_{xt}^3\Omega_{xx} - \Omega_{xt}\Omega_{xy}^2 - \\
&\quad - \Omega_{xt}^2\Omega_{yt} - \Omega_{yt}\Omega_{yy}, \\
c_8 &= \frac{2}{15}\Omega_{xx}^5 - \frac{2}{3}\Omega_{xy}\Omega_{xx}^3 - \Omega_{xt}^2\Omega_{xx}^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2}\Omega_{yy}\Omega_{xx}^2 + \Omega_{xt}^2\Omega_{xy} + \Omega_{xy}\Omega_{yy}, \\
c_9 &= -\frac{2}{3}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^3 - 2\Omega_{xt}\Omega_{xy}\Omega_{xx}^2 + \\
&\quad + \Omega_{xt}\Omega_{xy}^2 + \Omega_{xt}^2\Omega_{yt} + \Omega_{yt}\Omega_{yy}, \\
c_{10} &= \frac{1}{18}\Omega_{xx}^6 - \frac{2}{3}\Omega_{xt}^2\Omega_{xx}^3 - \Omega_{xt}\Omega_{yt}\Omega_{xx}^2 - \\
&\quad - \frac{1}{3}\Omega_{yy}\Omega_{xx}^3 - \frac{1}{2}\Omega_{xy}^2\Omega_{xx}^2 + \frac{1}{6}\Omega_{xt}^4 + \\
&\quad + \frac{1}{6}\Omega_{xy}^3 + \frac{1}{2}\Omega_{yy}^2 + \Omega_{xt}\Omega_{xy}\Omega_{yt} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\Omega_{xt}^2\Omega_{yy}.
\end{aligned}$$

Данные формулы естественно переписать в терминах гидродинамической цепочки Бенни [6]–[10], записанной в форме двумерных законов сохранения:

$$(H_k)_t = \left(H_{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{|i|=k-1} H_{i_1} H_{i_2} \right)_x, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $i = (i_1, i_2)$ – мультииндекс. Первый коммутирующий с (4) поток имеет вид

$$(H_k)_y = \left(H_{k+2} + H_0 H_k - \sum_{|i|=k} H_{i_1} H_{i_2} + \frac{1}{3} \sum_{|j|=k-2} H_{j_1} H_{j_2} H_{j_3} \right)_x, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где $j = (j_1, j_2, j_3)$. Вводя функцию Ω так, чтобы $\Omega_{xx} = H_0$, $\Omega_{xt} = H_1$, $\Omega_{xy} = H_2$, можно выразить, используя (4) и (5), оставшиеся вторые производные через плотности H_k , а именно

$$\Omega_{yt} = H_3 - H_0 H_1, \quad \Omega_{yy} = \frac{1}{3} H_0^3 - H_0 H_2 - H_1^2 + H_4.$$

Таким образом, в данных обозначениях бездисперсионное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (3) совпадает со вторым законом сохранения цепочки Бенни

$$(H_1)_t = \left(-\frac{1}{2} H_0^2 + H_2 \right)_x,$$

а значит, уравнение (3) является следствием пары коммутирующих потоков (4) и (5). Записанные выше трехмерные законы сохранения переписываются в тер-

минах плотностей H_k следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= H_0^2, & b_1 &= -2H_0H_1, \\
 a_2 &= H_0H_1, & b_2 &= \frac{1}{3}H_0^3 - H_2H_0 - H_1^2, \\
 a_3 &= \frac{1}{6}H_0^3 + \frac{1}{2}H_1^2, & b_3 &= -H_1H_2, \\
 a_4 &= H_0H_2 - \frac{1}{6}H_0^3, & b_4 &= H_1H_0^2 - H_3H_0 - H_1H_2, \\
 a_5 &= \frac{1}{2}H_1H_0^2 + H_1H_2, & b_5 &= \frac{H_0^4}{6} - H_2^2 - H_1H_3, \\
 a_6 &= \frac{1}{2}H_0H_1^2 + \frac{1}{2}H_2^2, & b_6 &= \frac{1}{3}H_1H_0^3 - \frac{H_1^3}{3} - H_2H_3, \\
 a_7 &= H_0H_3 - \frac{1}{2}H_0^2H_1, & b_7 &= -\frac{H_0^4}{6} + H_2H_0^2 + H_1^2H_0 - \\
 & & & - H_4H_0 - H_1H_3, \\
 a_8 &= \frac{1}{2}H_2H_0^2 + H_1H_3, & b_8 &= \frac{1}{3}H_1H_0^3 + \frac{H_1^3}{3} - H_2H_3 - H_1H_4, \\
 a_9 &= \frac{1}{3}H_1^3 + H_0H_2H_1 + H_2H_3, & b_9 &= \frac{1}{3}H_2H_0^3 + H_1^2H_0^2 - H_3^2 - \\
 & & & - H_1^2H_2 - H_2H_4, \\
 a_{10} &= \frac{1}{2}H_2H_1^2 + \frac{1}{2}H_0H_2^2 + \frac{H_3^2}{2}, & b_{10} &= \frac{1}{3}H_0H_1^3 - H_2^2H_1 + \\
 & & & + H_0^2H_2H_1 - H_3H_4, \\
 c_1 &= H_1^2 - \frac{2}{3}H_0^3, \\
 c_2 &= H_1H_2 - H_0^2H_1, \\
 c_3 &= \frac{1}{2}H_2^2 - \frac{1}{2}H_0^2H_2, \\
 c_4 &= -\frac{1}{2}H_2H_0^2 - H_1^2H_0 + H_1H_3, \\
 c_5 &= -\frac{1}{6}H_1H_0^3 - \frac{1}{2}H_3H_0^2 - \\
 & - H_1H_2H_0 + \frac{H_1^3}{3} + H_2H_3, \\
 c_6 &= \frac{H_0^5}{15} - \frac{1}{3}H_2H_0^3 - H_1H_3H_0 + \\
 & + \frac{H_3^2}{2} + \frac{1}{2}H_1^2H_2, \\
 c_7 &= \frac{1}{6}H_1H_0^3 - \frac{1}{2}H_3H_0^2 - \\
 & - H_1H_2H_0 - \frac{2H_1^3}{3} + H_1H_4, \\
 c_8 &= -\frac{H_0^5}{30} + \frac{1}{6}H_2H_0^3 - \frac{1}{2}H_1^2H_0^2 - \\
 & - \frac{1}{2}H_4H_0^2 - H_2^2H_0 + H_2H_4, \\
 c_9 &= \frac{1}{3}H_1H_0^4 - \frac{1}{3}H_3H_0^3 - H_1H_2H_0^2 - \\
 & - H_2H_3H_0 - H_1H_4H_0 + \\
 & + H_1H_2^2 + H_3H_4, \\
 c_{10} &= \frac{H_1^4}{6} + \frac{1}{2}H_0^3H_1^2 - \frac{1}{2}H_0H_2H_1^2 - \\
 & - \frac{1}{2}H_4H_1^2 - H_0^2H_3H_1 + H_2H_3H_1 + \\
 & + \frac{H_2^3}{6} + \frac{H_4^2}{2} - H_0H_2H_4.
 \end{aligned}$$

Следовательно, данные законы сохранения могут быть представлены в форме

$$(a_k(H_0, H_1, \dots, H_k))_y + (b_k(H_0, H_1, \dots, H_k, H_{k+1}))_t + (c_k(H_0, H_1, \dots, H_k, H_{k+1}))_x = 0.$$

2. ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ БЕЗДИСПЕРСИОННОГО ПРЕДЕЛА УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Как нетрудно заметить, записанные через плотности H_k , законы сохранения могут быть разделены согласно следующему правилу: один закон сохранения вида

$$(a_0(H_0))_y + (b_0(H_0, H_1))_t + (c_0(H_0, H_1))_x = 0,$$

два закона сохранения вида

$$(a_1(H_0, H_1))_y + (b_1(H_0, H_1, H_2))_t + (c_1(H_0, H_1, H_2))_x = 0,$$

три закона сохранения записываются в форме

$$(a_2(H_0, H_1, H_2))_y + (b_2(H_0, H_1, H_2, H_3))_t + (c_2(H_0, H_1, H_2, H_3))_x = 0,$$

наконец, четыре закона сохранения имеют вид

$$(a_3(H_0, H_1, H_2, H_3))_y + (b_3(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4))_t + (c_3(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4))_x = 0.$$

Из формулы (4) следует, что на множестве всех трехмерных законов сохранения естественным образом определена градуировка, заданная степенями однородности переменных H_k : $H_0 \sim \lambda^2$, $H_1 \sim \lambda^3$ и т.д. Это свойство позволяет предположить, что пара коммутирующих потоков (4) и (5) допускает бесконечное число трехмерных гидродинамических законов сохранения вида

$$(a_k(H_0, H_1, \dots, H_k))_y + (b_k(H_0, H_1, \dots, H_k, H_{k+1}))_t + (c_k(H_0, H_1, \dots, H_k, H_{k+1}))_x = 0, \quad (6)$$

где $k = 0, 1, \dots$. Действительно, зафиксируем k и, используя формулы (4) и (5), вычислим производные в выражении (6) в явном виде. В итоге получаем операторное уравнение на функции a_k, b_k, c_k , записанное в следующей форме:

$$\mathcal{D}_k u_k = 0, \quad \mathcal{D}_k = \begin{bmatrix} D_{1,1}^k & D_{2,1}^k & D_{3,1}^k \\ D_{1,2}^k & D_{2,2}^k & D_{3,2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{1,k+3}^k & D_{2,k+3}^k & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -H_0 \partial_1 & \partial_0 \\ 0 & \partial_0 & \partial_1 \\ \partial_0 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $u_k = (a_k, b_k, c_k)^T$, дифференциальные операторы $D_{i,j}^k$ при $k > 2$ имеют вид

$$D_{1,1}^k = \sum_{s=1}^k (H_s - 2F_{s-1}) \partial_s, \quad D_{2,1}^k = -\sum_{s=0}^k H_s \partial_{s+1}, \quad D_{3,r}^k = \partial_{r-1},$$

$$D_{1,2}^k = -H_0 \partial_1 - 2 \sum_{s=2}^k F_{s-2} \partial_s, \quad D_{2,q}^k = \partial_{q-2} - \sum_{s=0}^{k+1-q} H_s \partial_{s+q},$$

$$D_{1,p}^k = \partial_{p-3} - H_0 \partial_{p-1} - 2 \sum_{s=0}^{k-p} F_s \partial_{s+m},$$

$$D_{1,k+1}^k = \partial_{k-2} - H_0 \partial_k, \quad D_{1,k+2}^k = \partial_{k-1}, \quad D_{1,k+3}^k = \partial_k,$$

$$D_{2,k+2}^k = \partial_k, \quad D_{2,k+3}^k = \partial_{k+1}.$$

$$1 \leq r \leq k+2, \quad 2 \leq q \leq k+1, \quad 3 \leq p \leq k.$$

Здесь $\partial_i \equiv \partial/\partial H_i$, а F_i – токи законов сохранения (4), т. е. $(H_i)_t = (F_i)_x$ для всех $i = 0, 1, \dots$. При вычислении элементов первых двух столбцов матрицы D_k для $k \leq 2$ будем использовать формулы, в которых отсутствуют индексы p и q соответственно.

Уравнение (7) является переопределенной системой квазилинейных уравнений в частных производных. Для того чтобы решить данную систему, необходимо сначала исключить функцию c_k при помощи проверки условий совместности, а затем по аналогии избавиться от функции b_k . В конечном итоге получается система уравнений на третьи производные функции a_k . Однако стоит сделать следующее наблюдение. Рассмотрим преобразование, которое каждому матричному дифференциальному оператору

$$\Delta_{ijl}^k = \begin{bmatrix} D_{1,i}^k & D_{2,i}^k & D_{3,i}^k \\ D_{1,j}^k & D_{2,j}^k & D_{3,j}^k \\ D_{1,l}^k & D_{2,l}^k & D_{3,l}^k \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i < j, \quad 2 \leq j < l, \quad 3 \leq l \leq k+3,$$

ставит в соответствие скалярный оператор

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,l}^k &= D_{2,l}^k D_{3,j}^k D_{1,i}^k + D_{2,i}^k D_{3,l}^k D_{1,j}^k + D_{2,j}^k D_{3,i}^k D_{1,l}^k - \\ &- D_{2,j}^k D_{3,l}^k D_{1,i}^k - D_{2,l}^k D_{3,i}^k D_{1,j}^k - D_{2,i}^k D_{3,j}^k D_{1,l}^k. \end{aligned}$$

Количество подматриц Δ_{ijl}^k матрицы D_k равно количеству третьих производных функции a_k , т. е. C_{k+3}^3 . Непосредственным вычислением можно убедиться, что искомая система уравнений на все третьи производные функции a_k совпадает с системой

$$\Gamma_{ij,l}^k a_k = 0, \quad 1 \leq i < j, \quad 2 \leq j < l, \quad 3 \leq l \leq k+3. \quad (8)$$

Таким образом, вместо проверки условий совместности можно воспользоваться указанным преобразованием, что весьма удобно при использовании пакетов символьных вычислений.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ a_K

Система (8) не имеет нетривиальных дифференциальных следствий. Более того, она является треугольной, что позволяет довольно легко ее проинтегрировать. В самом деле, разобьем уравнения из (8) на $k+1$ подсистем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,3}^k a_k &= 0, & 1 \leq i < j, & \quad 2 \leq j < 3, \\ \Gamma_{ij,4}^k a_k &= 0, & 1 \leq i < j, & \quad 2 \leq j < 4, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Gamma_{ij,k+3}^k a_k &= 0, & 1 \leq i < j, & \quad 2 \leq j < k+3. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисляя соответствующие операторы, легко видеть, что последняя подсистема является однородной системой квазилинейных алгебраических уравнений относительно всех третьих производных $\partial_m \partial_n \partial_k a_k$, где $0 \leq m \leq n \leq k$. Кроме того, она имеет тривиальное решение. Таким образом, мы получаем анзац

$$a_k = \frac{1}{2} C_k^k H_k^2 + \sum_{i=0}^{k-1} C_i^k H_i H_k + \varphi_{k-1}(H_0, \dots, H_{k-1}) \quad (10)$$

с произвольными константами C_r^k и произвольной функцией φ_{k-1} . Линейными членами можно пренебречь, поскольку они порождают тривиальные законы сохранения.

Система уравнений (9) при $k = 0$ интегрируется элементарно. Поэтому всюду далее будет предполагаться, что мы знаем решение упомянутой системы на предыдущем шаге, т. е. a_{k-1} . Подставляем (10) в подсистему

$$\Gamma_{ij,k+2}^k a_k = 0, \quad 1 \leq i < j, \quad 2 \leq j < k+2,$$

и получаем неоднородную систему квазилинейных алгебраических уравнений относительно всех третьих производных $\partial_m \partial_n \partial_{k-1} \varphi_{k-1}$, где $0 \leq m \leq n \leq k-1$, т. е.

$$\Gamma_{ij,k+2}^k \varphi_{k-1} = \gamma_{k+2}, \quad 1 \leq i < j, \quad 2 \leq j < k+2.$$

Функция φ_{k-1} не зависит от H_k , следовательно, верно равенство

$$(\Gamma_{ij,k+2}^k - \Gamma_{ij,k+2}^{k-1}) \varphi_{k-1} = 0.$$

Это означает, что сужение ядра оператора $\Gamma_{ij,k+2}^k$ на пространство функций от переменных $H_0, \dots, H_{k-1}$ совпадает с ядром оператора $\Gamma_{ij,k+2}^{k-1}$. А так как мы знаем решение a_{k-1} (а вместе с ним и $a_{k-2}, \dots, a_0$), то задача по сути состоит в вычислении вектора γ_i для всех $3 \leq i \leq k+2$, по которому ищется частное решение неоднородной системы (уже в частных (!) производных на функцию φ_{k-1}) на каждом шаге.

Как уже отмечалось выше, система для вычисления функции a_k не имеет нетривиальных дифференциальных следствий. В первую очередь, это значит, что функция a_k является полиномом своих переменных степени не выше третьей. В частности, это значит, что вектор неоднородности может быть либо одной из констант C_r^k из формулы (10), либо нулем. Таким образом, схему интегрирования системы (9) можно представить следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{ij,k+3}^k a_k = 0 & 1 \leq i < j, \quad 2 \leq j < k+3, \\ a_k = \frac{1}{2} C_k^k H_k^2 + \dots + \varphi_{k-1} & \downarrow \\ \Gamma_{ij,k+2}^{k-1} \varphi_{k-1} = \gamma_{k+2} & 1 \leq i < j, \quad 2 \leq j < k+2, \\ \varphi_{k-1} = \frac{1}{2} C_{k-1}^{k-1} H_{k-1}^2 + \dots + \varphi_{k-2} & \downarrow \\ \vdots & \dots\dots\dots, \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} C_2^2 H_2^2 + \dots + \varphi_1 & \downarrow \\ \Gamma_{ij,4}^1 \varphi_1 = \gamma_4 & 1 \leq i < j, \quad 2 \leq j < 4, \\ \varphi_1 = \frac{1}{2} C_1^1 H_1^2 + \dots + \varphi_0 & \downarrow \\ \Gamma_{12,3}^0 \varphi_0 = \gamma_3 & \end{array}$$

Диаграмма расшифровывается следующим образом: начинаем с системы $\Gamma_{ij,k+3}^k a_k = 0$, находим функцию $a_k = (\dots) + \varphi_{k-1}$ (см. формулу (10)). Далее, полученную формулу подставляем в систему $\Gamma_{ij,k+2}^k a_k = 0$, которая преобразуется в $\Gamma_{ij,k+2}^{k-1} \varphi_{k-1} = \gamma_{k+2}$. После этого находим явный вид функции φ_{k-1} , подставляем в предыдущую систему и т. д.

Поясним на примере при $k = 2$. Последняя подсистема из (9) имеет вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{12,5}^2 a_2 &:= \partial_0^2 \partial_2 a_2 - H_0 \partial_0 \partial_2^2 a_2 + H_0 \partial_1^2 \partial_2 a_2 + H_1 \partial_1 \partial_2^2 a_2 = 0, \\ \Gamma_{13,5}^2 a_2 &:= \partial_0 \partial_1 \partial_2 a_2 + H_0 \partial_1 \partial_2^2 a_2 + H_1 \partial_2^3 a_2 = 0, \\ \Gamma_{14,5}^2 a_2 &:= \partial_1^2 \partial_2 a_2 - \partial_0 \partial_2^2 a_2 + H_0 \partial_2^3 a_2 = 0, \\ \Gamma_{23,5}^2 a_2 &:= \partial_0 \partial_2^2 a_2 = 0, \\ \Gamma_{24,5}^2 a_2 &:= \partial_1 \partial_2^2 a_2 = 0, \\ \Gamma_{34,5}^2 a_2 &:= \partial_2^3 a_2 = 0.\end{aligned}$$

Легко видеть, что данная система является однородной квазилинейной системой относительно всех третьих производных $\partial_i \partial_j \partial_2 a_2$, где $0 \leq i \leq j \leq 2$, причем она имеет только тривиальное решение, т. е.

$$\partial_i \partial_j \partial_2 a_2 = 0, \quad 0 \leq i \leq j \leq 2.$$

Отсюда сразу получаем анзац (10) для $k = 2$:

$$a_2 = \frac{1}{2} C_2^2 H_2^2 + C_1^2 H_1 H_2 + C_0^2 H_0 H_2 + \varphi_1(H_0, H_1).$$

Далее указанную формулу подставляем в оставшиеся уравнения системы (9)

$$\begin{aligned}\Gamma_{12,3}^2 a_2 &:= \partial_0^3 a_2 + (H_0^2 - H_2) \partial_1^2 \partial_2 a_2 + H_0 H_1 \partial_1 \partial_2^2 a_2 + (H_0^3 + 2H_1^2 - H_0 H_2) \partial_2^3 a_2 + \\ &\quad + H_2 \partial_0 \partial_2^2 a_2 + 4H_1 \partial_0 \partial_1 \partial_2 a_2 + 2H_0 \partial_0 \partial_1^2 a_2 - H_1 \partial_1^3 a_2 - 2H_0 \partial_0^2 \partial_2 a_2 - \\ &\quad - \partial_1^2 a_2 - H_0 \partial_2^2 a_2 + \partial_0 \partial_2 a_2 = 0, \\ \Gamma_{12,4}^2 a_2 &:= \partial_0^2 \partial_1 a_2 + 2H_1 \partial_0 \partial_2^2 a_2 + H_0 \partial_1^3 a_2 + (H_0^2 - H_2) \partial_1 \partial_2^2 a_2 - \partial_1 \partial_2 a_2 = 0, \\ \Gamma_{13,4}^2 a_2 &:= \partial_0 \partial_1^2 a_2 - \partial_0^2 \partial_2 a_2 + H_0 \partial_0 \partial_2^2 a_2 + H_0 \partial_1^2 \partial_2 a_2 + (H_0^2 - H_2) \partial_2^3 a_2 - \partial_2^2 a_2 = 0, \\ \Gamma_{23,4}^2 a_2 &:= \partial_1^3 a_2 - 2 \partial_0 \partial_1 \partial_2 a_2 + H_0 \partial_1 \partial_2^2 a_2 + 2H_1 \partial_2^3 a_2 = 0\end{aligned}$$

и получаем неоднородную квазилинейную систему относительно третьих производных функций φ_1 , т. е.

$$\begin{aligned}\Gamma_{12,3}^2 \varphi_1 &:= \partial_0^3 \varphi_1 + 2H_0 \partial_0 \partial_1^2 \varphi_1 - \partial_1^2 \varphi_1 = C_2^2 H_0 - C_0^2, & \Gamma_{13,4}^2 \varphi_1 &:= \partial_0 \partial_1^2 \varphi_1 = C_2^2, \\ \Gamma_{12,4}^2 \varphi_1 &:= \partial_0^2 \partial_1 \varphi_1 + H_0 \partial_1^3 \varphi_1 = C_1^2, & \Gamma_{23,4}^2 \varphi_1 &:= \partial_1^3 \varphi_1 = 0.\end{aligned} \quad (11)$$

Если вычислить операторы $\Gamma_{ij,4}^1$ в системе (8) для $k = 1$, то легко видеть, что мы получим систему (11) с нулевой правой частью. Следовательно, мы можем понизить верхний индекс на единицу:

$$\Gamma_{12,3}^1 \varphi_1 = C_2^2 H_0 - C_0^2, \quad \Gamma_{12,4}^1 \varphi_1 = C_1^2, \quad \Gamma_{13,4}^1 \varphi_1 = C_2^2, \quad \Gamma_{23,4}^1 \varphi_1 = 0.$$

Из последних трех уравнений, предполагая, что мы знаем формулу для a_1 (т.е. решение однородной системы), получаем явный вид функции φ_1 :

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} C_2^2 H_0 H_1^2 + \frac{1}{2} C_1^2 H_0^2 H_1 + \varphi_0(H_0).$$

Наконец, подставляя данную формулу в оставшееся уравнение, получаем

$$\Gamma_{12,3}^0 \varphi_0 := \partial_0^3 \varphi_0 = -C_0^2,$$

откуда легко находится φ_0 . Из данного примера видно, что задача, по большому счету, состоит в аккуратном вычислении правой части на каждом шаге.

Заметим, что в формуле (10) при каждой константе C_r^k стоит член степени однородности $r + k + 4$. Отсюда можно сделать вывод о том, что при больших k существует натуральное число I такое, что все векторы γ_i для $i \leq I$ будут нулевыми, т.е. $\varphi_i = a_i$ для всех $i \leq I$.

После того как найдена функция a_k , оставшиеся функции b_k и c_k восстанавливаются тривиальным образом, поскольку в нашем распоряжении будут явные формулы для всех вторых производных функции b_k и первых производных функции c_k . Рассуждая аналогичным образом, мы можем выписать все указанные выше десять законов сохранения, а также одиннадцатый, двенадцатый и т.д. Однако мы этого делать не будем ввиду громоздкости формул.

Необходимо отметить, что описанная выше процедура основывается, в частности, на преобразовании (см. пояснения перед формулой (8)), которое значительно экономит усилия при построении системы (8). Вопрос о регулярном построении такого преобразования в других случаях остается открытым. Однако этот недостаток не умаляет универсальности данного подхода применительно к другим интегрируемым системам гидродинамического типа. Описанный алгоритм может быть довольно легко запрограммирован в пакетах символьных вычислений, например в *Wolfram Mathematica*.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предлагается эффективный алгоритм последовательного вычисления бесконечного набора квазилокальных законов сохранения для бездисперсионного предела уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Даже простейшие такие законы сохранения (для $k \geq 4$) невозможно найти без использования методов символьных вычислений. Алгоритм, представленный в данной работе, универсален, т.е. он применим для любых трехмерных интегрируемых квазилинейных систем уравнений первого порядка. В последние годы интерес к описанию таких трехмерных интегрируемых квазилинейных систем уравнений первого порядка привел к появлению их классификации, причем для каждого случая была найдена пара Лакса, которая позволяет строить соответствующие пары двумерных гидродинамических цепочек. Таким образом, любой пример из этой классификации может быть также исследован по аналогии со случаем, изученным в данной работе.

Конструкция бесконечного множества квазилокальных законов сохранения для дисперсионных уравнений резко усложняется, но только по причине наличия дисперсионных слагаемых, из-за которых значительно возрастает объем вычислений.

По существу же принципиальной разницы между вычислениями для дисперсионных и бездисперсионных систем нет. Метод усреднения Уизема применяется именно к дисперсионным уравнениям, поэтому аналогичная задача для уравнения Кадомацева–Петвиашвили будет темой отдельной работы.

Благодарности. Автор благодарит М. В. Павлова за постановку задачи и многочисленные обсуждения, а также Н. И. Макаренко и Е. В. Ферапонтова за полезные замечания. Кроме того, автор выражает отдельную благодарность А. А. Черевко за неоценимую помощь при написании кода в пакете символьных вычислений *Wolfram Mathematica*.

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, “Метод усреднения Уизема для двумерных ‘интегрируемых’ уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:3 (1988), 37–52; “Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения”, *УМН*, **44**:2 (1989), 121–184; I. M. Krichever, “The dispersionless Lax equations and topological minimal models”, *Commun. Math. Phys.*, **143**:2 (1992), 415–429; “The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [2] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, “On integrability of $(2+1)$ -dimensional quasilinear systems”, *Commun. Math. Phys.*, **248**:1 (2004), 187–206.
- [3] P. A. Burovski, E. V. Ferapontov, S. P. Tsarev, “Second order quasilinear PDEs and conformal structures in projective space”, *Internat. J. Math.*, **21**:6 (2010), 799–841.
- [4] М. В. Павлов, “Классификация интегрируемых егоровских гидродинамических цепочек”, *ТМФ*, **138**:1 (2004), 55–70.
- [5] E. V. Ferapontov, L. Hadjikos, K. R. Khusnutdinova, “Integrable equations of the dispersionless Hirota type and hypersurfaces in the Lagrangian Grassmannian”, *Internat. Math. Res. Notes*, 2010, № 3, 496–535.
- [6] D. J. Benney, “Some properties of long non-linear waves”, *Stud. Appl. Math.*, **52** (1973), 45–50.
- [7] J. Gibbons, “Collisionless Boltzmann equations and integrable moment equations”, *Phys. D*, **3**:3 (1981), 503–511; J. Gibbons, Y. Kodama, “A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions. II”, *Phys. Lett. A*, **135**:3 (1989), 167–170.
- [8] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, “Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. I. Законы сохранения и решения”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:3 (1977), 31–42; “Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. II. Гамильтонова структура и высшие уравнения”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:1 (1978), 25–37; D. R. Lebedev, Yu. I. Manin, “Conservation laws and representation of Benney’s long wave equations”, *Phys. Lett. A*, **74**:3–4 (1979), 154–156; D. R. Lebedev, “Benney’s long wave equations: Hamiltonian formalism”, *Lett. Math. Phys.*, **3**:6 (1979), 481–488.
- [9] В. М. Тешуков, “О гиперболичности уравнений длинных волн”, *Докл. АН СССР*, **284**:3 (1985), 555–559; “Характеристики, законы сохранения и симметрии кинетических уравнений движения пузырьков жидкости”, *ПМТФ*, **40**:2 (1999), 86–100.
- [10] В. Е. Захаров, “Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:2 (1980), 15–24; V. E. Zakharov, “On the Benney equations”, *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 193–202.