Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Глушак, Б. Б. Маркив, М. В. Токарчук, Метод неравновесного статистического оператора Зубарева в обобщенной статистике многочастичных систем, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 1, 71–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:28:10

© 2018 г. П. А. Глушак*, Б. Б. Маркив[†], М. В. Токарчук*

МЕТОД НЕРАВНОВЕСНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ЗУБАРЕВА В ОБОБЩЕННОЙ СТАТИСТИКЕ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

Представлено обобщение метода неравновесного статистического оператора Зубарева на основании принципа максимума энтропии Реньи. В рамках этого подхода получены уравнения переноса для основного набора параметров сокращенного описания неравновесных процессов в классической системе взаимодействующих частиц, при этом использовались уравнения Лиувилля в дробных производных. Для классических систем частиц в среде с фрактальной структурой получено немарковское уравнение диффузии с пространственными дробными производными. В случае конкретного моделирования частотной зависимости функции памяти получено обобщенное уравнение диффузии типа Кеттано с учетом пространственной и временной фрактальности. Представлено обобщение неравновесной термополевой динамики в методе неравновесного статистического оператора Зубарева в рамках статистики Реньи.

Ключевые слова: энтропия Реньи, неравновесный статистический оператор, обобщенные уравнения переноса, уравнения диффузии.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9389>

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод коллективных переменных [1], метод временных функций Грина [2] и метод неравновесного статистического оператора (НСО) [3]–[9], предложенные Д. Н. Зубаревым, имеют огромное значение в статистической физике систем взаимодействующих частиц. Метод коллективных переменных получил свое развитие в работах И. Р. Юхновского в равновесной теории электролитов [10]–[13], в теории фазовых переходов [14]–[16], квантовых ферми- и бозе-систем [13], [17]–[19]. Метод временных функций Грина получил широчайшее применение в статистической теории конденсированных систем (см., например, [20]–[32]). Изящный метод НСО является наиболее общим в современной неравновесной статистической механике, поскольку из него

*Институт физики конденсированных систем НАН Украины, Львов, Украина.
E-mail: mtoc2010@ukr.net, mtoc@icmp.lviv.ua

[†]GlobalLogic Украина, Львов, Украина

можно получить другие важные подходы, основанные на применении проекционных операторов Мори и Кавасаки–Гантона [5], [33]. Он использовался в теории твердого тела при описании диэлектрических и магнитных свойств, процессов переноса в полупроводниках [4], [8], [9], [29], [32]–[35], в теории жидкого состояния и плотных газов при построении обобщенной гидродинамики для простых жидкостей [36]–[40], полярных и магнитных жидкостей [41]–[44], ионных жидкостей [45]–[47], плотной плазмы [48], [49] и полуквантового гелия [50], [51]. Метод НСО применяется в теории каталитических процессов на поверхности металлов [52], при построении релятивистской гидродинамики и термодинамики [53]–[58], а также в неравновесной термополевой динамике [59], [60].

Важно отметить две работы Зубарева и Климова [61], [62] по физике плазмы и управляемого термоядерного синтеза, которые фактически положили начало развитию целого направления физики пристеночной плазмы [63], [64]. Это направление актуально и сегодня в связи с проблемой пылевой плазмы в ТОКАМАКах и других установках плазмы [65]–[68].

В работах Зубарева, Морозова, Омеляна, Токарчука развита концепция согласованного описания кинетических и гидродинамических процессов в плотных газах, жидкостях и плазме [49], [69]–[73], предложенная в работе [74]. Эта концепция получила дальнейшее обобщение с учетом нелинейных гидродинамических флуктуаций [75]–[77], важных в теории турбулентности и динамике фазовых переходов. В исследованиях [76]–[78] метод НСО и метод коллективных переменных применялись совместно.

В работах [79]–[81] метод НСО получил обобщение в статистике Реньи [82]–[84]. Важно отметить работы Луцци и др. [85], [86], где метод НСО и энтропия Реньи используются для описания систем, далеких от равновесия.

Ниже мы кратко изложим метод НСО в статистике Реньи, а также затронем две задачи, которые обсуждались одним из авторов (М. В. Токарчук) с Д. Н. Зубаревым в феврале и мае 1992 года. Первая задача связана с уравнением Лиувилля в дробных производных, предложенным Нигматулиным [87]. Вторая задача – это формулировка и применение неравновесной термополевой динамики в методе НСО [59].

В разделе 2 сформулирован метод НСО Зубарева в статистике Реньи. В разделе 3 на основании представленного подхода получены уравнения переноса в пространственно-временных дробных производных для классической системы частиц с использованием уравнений Лиувилля в дробных производных. В разделе 4 изложена неравновесная термополевая динамика метода НСО в статистике Реньи.

2. МЕТОД НСО ЗУБАРЕВА В СТАТИСТИКЕ РЕНЬИ

В современных исследованиях нелинейных кинетических и гидродинамических процессов открытых систем [83] используются подходы, основанные на статистике Цаллиса [88], [89], Реньи [82], [90], Шармы–Миттала [91], [92], а также на суперстатистике [93], [94]. Особый интерес составляет обобщение метода НСО в случае статистики Реньи [79].

В методе НСО Зубарева, когда параметры сокращенного описания $\langle \hat{P}_n \rangle^t$ выбраны согласно идее Боголюбова, НСО системы $\varrho(x^N; t) = \varrho(x_1, \dots, x_N; t)$ может

быть найден в общем виде с учетом проецирования как решение уравнения Лиувилля [5], [8], [9]:

$$\varrho(x^N; t) = \varrho_{\text{rel}}(x^N; t) - \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') [1 - P_{\text{rel}}(t')] iL_N \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') dt', \quad (1)$$

где

$$T(t, t') = \exp_+ \left(- \int_{t'}^t [1 - P_{\text{rel}}(t')] iL_N dt' \right)$$

– оператор эволюции с учетом проецирования, $\exp_+$ – упорядоченная экспонента, $\varepsilon \rightarrow +0$ после предельного термодинамического перехода, iL_N – оператор Лиувилля системы взаимодействующих частиц. Здесь также использованы следующие обозначения: N – полное число частиц системы, $x_j = \{\vec{p}_j, \vec{r}_j\}$ – фазовые переменные j -й частицы, $P_{\text{rel}}(t')$ – обобщенный проекционный оператор Кавасаки–Гантона, структура которого зависит от формы релевантного статистического оператора:

$$P_{\text{rel}} \varrho' = \left(\varrho_{\text{rel}}(t) - \sum_n \frac{\delta \varrho_{\text{rel}}(t)}{\delta \langle \hat{P}_n \rangle^t} \langle \hat{P}_n \rangle^t \right) \int d\Gamma_N \varrho' + \sum_n \frac{\delta \varrho_{\text{rel}}(t)}{\delta \langle \hat{P}_n \rangle^t} \int d\Gamma_N \hat{P}_n \varrho', \quad (2)$$

$\varrho_{\text{rel}}(x^N; t)$ – релевантный статистический оператор, который при $t \rightarrow -\infty$ равен $\varrho(x^N; t)$. Используя метод Лагранжа, будем искать $\varrho_{\text{rel}}(x^N; t)$ из условия максимума функционала энтропии Реньи [79]

$$S_R(\varrho) = \frac{1}{1-q} \ln \int d\Gamma_N \varrho^q(t) \quad (3)$$

при фиксированных параметрах сокращенного описания и с учетом условия нормировки. Соответствующий функционал имеет следующий вид:

$$L_R(\varrho) = \frac{1}{1-q} \ln \int d\Gamma_N \varrho^q(t) - \alpha \int d\Gamma_N \varrho(t) - \sum_n F_n(t) \int d\Gamma_N \hat{P}_n \varrho(t), \quad (4)$$

где $F_n(t)$ – множители Лагранжа. Приравнявая к нулю функциональную производную $\delta L_R(\varrho)/\delta \varrho = 0$ и определяя параметр

$$\alpha = \frac{q}{1-q} - \sum_n F_n(t) \langle \hat{P}_n \rangle^t,$$

получим релевантный статистический оператор в следующем виде [79]:

$$\varrho_{\text{rel}}(t) = \frac{1}{Z_R^*} \left(1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \hat{P}_n \right)^{1/(q-1)} \quad (5)$$

со статистической суммой

$$Z_R^*(t) = \int d\Gamma_N \left(1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \hat{P}_n \right)^{1/(q-1)}$$

и перенормированными множителями

$$F_n^*(t) = \frac{F_n(t)}{1 + \frac{q-1}{q} \sum_l F_l(t) \langle \hat{P}_l \rangle^t}.$$

Множители Лагранжа $F_n(t)$ определяются из условий самосогласования:

$$\langle \hat{P}_n \rangle^t = \langle \hat{P}_n \rangle_{\text{rel}}^t. \quad (6)$$

Для того чтобы найти НСО (1), необходимо раскрыть явную структуру обобщенного проекционного оператора Кавасаки–Гантона (2). Для этого необходимо рассчитать вариационную производную от релевантного статистического оператора $\delta \varrho_{\text{rel}}(t) / \delta \langle \hat{P}_m \rangle^t$, а следовательно, и производную $\delta F_n^*(t) / \delta \langle \hat{P}_m \rangle^t$, которую можно рассчитать как $[\delta \langle \hat{P}_m \rangle^t / \delta F_n^*(t)]^{-1}$. Тогда действие операторов $P_{\text{rel}}(t) i L_N$ на релевантный статистический оператор можно представить в виде $P_{\text{rel}}(t) i L_N \varrho_{\text{rel}}(t) = P_{\text{rel}}(t) A(t) \varrho_{\text{rel}}(t) = [P(t) A(t)] \varrho_{\text{rel}}(t)$, где мы ввели обобщенный проекционный оператор, действующий на динамические переменные:

$$P(t) \bullet = \sum_{m,n} \langle \bullet \hat{P}_m \rangle_{\text{rel}} \langle \hat{P}_m \delta \{ [q\psi(t)]^{-1} \hat{P}_n \} \rangle_{\text{rel}}^{-1} \delta \{ [q\psi(t)]^{-1} \hat{P}_n \}, \quad (7)$$

где

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \hat{P}_n.$$

Учитывая, что

$$[1 - P_{\text{rel}}(t)] i L_N \varrho_{\text{rel}}(t) = - \sum_n I_n(t) F_n(t) \varrho_{\text{rel}}(t)$$

с обобщенными потоками

$$I_n(t) = [1 - P(t)] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) \dot{\hat{P}}_n, \quad (8)$$

мы можем записать НСО в явном виде [79]:

$$\varrho(x^N; t) = \varrho_{\text{rel}}(x^N; t) - \sum_n \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') I_n(t') F_n(t') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t') dt'. \quad (9)$$

С его помощью можно получить обобщенные уравнения переноса для параметров сокращенного описания, которые мы представим следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{P}_m \rangle^t = \langle \dot{\hat{P}}_m \rangle_{\text{rel}}^t + \sum_n \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{mn}(t, t') F_n(t') dt'. \quad (10)$$

Первый член в правой части уравнения рассчитывается с помощью релевантного статистического оператора (5). Обобщенные ядра переноса (функции памяти)

$$\varphi_{mn}(t, t') = \int d\Gamma_N \dot{\hat{P}}_m T(t, t') I_n(t') \varrho_{\text{rel}}(t') \quad (11)$$

представляют собой временные корреляционные функции, которые описывают диссипативные процессы в системе и построены на обобщенных потоках $I_n(t)$. В случае $q = 1$ приходим к соотношениям, известным в статистике Гиббса. Уравнения переноса (10), в общем случае учитывающие эффекты памяти, в приближении $\varphi_{mn}(t, t') \approx \varphi_{mn} \delta(t - t')$ описывают марковские процессы. НСО (9) и уравнения

переноса (10) в статистике Реньи составляют полный набор инструментов для описания неравновесных процессов в системах, далеких от равновесия, когда определены параметры сокращенного описания $\langle \hat{P}_n \rangle^t$.

В следующем разделе на основании представленного подхода получим уравнения переноса в пространственно-временных дробных производных для классической системы с фрактальностью.

3. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ В ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

В исследованиях явлений аномальной диффузии в пористых средах [95]–[99], в неупорядоченных системах [87], [100]–[104], физике плазмы [105]–[107], турбулентных [83], [108], кинетических и реакционно-диффузионных процессах [95], [109] активно используются уравнения переноса в дробных производных [95], [110], [111]. Важным является статистическое обоснование подходов к получению уравнений переноса в дробных производных. В работах [112]–[116] было предложено уравнение Лиувилля в дробных производных, а также получены цепочка уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона и уравнения гидродинамики.

Будем исходить из уравнения Лиувилля в дробных производных для неравновесной функции распределения частиц $\varrho(x^N; t)$ классической системы, предложенного Тарасовым [112]–[115]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x^N; t) + \sum_{j=1}^N D_{\vec{r}_j}^{\alpha} (\varrho(x^N; t) \vec{v}_j) + \sum_{j=1}^N D_{\vec{p}_j}^{\alpha} (\varrho(x^N; t) \vec{F}_j) = 0, \quad (12)$$

где $x^N = x_1, \dots, x_N$, $x_j = \{\vec{r}_j, \vec{p}_j\}$ – размерные обобщенные координаты $\vec{r}_j = r_{j1} \dots r_{jl}$ и размерные обобщенные импульсы $\vec{p}_j = p_{j1} \dots p_{jl}$ j -й частицы в фазовом пространстве [116] с фрактальным дифференциальным элементом объема $d^{\alpha}V = d^{\alpha}x_1 \dots d^{\alpha}x_N$ [112], [117]. Здесь $m = Mr_0/p_0t_0$, M – масса частицы, r_0 – характерная длина в конфигурационном пространстве, p_0 – характерное значение импульса, t_0 – характерное время. Фрактальный дифференциал d^{α} [117] определен следующим образом:

$$d^{\alpha}f(x) = \sum_{j=1}^{2N} D_{x_j}^{\alpha} f(x) (dx_j)^{\alpha},$$

где

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(z)}{(x-z)^{\alpha+1-n}} dz \quad (13)$$

– фрактальная производная Капуто [110], [118], [119] (здесь $f^{(n)}(z) = d^n f(z)/dz^n$, $n-1 < \alpha < n$) со следующими свойствами: $D_{x_j}^{\alpha} 1 = 0$ и $D_{x_j}^{\alpha} x_l = 0$, $j \neq l$. В общем случае

$$D_{\vec{r}_j}^{\alpha} (\varrho(x^N; t) \vec{F}_j) \neq \varrho(x^N; t) D_{\vec{r}_j}^{\alpha} \vec{F}_j + \vec{F}_j D_{\vec{r}_j}^{\alpha} \varrho(x^N; t).$$

Если обобщенные силы $\vec{F}_j$ не зависят от $\vec{p}_j$, а обобщенные скорости $\vec{v}_j$ не зависят от $\vec{r}_j$ и выполняются условия Гельмгольца

$$\frac{\partial v_j}{\partial p_l} - \frac{\partial v_l}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial v_j}{\partial r_l} + \frac{\partial F_l}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial r_l} - \frac{\partial F_l}{\partial r_j} = 0,$$

то из (12) мы получаем уравнение Лиувилля в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x^N; t) + iL_\alpha \varrho(x^N; t) = 0. \quad (14)$$

Здесь iL_α – оператор Лиувилля в дробных производных [120]:

$$iL_\alpha \varrho(x^N; t) = \left(\sum_{j=1}^N D_{\vec{p}_j}^\alpha H(\vec{r}, \vec{p}) D_{\vec{r}_j}^\alpha - \sum_{j=1}^N D_{\vec{r}_j}^\alpha H(\vec{r}, \vec{p}) D_{\vec{p}_j}^\alpha \right) \varrho(x^N; t), \quad (15)$$

а $H(\vec{r}, \vec{p})$ – гамильтониан системы в дробных производных.

Решение уравнения Лиувилля (14) в методе НСО Зубарева будет иметь вид (1) с соответствующим оператором Лиувилля iL_α (15). Релевантный статистический оператор $\varrho_{\text{rel}}(x^N; t)$ будем строить также на основании подхода [79] из экстремума функционала энтропии Реньи при фиксированных значениях наблюдаемых величин $\langle \hat{P}_n(x) \rangle_\alpha^t$ и сохранении условия нормировки $\langle 1 \rangle_{\alpha, \text{rel}}^t = 1$. При этом неравновесные средние значения определяются соответственно [120]:

$$\langle \hat{P}_n(x) \rangle_\alpha^t = \hat{I}^\alpha(1, \dots, N) \hat{T}(1, \dots, N) \hat{P}_n \varrho(x^N; t). \quad (16)$$

Для системы N частиц оператор $\hat{I}^\alpha(1, \dots, N)$ имеет следующий вид:

$$\hat{I}^\alpha(1, \dots, N) = \hat{I}^\alpha(1) \dots \hat{I}^\alpha(N), \quad \hat{I}^\alpha(j) = \hat{I}^\alpha(\vec{r}_j) \hat{I}^\alpha(\vec{p}_j),$$

и определяет операцию интегрирования

$$\hat{I}^\alpha(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\mu_\alpha(x), \quad d\mu_\alpha(x) = \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dx. \quad (17)$$

Действие оператора $\hat{T}(1, \dots, N) = \hat{T}(1) \dots \hat{T}(N)$ определяется правилом

$$\hat{T}(x_j) f(x_j) = \frac{1}{2} [f(\dots, x'_j - x_j, \dots) + f(\dots, x'_j + x_j, \dots)].$$

Средние значения, вычисляемые с релевантным статистическим оператором, определяются как

$$\langle (\cdot) \rangle_{\alpha, \text{rel}}^t = \hat{I}^\alpha(1, \dots, N) \hat{T}(1, \dots, N) (\cdot) \varrho_{\text{rel}}(x^N; t).$$

Тогда релевантный статистический оператор имеет следующий вид [120]:

$$\varrho_{\text{rel}}(t) = \frac{1}{Z_R(t)} \left[1 - \frac{q-1}{q} \sum_n \int d\mu_\alpha(x) F_n^*(x; t) \hat{P}_n(x) \right]^{1/(q-1)}. \quad (18)$$

В этом выражении $Z_R(t)$ – статистическая сумма распределения Реньи, которая определяется из условия нормировки и имеет вид

$$Z_R(t) = \hat{I}^\alpha(1, \dots, N) \hat{T}(1, \dots, N) \left\{ 1 - \frac{q-1}{q} \sum_n \int d\mu_\alpha(x) F_n^*(x; t) \hat{P}_n(x) \right\}^{1/(q-1)}, \quad (19)$$

где

$$F_n^*(x; t') = \frac{F_n(x; t')}{1 + \frac{q-1}{q} \sum_n \int d\mu_\alpha(x) F_n(x; t') \langle P_n(x) \rangle_\alpha^t},$$

а параметры $F_n(x; t)$ определяются из условий самосогласования

$$\langle \hat{P}_n(x) \rangle_\alpha^t = \langle \hat{P}_n(x) \rangle_{\alpha, \text{rel}}^t. \quad (20)$$

В общем случае для параметров сокращенного описания $\langle \hat{P}_n(x) \rangle_\alpha^t$ неравновесных процессов согласно (1) и (18) получаем НСО в виде

$$\varrho(t) = \varrho_{\text{rel}}(t) + \sum_n \int d\mu_\alpha(x) \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') I_n(x; t') \varrho_{\text{rel}}(t') F_n^*(x; t') dt', \quad (21)$$

где

$$I_n(x; t') = [1 - P(t)] \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) iL_\alpha \hat{P}_n(x) \quad (22)$$

– обобщенные потоки, $P(t)$ – проекционный оператор Мори [120]. Функция $\psi(t)$ имеет следующую структуру:

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q} \sum_n \int d\mu_\alpha(x) F_n(x; t) P_n(x).$$

С помощью НСО (21) можно получить обобщенные уравнения переноса для параметров сокращенного описания $\langle \hat{P}_n(x) \rangle_\alpha^t$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{P}_n(x) \rangle_\alpha^t &= \langle iL_\alpha \hat{P}_n(x) \rangle_{\alpha, \text{rel}}^t + \\ &+ \sum_{n'} \int d\mu_\alpha(x') \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{P_n P_{n'}}(x, x'; t, t') F_{n'}^*(x'; t') dt', \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{P_n P_{n'}}(x, x'; t, t') &= \\ &= \hat{I}^\alpha(1, \dots, N) \hat{T}(1, \dots, N) [iL_\alpha \hat{P}_n(x) T(t, t') I_{n'}(x'; t') \varrho_{\text{rel}}(x^N; t')] \end{aligned} \quad (24)$$

– обобщенные ядра переноса (функции памяти), которые описывают диссипативные процессы в системе. В частности, для описания диффузионных процессов в классических системах частиц в среде с фрактальной структурой при постоянной температуре параметром сокращенного описания является неравновесная плотность числа частиц $n(\vec{r}; t) = \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle_\alpha^t$, где $n(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$ – микроскопическая плотность числа частиц. В этом случае на основании соотношений (18), (21) и уравнений переноса (23) получаем немарковское уравнение диффузии с пространственными дробными производными:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle_\alpha^t = \frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}^\alpha} \int d\mu_\alpha(\vec{r}') \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} D_q(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}'^\alpha} \beta \nu^*(\vec{r}'; t') dt'. \quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_q(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') &= \langle \hat{v}(\vec{r}) T(t, t') \hat{v}(\vec{r}') \rangle_{\alpha, \text{rel}}^t = \\ &= \hat{I}^\alpha(1, \dots, N) \hat{T}(1, \dots, N) \hat{v}(\vec{r}) T(t, t') \hat{v}(\vec{r}') \times \\ &\times \frac{1}{Z_R(t)} \left\{ 1 - \frac{q-1}{q} \beta \left[H - \int d\mu_\alpha(\vec{r}) \nu^*(\vec{r}; t) \hat{n}(\vec{r}) \right] \right\}^{1/(q-1)} \end{aligned} \quad (26)$$

– обобщенный коэффициент диффузии в статистике Реньи, в котором усреднение выполняется со степенным распределением Реньи, где $\hat{v}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{v}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$ – микроскопическая плотность потока частиц, $\beta = 1/kT$, k – постоянная Больцмана, T – равновесная температура. При $q = 1$ обобщенное уравнение диффузии в статистике Реньи переходит в обобщенное уравнение диффузии статистики Гиббса в дробных производных. Когда же $q = 1$ и $\alpha = 1$, мы приходим к обобщенному уравнению диффузии статистики Гиббса [5]. Пренебрегая пространственной неоднородностью для обобщенного коэффициента диффузии в марковском приближении во времени, можно записать $D_q(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \approx D_q \delta(t - t') \delta(\vec{r} - \vec{r}')$. Исключив параметр $\nu^*(\vec{r}'; t')$ при помощи условия самосогласования, из (25) получаем уравнение диффузии в дробных производных:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle_\alpha^t = D_q \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial r^{2\alpha}} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle_\alpha^t. \quad (27)$$

Обобщенное уравнение диффузии учитывает пространственную фрактальность системы и эффекты памяти в обобщенном коэффициенте диффузии частиц $D_q(\vec{r}, \vec{r}'; t, t')$ в статистике Реньи. Пространственная фрактальность системы, очевидно, влияет на процессы переноса частиц, которые связаны с характерными временами релаксации. Известно, что неравновесные корреляционные функции $D_q(\vec{r}, \vec{r}'; t, t')$ невозможно рассчитать точно, поэтому используют конкретные приближения исходя из физических соображений. Во временном интервале $-\infty \div t$ процессы переноса частиц в пространственно неоднородной системе с фрактальной структурой могут характеризоваться совокупностью времен релаксации, которые связаны с характером взаимодействия частиц со средой. Для раскрытия временной мультифрактальности в обобщенном уравнении диффузии используем следующее приближение для обобщенного коэффициента диффузии частиц:

$$D_q(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = W(t, t') \bar{D}_q(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (28)$$

в котором $W(t, t')$ можно определить как функцию памяти во времени. С учетом этого соотношения уравнение (25) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle_\alpha^t = \int_{-\infty}^t e^{\varepsilon(t'-t)} W(t, t') \Psi(\vec{r}; t') dt', \quad (29)$$

где

$$\Psi(\vec{r}; t') = \int d\mu_\alpha(\vec{r}') \frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}^\alpha} \bar{D}_q(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}'^\alpha} \beta \nu^*(\vec{r}'; t'). \quad (30)$$

Далее, применив преобразование Фурье к уравнению (29), получим

$$i\omega n(\vec{r}; \omega) = W(\omega) \Psi(\vec{r}; \omega). \quad (31)$$

Зависимость функции памяти от частоты представим выражением, в котором введено время релаксации τ , характеризующее процессы переноса частиц в системе:

$$W(\omega) = \frac{(i\omega)^{1-\gamma}}{1 + i\omega\tau}, \quad 0 \leq \gamma < 1. \quad (32)$$

Тогда уравнение (31) можно записать в виде

$$(1 + i\omega\tau) i\omega n(\vec{r}; \omega) = (i\omega)^{1-\gamma} \Psi(\vec{r}; \omega). \quad (33)$$

Применим преобразование Фурье к дробным производным от функций:

$$L({}_0D_t^{1-\gamma} f(t); i\omega) = (i\omega)^{(1-\gamma)} L(f(t); i\omega), \quad (34)$$

где ${}_0D_t^{1-\gamma}$ – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [110]:

$${}_0D_t^{1-\gamma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\gamma}} dt',$$

с использованием которого обратное преобразование к временной зависимости в уравнении (33) дает обобщенное уравнение диффузии типа Кеттано с учетом пространственной и временной фрактальности:

$$\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} n(\vec{r}; t) + \frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}; t) = {}_0D_t^{1-\gamma} \int d\mu_\alpha(\vec{r}') \frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}^\alpha} \bar{D}_q(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}'^\alpha} \beta \nu^*(\vec{r}'; t). \quad (35)$$

Важно отметить, что если в уравнении (35) положить $\alpha = 1$, т.е. пренебречь пространственной фрактальностью, а также пространственной неоднородностью $\bar{D}_q(\vec{r}, \vec{r}') = \bar{D}_q \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, то при $q = 1$ (в случае статистики Гиббса) получим уравнение диффузии типа Кеттано, которое ранее было получено в работах [99], [121],

$$\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} n(\vec{r}; t) + \frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}; t) = {}_0D_t^{1-\gamma} \bar{D} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} \nu(\vec{r}; t). \quad (36)$$

Это уравнение было успешно использовано для исследований субдиффузионного импеданса в мультислойных наноструктурах [122].

4. НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОПОЛЕВАЯ ДИНАМИКА В СТАТИСТИКЕ РЕНЬИ

В современных теоретических исследованиях неравновесных свойств кварк-глюонной плазмы [123]–[125] – одного из состояний ядерной материи, которая может образовываться в ультрарелятивистских столкновениях тяжелых ядер [126], – активно используются статистические подходы с применением определений энтропии Цаллиса и Реньи [127]–[135]. При этом важной проблемой является построение кинетических уравнений и уравнений гидродинамики для ядерной материи большой плотности и высокой температуры. Одним из возможных подходов к решению этих задач может быть неравновесная термополевая динамика.

Мы будем использовать метод НСО в термополевой формулировке [59], в которой средние значения величин, соответствующих наблюдаемым переменным, находятся с помощью неравновесного термобакуумного вектора состояния $|\varrho(t)\rangle\rangle$:

$$\langle A \rangle^t = \langle\langle 1 | A \varrho(t) \rangle\rangle = \langle\langle 1 | \hat{A} | \varrho(t) \rangle\rangle, \quad (37)$$

где $\hat{A}$ – супероператор, который действует на состояние $|\varrho(t)\rangle\rangle$. Неравновесный термобакуумный вектор состояния $|\varrho(t)\rangle\rangle$ удовлетворяет “уравнению Шредингера” [59]:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\varrho(t)\rangle\rangle - \left| \frac{1}{i\hbar} [H, \varrho(t)] \right\rangle\rangle = 0, \quad (38)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} |\varrho(t)\rangle\rangle - \frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\varrho(t)\rangle\rangle = 0. \quad (39)$$

Здесь “полный” гамильтониан $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{H} = H - \tilde{H}, \quad (40)$$

причем $\langle\langle 1|\hat{H} = 0$, а $H = H(\hat{a}^+, \hat{a})$, $\tilde{H} = H^{(*)}(\tilde{a}^+, \tilde{a})$ – супероператоры, построенные на супероператорах рождения и уничтожения термического пространства Лиувилля [136]–[138]. Супероператоры H и $\tilde{H}$ определены согласно соотношениям

$$|H\varrho(t)\rangle\rangle = H|\varrho(t)\rangle\rangle, \quad |\varrho(t)H\rangle\rangle = \tilde{H}|\varrho(t)\rangle\rangle. \quad (41)$$

Супероператоры $\hat{a}_l^+$, $\hat{a}_j$, $\tilde{a}_l^+$, $\tilde{a}_j$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и операторы a_l^+ , a_j соответствующей статистики:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_l, \hat{a}_j^+]_\sigma &= [\tilde{a}_l, \tilde{a}_j^+]_\sigma = \delta_{lj}, & [\hat{a}_l, \tilde{a}_j]_\sigma &= [\hat{a}_l^+, \tilde{a}_j^+]_\sigma = 0, \\ [\hat{a}_l, \hat{a}_j]_\sigma &= [\hat{a}_l^+, \hat{a}_j^+]_\sigma = 0, & [\tilde{a}_l, \tilde{a}_j]_\sigma &= [\tilde{a}_l^+, \tilde{a}_j^+]_\sigma = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где $[A, B]_\sigma = AB - \sigma BA$, а $\sigma = +1$ для бозонов и $\sigma = -1$ для фермионов. Супероператоры уничтожения $\hat{a}_l$, $\tilde{a}_l$ определяются согласно их действию на основное состояние – супервакуум [139]–[141]:

$$\hat{a}_l|00\rangle\rangle = \tilde{a}_l|00\rangle\rangle = 0, \quad (43)$$

где $|00\rangle\rangle = |0\rangle\langle 0|$ – супервакуум. Причем имеют место соотношения $\hat{a}_l|0\rangle = a_l|0\rangle = 0$ и $\langle 0|\tilde{a}_l = 0$, т.е. супервакуум $|00\rangle\rangle$ является ортогонализованным состоянием двух вакуумных состояний $\langle 0|$ и $|0\rangle$. Учитывая коммутационные соотношения (42) и определения (43), единичные векторы $|1\rangle\rangle = |\sum_l |l\rangle\langle l|$ и $\langle\langle 1| = \langle\langle \sum_l |l\rangle\langle l|$ можно представить в виде

$$|1\rangle\rangle = \exp\left\{\sum_l \hat{a}_l^+ \tilde{a}_l^+\right\}|00\rangle\rangle, \quad \langle\langle 1| = \langle\langle 00| \exp\left\{\sum_l \tilde{a}_l \hat{a}_l\right\}. \quad (44)$$

С их помощью этих векторов найдем соотношения между действиями супероператоров $\hat{a}_l^+$, $\hat{a}_j$, $\tilde{a}_l^+$, $\tilde{a}_j$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_l|1\rangle\rangle &= \tilde{a}_l^+|1\rangle\rangle, & \langle\langle 1|\hat{a}_l^+ &= \langle\langle 1|\tilde{a}_l, \\ \hat{a}_l^+|1\rangle\rangle &= \sigma \tilde{a}_l|1\rangle\rangle, & \langle\langle 1|\hat{a}_l &= \langle\langle 1|\tilde{a}_l^+ \sigma. \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, в формализме термополевой динамики [139]–[141] число операторов удвоено введением операторов $A(\hat{a}^+, \hat{a})$ и $\tilde{A}(\tilde{a}^+, \tilde{a})$, для которых выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned} \widetilde{A_1 A_2} &= \tilde{A}_1 \tilde{A}_2, & \tilde{\tilde{A}} &= A, \\ c_1 \widetilde{A_1} + c_2 \widetilde{A_2} &= c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2, & & \\ |A\rangle\rangle &= \hat{A}|1\rangle\rangle, & |A_1 A_2\rangle\rangle &= \hat{A}_1 |A_2\rangle\rangle, \end{aligned} \quad (46)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Более подробное изложение свойств супероператоров $\hat{a}_l^+$, $\hat{a}_j$, $\tilde{a}_l^+$, $\tilde{a}_j$ и термического пространства Лиувилля дано в работах [139]–[141]. Неравновесный термовакuumный вектор состояния нормирован: $\langle\langle 1|\varrho(t)\rangle\rangle = \langle\langle 1|\hat{\varrho}(t)|1\rangle\rangle = 1$, где $\hat{\varrho}(t)$ – неравновесный статистический супероператор, который зависит от супероператоров $\hat{a}_l^+$, $\hat{a}_j$, $\hat{\varrho}(t) \equiv \varrho(\hat{a}^+, \hat{a}; t)$. Причем супероператор $\tilde{\varrho}(t) \equiv \varrho^+(\tilde{a}^+, \tilde{a}; t)$ зависит от супероператоров $\tilde{a}_l^+$, $\tilde{a}_j$.

В методе НСО в термополевой формулировке [59], [60] неравновесный термовакuumный вектор состояния, как решение “уравнения Шредингера” с источником

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\right)|\varrho(t)\rangle\rangle = -\varepsilon(|\varrho(t)\rangle\rangle - |\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle), \quad (47)$$

с учетом проецирования может быть найден в виде [59]

$$|\varrho(t)\rangle\rangle = |\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') [1 - \mathcal{P}_{\text{rel}}(t')] \frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\varrho_{\text{rel}}(t')\rangle\rangle. \quad (48)$$

Здесь

$$T(t, t') = \exp_+ \left\{ \int_{t'}^t dt' [1 - \mathcal{P}_{\text{rel}}(t')] \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \right\}$$

– оператор эволюции с учетом проецирования, где $\exp_+$ – упорядоченная экспонента, а $\varepsilon \rightarrow +0$ после термодинамического предельного перехода,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{rel}}(t)(|\cdot\rangle\rangle) &= |\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle + \sum_n \frac{\delta|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle}{\delta\langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho(t)\rangle\rangle} \langle\langle 1|\hat{p}_n|\cdot\rangle\rangle - \\ &- \sum_n \frac{\delta|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle}{\delta\langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho(t)\rangle\rangle} \langle\langle 1|\hat{p}_n|\cdot\rangle\rangle \langle\langle 1|\cdot\rangle\rangle \end{aligned} \quad (49)$$

– проекционный оператор Кавасаки–Гантона, который действует только на векторы состояния $|\cdot\rangle\rangle$ и обладает следующими операторными свойствами: $\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)|\varrho(t')\rangle\rangle = |\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle$, $\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)|\varrho_{\text{rel}}(t')\rangle\rangle = |\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle$, $\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)\mathcal{P}_{\text{rel}}(t') = \mathcal{P}_{\text{rel}}(t)$. Релевантный термовакuumный вектор состояния

$$|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle = \hat{\varrho}_{\text{rel}}(t)|1\rangle\rangle, \quad (50)$$

нормированный согласно соотношению $\langle\langle 1|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle = \langle\langle 1|\hat{\varrho}_{\text{rel}}(t)|1\rangle\rangle = 1$, где $\hat{\varrho}_{\text{rel}}(t)$ – релевантный статистический супероператор. Релевантный термовакuumный вектор состояния системы определим следующим образом. Пусть $\langle p_n \rangle^t = \langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho(t)\rangle\rangle$ – набор наблюдаемых переменных, описывающих неравновесное состояние системы, где p_n – операторы, которые построены на операторах рождения a_l^+ и уничтожения a_l . Релевантный статистический оператор $\varrho_{\text{rel}}(t)$ будем определять из экстремума функционала энтропии Реньи

$$L_R(t) = \frac{1}{1-q} \ln \langle\langle 1|(\varrho'(t))\rangle\rangle^q - \alpha \langle\langle 1|\varrho'(t)\rangle\rangle - \sum_n F_n^*(t) \langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho'(t)\rangle\rangle$$

при дополнительном условии, что заданы средние значения $\langle p_n \rangle^t$ при сохранении условия нормировки $\langle\langle 1|\hat{\varrho}(t)|1\rangle\rangle = 1$. Параметры Лагранжа α и $F_n^*(t)$ определяются из условия нормировки и условий самосогласования соответственно:

$$\langle \cdot \rangle_{\text{rel}}^t = \langle\langle 1|\cdot|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle, \quad \langle p_n \rangle^t = \langle p_n \rangle_{\text{rel}}^t = \langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle. \quad (51)$$

Тогда релевантный статистический оператор $\varrho_{\text{rel}}(t)$ имеет вид

$$\varrho_{\text{rel}}(t) = \frac{1}{Z_R(t)} \left[1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \delta \hat{p}_n(t) \right]^{1/(q-1)}, \quad (52)$$

где q – параметр Реньи, $\delta\hat{p}_n(t) = \hat{p} - \langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho(t)\rangle\rangle$,

$$Z_R(t) = \left\langle\left\langle 1 \left| \left[1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \delta\hat{p}_n(t) \right]^{1/(q-1)} \right| \right\rangle\right\rangle \quad (53)$$

– статистическая сумма. При $q = 1$ из (52) получим релевантный статистический оператор, что соответствует статистике Гиббса [59]:

$$\varrho_{\text{rel}}(t) = \exp \left\{ -\Phi(t) - \sum_n F_n^*(t) p_n \right\}, \quad (54)$$

где $\Phi(t) = \ln \text{Sp} \exp \{ -\sum_n F_n^*(t) p_n \}$ – функционал Масье–Планка. Теперь, подставив (52) в (48), для неравновесного термовакuumного вектора состояния получим

$$|\varrho(t)\rangle\rangle = |\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle + \sum_n \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} T(t, t') \left| \int_0^1 d\tau \varrho_{\text{rel}}^\tau(t') J_n(t') \varrho_{\text{rel}}(t)^{1-\tau}(t') \right\rangle\rangle F_n^*(t'), \quad (55)$$

где $J_n(t) = [1 - \mathcal{P}(t)](1/q)\psi^{-1}(t)\dot{\hat{p}}_n$ – операторы обобщенных потоков, которые описывают диссипативные процессы в системе, $\dot{\hat{p}}_n = -(1/i\hbar)\hat{H}\hat{p}_n$. Проекционный оператор $\mathcal{P}(t)$ действует на операторы и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t)(\bullet) = & \langle\langle 1|\bullet|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle + \sum_m \delta \left[\int_0^1 d\tau \varrho_{\text{rel}}^\tau(t) \psi^{-1}(t) \times \right. \\ & \left. \times \left(F_m(t) + \sum_n f_{mn}^{-1}(t) \delta\hat{p}_n \right) \varrho_{\text{rel}}^{-\tau} \right] \left\langle\left\langle \bullet \left| \int_0^1 d\tau \varrho_{\text{rel}}^\tau(t) \delta\hat{p}_n \varrho_{\text{rel}}^{-\tau}(t) \varrho_{\text{rel}}(t) \right| \right\rangle\right\rangle, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\delta[\bullet] = [\bullet] - \langle\langle 1|[\bullet]|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle$ и $f_{mn}(t) = \delta\langle\langle 1|\hat{p}_m|\varrho(t)\rangle\rangle/\delta F_n(t)$. Оператор $\psi(t)$ имеет вид

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q} \sum_n F_n^*(t) \delta\hat{p}_n(t).$$

С помощью неравновесного термовакuumного вектора состояния $|\varrho(t)\rangle\rangle$ (55) получим уравнения переноса для неравновесных средних значений $\langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho(t)\rangle\rangle$ в термполе-вом представлении. Для этого используем тождество

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho(t)\rangle\rangle = \langle\langle 1|\dot{\hat{p}}_n|\varrho(t)\rangle\rangle = \langle\langle 1|\dot{\hat{p}}_n|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle + \langle\langle J_n(t)|\varrho(t)\rangle\rangle \quad (57)$$

и, усредняя последнее слагаемое в правой части с $|\varrho(t)\rangle\rangle$ (55), получим уравнения переноса для средних значений $\langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle 1|\hat{p}_n|\varrho(t)\rangle\rangle = & \langle\langle 1|\dot{\hat{p}}_n|\varrho_{\text{rel}}(t)\rangle\rangle + \\ & + \sum_{n'} \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \left\langle\left\langle \dot{\hat{p}}_n T(t, t') \left| \int_0^1 d\tau \varrho_{\text{rel}}^\tau(t') J_{n'}(t') \varrho_{\text{rel}}^{1-\tau}(t') \right| \right\rangle\right\rangle F_{n'}^*(t'). \end{aligned} \quad (58)$$

Уравнения переноса (58) учитывают эффекты памяти и могут быть использованы для описания неравновесных процессов в квантовых бозе- и ферми-системах в конкретных случаях в рамках неравновесной термполево-й динамики неэкстенсивной

статистики. В частности, в работе [60] была получена система релятивистских уравнений переноса согласованного описания кинетических и гидродинамических процессов в кварк-глюонной системе с использованием метода НСО в термополевом представлении в статистике Гиббса. Изложенный подход в рамках статистики Реньи может быть обобщен на случай релятивистских систем, что важно [127]–[135] и чему будут посвящены отдельные работы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили обобщение метода НСО Зубарева на основании принципа максимума энтропии Реньи. Применяя этот подход, мы получили уравнения переноса для основного набора параметров сокращенного описания неравновесных процессов в классической системе взаимодействующих частиц, используя уравнения Лиувилля в дробных производных. В частности, для описания диффузионных процессов в классической системе частиц в среде с фрактальной структурой получено немарковское уравнение диффузии с пространственными дробными производными. В случае конкретного моделирования частотной зависимости функции памяти получено обобщенное уравнение диффузии типа Кеттано с учетом пространственной и временной фрактальности. Мы обобщили неравновесную термополевою динамику в методе НСО Зубарева [59] в рамках статистики Реньи.

Список литературы

- [1] Д. Н. Зубарев, “Вычисление конфигурационного интеграла системы частиц с кулоновским взаимодействием”, *Докл. АН СССР*, **95**:4 (1954), 757–760.
- [2] Д. Н. Зубарев, “Двухвременные функции Грина в статистической физике”, *УФН*, **71**:1 (1960), 71–116.
- [3] Д. Н. Зубарев, “Статистический оператор для неравновесных систем”, *Докл. АН СССР*, **140**:1 (1961), 92–95.
- [4] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика*, Наука, М., 1971.
- [5] Д. Н. Зубарев, “Современные методы статистической теории неравновесных процессов”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем.*, **15**, ВИНТИ, М., 1980, 131–226.
- [6] D. N. Zubarev, “Nonequilibrium statistical operator as a generalization of Gibbs distribution for nonequilibrium case”, *Condens. Matter Phys.*, 1994, № 4, 7–25.
- [7] V. G. Morozov, G. Röpke, “Zubarev’s method of a nonequilibrium statistical operator and some challenges in the theory of irreversible processes”, *Condens. Matter Phys.*, **1**:4(16) (1998), 673–686.
- [8] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Рёпке, *Статистическая механика неравновесных процессов*, т. 1, Физматлит, М., 2002; *англ. пер.: D. N. Zubarev, V. G. Morozov, G. Röpke, Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes*, v. 1: *Basic Concepts, Kinetic Theory*, Akademie, Berlin, 1996.
- [9] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Рёпке, *Статистическая механика неравновесных процессов*, т. 2, Физматлит, М., 2002; *англ. пер.: D. N. Zubarev, V. G. Morozov, G. Röpke, Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes*, v. 2: *Relaxation and Hydrodynamic Processes*, Akademie, Berlin, 1997.
- [10] И. Р. Юхновский, М. Ф. Головкин, *Статистическая теория классических равновесных систем*, Наукова думка, Киев, 1980.
- [11] И. Р. Юхновский, “Метод коллективных переменных с системой отсчета для большого канонического ансамбля”, *ТМФ*, **79**:2 (1989), 282–296.

- [12] I. R. Yukhnovskii, O. V. Patsahan, “Grand canonical distribution for multicomponent system in the collective variables method”, *J. Statist. Phys.*, **81**:3–4 (1995), 647–672.
- [13] І. Р. Юхновський, *Вибрані праці. Фізика*, Вид. Національного університету “Львівська політехніка”, Львів, 2005.
- [14] I. R. Yukhnovskii, *Phase Transitions of the Second Order. Collective Variables Method*, World Sci., Singapore, 1987.
- [15] I. R. Yukhnovskii, “The functional of the grand partition function for the investigation of the liquid-gas critical point”, *Phys. A*, **168**:3 (1990), 999–1020.
- [16] І. Р. Юхновський, М. П. Козловський, І. В. Пилук, *Мікроскопічна теорія фазових переходів у тривимірних системах*, Євровіт, Львів, 2001.
- [17] И. А. Вакарчук, И. Р. Юхновский, “Самосогласованное описание дальнедействующих и короткодействующих корреляций в теории жидкого He^4 . I”, *ТМФ*, **40**:1 (1979), 100–111.
- [18] И. А. Вакарчук, О. Л. Гонопольский, И. Р. Юхновский, “Самосогласованное описание дальнедействующих и короткодействующих корреляций в теории жидкого He^4 . II”, *ТМФ*, **41**:1 (1979), 77–88.
- [19] П. П. Костробий, И. Р. Юхновский, “Функции распределения вырожденного электронного газа в периодическом внешнем поле”, *ТМФ*, **32**:2 (1977), 208–222.
- [20] В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, *Метод функций Грина в статистической механике*, Физматлит, М., 1961.
- [21] Н. М. Плакида, “Метод двухвременных функций Грина в теории ангармонических кристаллов”, *Статистическая физика и квантовая теория поля*, ред. Н. Н. Боголюбов, Наука, М., 1973, 205–240.
- [22] Н. М. Плакида, *Некоторые вопросы квантовой теории твердого тела (метод двухвременных функций Грина)*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1974.
- [23] Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников, “Метод двухвременных температурных функций Грина в равновесной и неравновесной статистической механике”, *Тр. МИАН*, **175** (1986), 134–177.
- [24] Н. М. Плакида, “Двухвременные функции Грина в теории сверхпроводимости”, *ТМФ*, **154**:1 (2008), 129–146.
- [25] Н. М. Плакида, “Двухвременные функции Грина и диаграммная техника”, *ТМФ*, **168**:3 (2011), 518–535.
- [26] В. Д. Крефт, Д. Кремп, В. Эбелинг, Г. Рёпке, *Квантовая статистика систем заряженных частиц*, Мир, М., 1988.
- [27] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, Kluwer, New York, 2000.
- [28] В. Т. Швець, *Метод функцій Гріна в теорії металів*, Латстар, Одеса, 2002.
- [29] R. Luzzi, A. R. Vasconcellos, J. G. Ramos, *Predictive Statistical Mechanics. A Nonequilibrium Ensemble Formalism*, Fundamental Theories of Physics, **122**, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [30] Ю. А. Церковников, *Статистическая механика. Избранные труды*, Янус-К, М., 2010.
- [31] І. В. Стасюк, *Функції Гріна у квантовій статистиці твердих тіл: посібник*, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2013.
- [32] R. Luzzi, A. R. Vasconcellos, J. G. Ramos, *Statistical Foundations of Irreversible Thermodynamics*, Springer Science and Business Media, Berlin, 2013.
- [33] И. И. Ляпилин, В. П. Калашников, *Неравновесный статистический оператор и его приложения к кинетике парамагнитных явлений в проводящих кристаллах*, УрО РАН, Екатеринбург, 2008.
- [34] Г. Рёпке, *Неравновесная статистическая механика*, Мир, М., 1990; англ. пер.: G. Röpke, *Nonequilibrium Statistical Physics*, Wiley-VCH, New York, 2013.

- [35] А. А. Хамзин, Р. Р. Нигматулин, *Метод неравновесного статистического оператора и его приложение к кинетике изинговских магнетиков*, Учебное пособие, Казан. ун-т, Казань, 2011.
- [36] И. М. Мрыглод, М. В. Токарчук, “К статистической гидродинамике простых жидкостей”, *Вопросы атомной науки и техники*, **3(24)** (1992), 134–139.
- [37] I. M. Mryglod, I. P. Omelyan, M. V. Tokarchuk, “Generalized collective modes for the Lennard-Jones fluid”, *Mol. Phys.*, **84**:2 (1995), 235–259.
- [38] Б. Б. Маркив, И. П. Омельян, М. В. Токарчук, “Неравновесный статистический оператор в обобщенной молекулярной гидродинамике жидкостей”, *ТМФ*, **154**:1 (2008), 91–101.
- [39] B. B. Markiv, I. P. Omelyan, M. V. Tokarchuk, “Relaxation to the state of molecular hydrodynamics in the generalized hydrodynamics of liquids”, *Phys. Rev. E*, **82**:4 (2010), 041202, 11 pp.
- [40] I. M. Mryglod, “Generalized statistical hydrodynamics of fluids: approach of generalized collective modes”, *Condens. Matter Phys.*, **1**:4(16) (1998), 753–796.
- [41] I. P. Omelyan, I. M. Mryglod, M. V. Tokarchuk, “Dielectric relaxation in dipolar fluids. Generalized mode approach”, *Condens. Matter Phys.*, **1**:1(13) (1998), 179–200.
- [42] I. P. Omelyan, I. M. Mryglod, M. V. Tokarchuk, “Generalized dipolar modes of a Stockmayer fluid in high-order approximations”, *Phys. Rev. E.*, **57**:6 (1998), 6667–6676.
- [43] I. M. Mryglod, M. V. Tokarchuk, R. Folk, “On the hydrodynamic theory of a magnetic liquid I. General description”, *Phys. A*, **220**:3–4 (1995), 325–348.
- [44] И. М. Мрыглод, М. В. Токарчук, “Статистическая гидродинамика магнитных жидкостей. I. Метод неравновесного статистического оператора”, *ТМФ*, **115**:1 (1998), 132–153.
- [45] Д. Н. Зубарев, М. В. Токарчук, “Неравновесная статистическая гидродинамика ионных систем”, *ТМФ*, **70**:2 (1987), 234–254.
- [46] B. Markiv, A. Vasylenko, M. Tokarchuk, “Statistical description of hydrodynamic processes in ionic melts while taking into account polarization effects”, *J. Chem. Phys.*, **136**:23 (2012), 234502, 10 pp.
- [47] B. Markiv, M. Tokarchuk, “Effect of ion polarization on longitudinal excitations in ionic melts”, *J. Chem. Phys.*, **143**:19 (2015), 194509, 8 pp.
- [48] М. В. Токарчук, “К статистической теории неравновесной плазмы в собственном электромагнитном поле”, *ТМФ*, **97**:1 (1993), 27–43.
- [49] B. Markiv, M. Tokarchuk, “Consistent description of kinetics and hydrodynamics of dusty plasma”, *Phys. Plasmas*, **21**:2 (2014), 023707, 16 pp.
- [50] В. В. Игнатюк, И. М. Мрыглод, М. В. Токарчук, “К теории динамических свойств полуквантового гелия”, *ФНТ*, **25**:5 (1999), 407–416.
- [51] В. В. Игнатюк, И. М. Мрыглод, М. В. Токарчук, “Временные корреляционные функции и обобщенные коэффициенты переноса полуквантового гелия”, *ФНТ*, **25**:11 (1999), 1145–1153.
- [52] П. П. Костробій, М. В. Токарчук, Б. М. Маркович, В. В. Ігнатюк, Б. В. Гнатів, *Реакційно-дифузійні процеси в системах “метал–газ”*, Видав. НУ “Львівська політехніка”, Львів, 2009.
- [53] Д. Н. Зубарев, А. В. Прозоркевич, С. А. Смолянский, “Вывод нелинейных обобщенных уравнений квантовой релятивистской гидродинамики”, *ТМФ*, **40**:3 (1979), 394–407.
- [54] А. В. Прозоркевич, В. Л. Самородов, С. А. Смолянский, “Квантовая релятивистская гидродинамика систем с нарушенной симметрией. I. Локально-равновесное состояние”, *ТМФ*, **52**:3 (1982), 463–472.
- [55] С. А. Смолянский, “Квантовая релятивистская гидродинамика систем с нарушенной симметрией. II. Неравновесное состояние”, *ТМФ*, **52**:2 (1982), 292–300.

- [56] F. Becattini, L. Tinti, “Nonequilibrium thermodynamical inequivalence of quantum stress-energy and spin tensors”, *Phys. Rev. D*, **87**:2 (2013), 025029, 15 pp.
- [57] L. Tinti, “Thermodynamical inequivalence of stress-energy and spin tensors”, *Progress in Mathematical Relativity, Gravitation and Cosmology*, Proceedings of the Spanish Relativity Meeting ERE2012 (University of Minho, Guimaraes, Portugal, September 3–7, 2012), eds. A. García-Parrado, F. C. Mena, F. Moura, E. Vaz, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014, 433–437.
- [58] F. Becattini, L. Bucciantini, E. Grossi, L. Tinti, “Local thermodynamical equilibrium and the β frame for a quantum relativistic fluid”, *Eur. Phys. J. C*, **75**:5 (2015), 191, 17 pp.
- [59] Д. Н. Зубарев, М. В. Токарчук, “Неравновесная термополевая динамика и метод неравновесного статистического оператора. I. Основные соотношения”, *ТМФ*, **88**:2 (1991), 286–310.
- [60] M. V. Tokarchuk, T. Arimitsu, A. E. Kobryn, “Thermo field hydrodynamic and kinetic equations of dense quantum nuclear systems”, *Condens. Matter Phys.*, **1**:3(15) (1998), 605–642.
- [61] Д. Н. Зубарев, В. Н. Климов, “К теории температурного скачка на границе плазмы в магнитном поле”, *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, т. 1, Изд-во АН СССР, М., 1958, 138–160.
- [62] Д. Н. Зубарев, В. Н. Климов, “Стационарные режимы магнитного термоядерного реактора”, *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, т. 1, Изд-во АН СССР, М., 1958, 249–288.
- [63] А. В. Недоспасов, “Физика пристеночной плазмы в токамаках”, *УФН*, **152**:3 (1987), 479–492.
- [64] А. В. Недоспасов, М. З. Токарь, “Пристеночная плазма в токамаках”, *Вопросы теории плазмы*. Вып. 18, ред. Б. Б. Кадомцев, Энергоатомиздат, М., 1990, 68–208.
- [65] В. Н. Цытович, “Плазменно-пылевые кристаллы, капли и облака”, *УФН*, **167**:1 (1997), 57–99.
- [66] В. Н. Цытович, Д. Винтер, “Пыль в установках управляемого термоядерного синтеза”, *УФН*, **168**:8 (1998), 899–907.
- [67] В. Н. Цытович, “О перспективах экспериментальных и теоретических исследований самоорганизованных пылевых структур в комплексной плазме в условиях микрогравитации”, *УФН*, **185**:2 (2015), 161–179.
- [68] В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, В. И. Молотков, О. Ф. Петров, “Пылевая плазма”, *УФН*, **174**:5 (2004), 495–544.
- [69] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, И. П. Омелян, М. В. Токарчук, “О кинетических уравнениях для плотных газов и жидкостей”, *ТМФ*, **87**:1 (1991), 113–129.
- [70] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, И. П. Омелян, М. В. Токарчук, “Объединение кинетического и гидродинамического подходов в теории плотных газов и жидкостей”, *ТМФ*, **96**:3 (1993), 325–350.
- [71] M. V. Tokarchuk, I. P. Omelyan, A. E. Kobryn, “A consistent description of kinetics and hydrodynamics of systems of interacting particles by means of the nonequilibrium statistical operator method”, *Condens. Matter Phys.*, **1**:4(16) (1998), 687–751.
- [72] A. E. Kobryn, I. P. Omelyan, M. V. Tokarchuk, “The modified group expansions for construction of solutions to the BBGKY hierarchy”, *J. Statist. Phys.*, **92**:5–6 (1998), 973–994.
- [73] B. Markiv, I. Omelyan, M. Tokarchuk, “Consistent description of kinetics and hydrodynamics of weakly nonequilibrium processes in simple liquids”, *J. Statist. Phys.*, **155**:5 (2014), 843–866.
- [74] Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, “Формулировка граничных условий к цепочке Боголюбова с учетом локальных законов сохранения”, *ТМФ*, **60**:2 (1984), 270–279.
- [75] V. G. Morozov, A. E. Kobryn, M. V. Tokarchuk, “Modified kinetic theory with consideration for slow hydrodynamical processes”, *Condens. Matter Phys.*, 1994, № 4, 117–127.

- [76] P. A. Hlushak, M. V. Tokarchuk, “Chain of kinetic equations for the distribution functions of particles in simple liquid taking into account nonlinear hydrodynamic fluctuations”, *Phys. A*, **443** (2016), 231–245.
- [77] I. R. Yukhnovskii, P. A. Hlushak, M. V. Tokarchuk, “BBGKY chain of kinetic equations, non-equilibrium statistical operator method and collective variable method in the statistical theory of non-equilibrium liquids”, *Condens. Matter Phys.*, **19**:4 (2016), 43705, 18 pp.
- [78] Д. Н. Зубарев, “Статистическая термодинамика процессов турбулентного переноса”, *ТМФ*, **53**:1 (1982), 93–107.
- [79] B. B. Markiv, R. M. Tokarchuk, P. P. Kostrobij, M. V. Tokarchuk, “Nonequilibrium statistical operator method in Renyi statistics”, *Phys. A*, **390**:5 (2011), 785–791.
- [80] P. Kostrobij, R. Tokarchuk, M. Tokarchuk, B. Markiv, “Zubarev nonequilibrium statistical operator method in Renyi statistics. Reaction-diffusion processes”, *Condens. Matter Phys.*, **17**:3 (2014), 33005, 9 pp.
- [81] П. П. Костробий, А. В. Визнович, Б. Б. Маркив, М. В. Токарчук, “Обобщенные кинетические уравнения для плотных газов и жидкостей в методе неравновесного статистического оператора Зубарева и статистике Реньи”, *ТМФ*, **184**:1 (2015), 145–159.
- [82] A. Rényi, *Probability Theory*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [83] Ю. Л. Климонтович, *Введение в физику открытых систем*, Янус-К, М., 2002.
- [84] А. Г. Башкиров, “Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем”, *ТМФ*, **149**:2 (2006), 299–317.
- [85] R. Luzzi, A. R. Vasconcellos, J. G. Ramos, “Non-equilibrium statistical mechanics of complex systems: an overview”, *Riv. Nuovo Cimento*, **30**:3 (2007), 95–158.
- [86] A. R. Vasconcellos, J. G. Ramos, A. Gorenstein, M. U. Kleinke, T. G. Souza Cruz, R. Luzzi, “Statistical approach to non-Fickian diffusion”, *Internat. J. Modern Phys. B*, **20**:28 (2006), 4821–4841.
- [87] Р. Р. Нигматуллин, “Дробный интеграл и его физическая интерпретация”, *ТМФ*, **90**:3 (1992), 354–368.
- [88] C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics”, *J. Statist. Phys.*, **52**:1–2 (1988), 479–487.
- [89] C. Tsallis (ed.), *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World*, Springer, New York, 2009.
- [90] P. Turán (ed.), *Selected Papers by Alfréd Rényi*, v. 1, 2, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.
- [91] B. D. Sharma, D. P. Mittal, “New nonadditive measures of entropy for discrete probability distributions”, *J. Math. Sci.*, **10** (1975), 28–40.
- [92] E. Aktürk, G. B. Bağcı, R. Sever, *Is Sharma-Mittal entropy really a step beyond Tsallis and Rényi entropies?*, arXiv: cond-mat/0703277.
- [93] C. Beck, “Superstatistics: theory and applications”, *Contin. Mech. Thermodyn.*, **16**:3 (2004), 293–304.
- [94] C. Beck, “Superstatistics: theoretical concepts and physical applications”, *Anomalous Transport: Foundations and Applications*, eds. R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov, Wiley-VCH, New York, 2008, 433–457.
- [95] В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008.
- [96] D. Korošak, B. Cvikel, J. Kramer, R. Jecl, A. Prapotnik, “Fractional calculus applied to the analysis of spectral electrical conductivity of clay-water system”, *J. Contain. Hydrol.*, **92**:1–2 (2007), 1–9.
- [97] R. Metzler, J. Klafter, “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach”, *Phys. Rep.*, **339**:1 (2000), 1–77.
- [98] J. Bisquert, A. Compte, “Theory of the electrochemical impedance of anomalous diffusion”, *J. Electroanal. Chem.*, **499**:1 (2001), 112–120.

- [99] T. Kosztolowicz, K. D. Lewandowska, “Hyperbolic subdiffusive impedance”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:5 (2009), 055004, 14 pp.
- [100] J.-P. Bouchaud, A. Georges, “Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications”, *Phys. Rep.*, **195**:4–5 (1990), 127–293.
- [101] R. R. Nigmatullin, “To the theoretical explanation of the ‘Universal response’”, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **123**:2 (1984), 739–745.
- [102] R. R. Nigmatullin, “On the theory of relaxation for systems with ‘remnant’ memory”, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **124**:1 (1984), 389–339.
- [103] R. R. Nigmatullin, “The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry”, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **133**:1 (1986), 425–430.
- [104] А. А. Хамзин, Р. Р. Нигматуллин, И. И. Попов, “Микроскопическая модель недебаевской диэлектрической релаксации. Закон Коула–Коула и его обобщение”, *ТМФ*, **173**:2 (2012), 314–332.
- [105] R. Balescu, “Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks”, *Phys. Rev. E*, **51**:5 (1995), 4807–4822.
- [106] M. Tribeche, P. K. Shukla, “Charging of a dust particle in a plasma with a non extensive electron distribution function”, *Phys. Plasmas*, **18**:10 (2011), 103702.
- [107] V. E. Tarasov, “Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles”, *Phys. Plasmas*, **12**:8 (2005), 082106, 9 pp.
- [108] А. С. Монин, “Уравнения турбулентной диффузии”, *Докл. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.*, **105** (1955), 256.
- [109] G. M. Zaslavsky, “Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport”, *Phys. Rep.*, **371**:6 (2002), 461–580.
- [110] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [111] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, **198**, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [112] V. E. Tarasov, “Fractional generalization of Liouville equations”, *Chaos*, **14**:1 (2004), 123–127.
- [113] V. E. Tarasov, “Fractional Liouville and BBGKI equations”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **7**:7 (2005), 117–133.
- [114] V. E. Tarasov, “Fractional systems and fractional Bogoliubov hierarchy equations”, *Phys. Rev. E*, **71**:1 (2005), 011102, 12 pp.
- [115] V. E. Tarasov, “Fractional statistical mechanics”, *Chaos*, **16**:3 (2006), 033108, 7 pp.
- [116] V. E. Tarasov, “Transport equations from Liouville equations for fractional systems”, *Internat. J. Modern Phys. B*, **20**:3 (2006), 341–353.
- [117] K. Cottrill-Shepherd, M. Naber, “Fractional differential forms”, *J. Math. Phys.*, **42**:5 (2001), 2203–2212.
- [118] F. Mainardi, “Fractional calculus. Some basic problems in continuum and statistical mechanics”, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (Udine, September 23–27, 1996), CISM International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures, **378**, eds. A. Carpinteri, F. Mainardi, Springer, Vienna, 1997, 291–348.
- [119] M. Caputo, F. Mainardi, “A new dissipation model based on memory mechanism”, *Pure Appl. Geophys.*, **91**:1 (1971), 134–147.
- [120] P. Kostrobij, B. Markovych, O. Viznovych, M. Tokarchuk, “Generalized diffusion equation with fractional derivatives within Renyi statistics”, *J. Math. Phys.*, **57**:9 (2016), 093301, 8 pp.
- [121] A. Compte, R. Metzler, “The generalized Cattaneo equation for the description of anomalous transport processes”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:21 (1997), 7277–7289.

- [122] I. I. Grygorchak, F. O. Ivashchyshyn, M. V. Tokarchuk, N. T. Pokladok, O. V. Viznovych, "Modification of properties of $\text{GaSe}(\beta\text{-cyclodextrin}(\text{FeSO}_4))$ Clathrat by synthesis in superposed electric and light-wave fields", *J. Appl. Phys.*, **121**:18 (2017), 185501, 7 pp.
- [123] T. D. Lee, "The strongly interacting quark-gluon plasma and future physics", *Nucl. Phys. A*, **750**:1 (2005), 1–8.
- [124] M. Gyulassy, I. McLerran, "New forms of QCD matter discovered at RHIC", *Nucl. Phys. A*, **750**:1 (2005), 30–63.
- [125] E. V. Shuryak, "What RHIC experiments and theory tell us about properties of quark-gluon plasma?", *Nucl. Phys. A*, **750**:1 (2005), 64–83.
- [126] T. Hirano, N. Van Der Kolk, A. Bilandzic, "Hydrodynamics and flow", *The Physics of the Quark-Gluon Plasma. Introductory Lectures*, Lecture Notes in Physics, **785**, eds. S. Sarkar, H. Satz, B. Sinha, Springer, New York, 2010, 139–178.
- [127] T. S. Biró, E. Molnár, "Non-extensive statistics, relativistic kinetic theory and fluid dynamics", *Eur. Phys. J. A*, **48**:11 (2012), 172, 11 pp.
- [128] T. Osada, G. Wilk, "Nonextensive/dissipative correspondence in relativistic hydrodynamics", *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **174** (2008), 168–172.
- [129] T. Osada, G. Wilk, "Nonextensive hydrodynamics for relativistic heavy-ion collisions", *Phys. Rev. C*, **77**:4 (2008), 044903, 20 pp.
- [130] T. Osada, G. Wilk, "Nonextensive perfect hydrodynamics – a model of dissipative relativistic hydrodynamics?", *Cent. Eur. J. Phys.*, **7**:3 (2009), 432–443.
- [131] T. Osada, "Relativistic hydrodynamical model in the presence of long-range correlations", *Phys. Rev. C*, **81**:2 (2010), 024907, 8 pp.
- [132] A. Lavagno, "Relativistic nonextensive thermodynamics", *Phys. Lett. A*, **301**:1–2 (2002), 13–18.
- [133] G. Gianpiero, A. Lavagno, D. Pigato, "Nonextensive statistical effects in the quark-gluon plasma formation at relativistic heavy-ion collisions energies", *Open Phys.*, **10**:3 (2012), 594–601.
- [134] A. Lavagno, D. Pigato, "Nonextensive statistical effects and strangeness production in hot and dense nuclear matter", *J. Phys. G: Nucl. Part.*, **39**:12 (2012), 125106, 16 pp.
- [135] A. Lavagno, D. Pigato, "Nonextensive nuclear liquid-gas phase transition", *Phys. A*, **392**:20 (2013), 5164–5171.
- [136] X. Умедзава, X. Мацумото, М. Татики, *Термополевая динамика и конденсированные состояния*, Мир, М., 1985.
- [137] L. Leplae, H. Umezawa, F. Mancini, "Derivation and application of the boson method in superconductivity", *Phys. Rep.*, **10**:4 (1974), 151–272.
- [138] Y. Takahashi, H. Umezawa, "Thermo field dynamics", *Collect. Phenom.*, **2**:2 (1975), 55–80; reprinted in *Internat. J. Modern Phys. B*, **10**:13–14 (1996), 1755–1805.
- [139] T. Arimitsu, H. Umezawa, "A general formulation of nonequilibrium thermo field dynamics", *Progr. Theor. Phys.*, **74**:2 (1985), 429–432.
- [140] T. Arimitsu, H. Umezawa, "Non-equilibrium thermo field dynamics", *Progr. Theor. Phys.*, **77**:1 (1987), 32–52.
- [141] T. Arimitsu, "A canonical formalism of dissipative quantum systems. Non-equilibrium thermofield dynamics", *Condens. Matter Phys.*, **4** (1994), 26–88.

Поступила в редакцию 25.04.2017,
после доработки 19.05.2017