Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Кашаев, И. Г. Корепанов, С. М. Сергеев, Функциональное уравнение тетраэдров, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 3, 370–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:46:13

© 1998 г. Р. М. Кашаев*, И. Г. Корепанов†, С. М. Сергеев‡

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕТРАЭДРОВ

Предложен метод построения классических моделей в $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени, основанный на функциональном уравнении тетраэдров – уравнении, которое делает очевидными локальные симметрии модели. Построена всяма общая “блочно-матричная модель”, и найдены соответствующие алгебро-геометрические решения. Рассмотрены различные частные случаи. Для одного из них предложена замечательно простая схема квантования.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим пару электрических приборов, каждый из которых состоит из трех сопротивлений и имеет три внешних вывода. Конфигурации этих приборов изображаются соответственно треугольной и звездообразной диаграммами. Хорошо известно, что эти приборы электрически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения между сопротивлениями:

$$r_j r'_j = r'_1 r'_2 + r'_2 r'_3 + r'_3 r'_1 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

причем r_j – это сопротивления в “треугольнике”, а r'_j – сопротивления в “звезде”. Соотношения (1) позволяют выразить r'_j через r_j и наоборот. Мы будем представлять подобные приборы с помощью более простых диаграмм, чем обычные электрические схемы: сопротивления будут обозначаться линиями графа, внешние выводы – пустыми кружочками, а внутренние контакты – сплошными кружками. Таким способом преобразование (1) изображено на рис. 1.

Заметим, что формулы (1) допускают подстановку

$$r_j \leftrightarrow \frac{1}{r'_j}.$$

Это означает, что после простой замены переменных переход “треугольник – звезда” и переход “звезда – треугольник” могут быть заданы одним и тем же преобразованием. Точную формулировку этого факта мы дадим ниже в разделе 3.5.

*Петербургское Отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Петербург, Россия. E-mail: kashaev@pdmi.ras.ru

†Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия. E-mail: igor@prima.tu-chel.ac.ru

‡Институт ядерной физики, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: sergeev.ms@mx.ihep.su

Рис. 1

Рис. 2

Теперь рассмотрим диаграммы на рис. 2. Диаграмму “а” можно преобразовать в диаграмму “б” за четыре шага, причем каждый шаг будет преобразованием звезда – треугольник или треугольник – звезда для одного из трех сопротивлений. Важно, что это можно сделать *двумя способами*, которые показаны на рис. 3 (где не изображена очевидная перекраска кружков).

С помощью “электрических” соображений можно убедиться, что оба способа на рис. 3 приводят к одинаковому результату. Математически это означает, что преобразование (1) очень специфично: оно удовлетворяет (если его написать, как в разделе 3.5 ниже) *функциональному уравнению тетраэдров* (ФУТ).

В настоящей работе мы попытаемся показать, что ФУТ составляет основу $(2+1)$ -мерной интегрируемости. Мы покажем, как обобщить простую “электрическую” конструкцию соответствующих решений, чтобы получить не только большое количество новых интегрируемых классических систем, но также интегрируемые квантовые системы.

В разделе 1 мы рассмотрим наиболее общую абстрактную модель, в которой естественно возникает ФУТ. В разделе 2 мы предложим конкретную, но все еще достаточно общую реализацию абстрактной модели. Мы опишем также алгебро-геометрический метод построения решений этой модели. В разделе 3 мы предьявим список решений, от-

Рис. 3

вещающих простейшим “однопараметрическим редукциям” общей модели. В разделе 4 мы покажем, как описанная выше “электрическая модель” связана с хорошо известным билинейным уравнением Мивы. В разделе 5 мы опишем замечательную процедуру прямого квантования одной из наших “однопараметрических” моделей. В существенном эта процедура основана на том же ФУТ. Раздел 6 содержит обсуждение результатов.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ И ФУТ

Пусть имеется несколько прямолинейных струн, т.е. ориентированных прямых на плоскости (причем “положительное направление” указано для каждой прямой). Пусть: 1) среди этих струн нет совпадающих, 2) никакие три из них не пересекаются в одной точке и 3) ориентации этих струн *самосогласованы* в следующем смысле: отправляясь из любой точки и двигаясь все время по струнам в положительном направлении, никогда нельзя вернуться назад в исходную точку. Сопоставим каждой точке пересечения двух струн, скажем струн a и b , некоторый объект X_{ab} . Теперь позволим каждой струне перемещаться параллельно самой себе и проходить через точки пересечения других струн, но всегда таким образом, чтобы любые две параллельные струны никогда не менялись местами и чтобы никогда не возникали конфигурации с четырьмя струнами, пересекающимися в одной точке.

Предположим, что объект X_{ab} изменяется, только если некоторая струна c проходит через точку пересечения струн a и b . Точнее говоря, в этом случае *тройка* (X_{ab}, X_{ac}, X_{bc}) преобразуется в новую тройку $(X'_{ab}, X'_{ac}, X'_{bc})$ по некоторому фиксированному правилу. Когда мы рассматриваем подобное преобразование, мы считаем обе эти тройки упорядоченными следующим образом: перейти от X_{ab} к X_{ac} , а затем к X_{bc} можно по струнам в положительных направлениях, а от X'_{ab} к X'_{ac} , а затем к X'_{bc} — в отрицательных направлениях. Графически это можно представить как “выворачивание” треугольника, см. рис. 4. Мы скажем, что *оператор* R действует на тройки объектов:

$$R: (X_{ab}, X_{ac}, X_{bc}) \rightarrow (X'_{ab}, X'_{ac}, X'_{bc}). \quad (2)$$

Рис. 4

Заметим, что на рис. 4 точка пересечения струн a и b перемещается из левой части плоскостив правую часть (по отношению к ориентации c). Представим, что на рис. 4 сделана замена $c \leftrightarrow a$, $X_{\dots} \leftrightarrow X'_{\dots}$, *левая часть* $\leftrightarrow$ *правая часть*. Мы увидим, что если точка пересечения струн a и b уходит из правой части плоскостив левую, то R нужно заменить на $P_{13}R^{-1}P_{13}$, где P_{13} обозначает перестановку первого и третьего объектов тройки. Во всех других отношениях R одинаково для всех струнных троек, т.е. не зависит, например, от угла между струнами. В то же время мы не исключаем ситуации, когда R неоднозначно. В этом случае будем говорить, что тройка определена с точностью до “калибровочной эквивалентности”.

Рис. 5

Если в нашей модели имеется достаточно много непараллельных струн, то возможностей для их движения будет также довольно много. Естественно считать “интегрируемой” такую модель, в которой переход от одной струнной конфигурации к другой бу-

дет отвечать преобразованию объектов X_{ab} , не зависящему от деталей этого перехода, например от того, какая струна первой пройдет точку пересечения двух других, и т.д. Для этого достаточно потребовать, чтобы операция “выворачивания” треугольника изнутри (как на рис. 4) коммутировала с прохождением четвертой струны через весь треугольник. Другими словами, два способа преобразовать левую часть рис. 5 в его правую часть должны приводить к одинаковому результату (один из этих способов – начать с преобразования треугольника 356, а другой – треугольника 123). Это условие и дает ФУТ:

$$R_{123} \circ R_{145} \circ R_{246} \circ R_{356} = R_{356} \circ R_{246} \circ R_{145} \circ R_{123}. \quad (3)$$

Здесь, разумеется, R_{123} действует только на тройку

$$(X_1, X_2, X_3) \stackrel{\text{def}}{=} (X_{ab}, X_{ac}, X_{bc})$$

и т.д.

Диаграммное представление самого уравнения (3) дано на рис. 6.

Рис. 6

В заключение этого раздела заметим, что мы могли бы связать X -подобные объекты не с точками пересечения струн, а с отрезками, на которые струны делят друг друга, или же с участками плоскости, на которые она разделена этими струнами. Это привело бы нас к другим версиям ФУТ в полной аналогии с квантовым случаем [1, 2]. Естественно назвать уравнение (3) ФУТ *вертексного типа*. В этой работе мы будем иметь дело только с таким уравнением.

2. МОДЕЛЬ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ И ЕЕ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

2.1. Формулировка модели. Теперь пусть каждой струне соответствует конечномерное комплексное линейное пространство, например струне a – пространство V_a . Свяжем с набором струн *прямую сумму* их линейных пространств (а не тензорное произведение, как это делается в обычной теории уравнения Янга–Бакстера). Объекты

X_{ab} окажутся *линейными операторами* в $V_a \oplus V_b$. Зафиксировав раз и навсегда базы во всех V_a , мы отождествим эти операторы с блочными матрицами типа

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A действует в V_a , B – из V_b в V_a и т.д. “Штрихованные” операторы – результат операции R (см. (2)) – можно определить из уравнения

$$X_{ab}X_{ac}X_{bc} = X'_{bc}X'_{ac}X'_{ab}, \quad (4)$$

которое имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 & B_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_2 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 \\ 0 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A'_3 & B'_3 \\ 0 & C'_3 & D'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_2 & 0 & B'_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ C'_2 & 0 & D'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_1 & B'_1 & 0 \\ C'_1 & D'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

т.е. мы отождествляем каждый из операторов

$$X_{ab} = X_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X'_{bc} = X'_3 = \begin{pmatrix} A'_3 & B'_3 \\ C'_3 & D'_3 \end{pmatrix}$$

с прямой суммой его же и единичного оператора в “недостающем” пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если мы хотим рассматривать рис. 4 как иллюстрацию к формуле (4), нам придется учесть, что операторы в (4) действуют *против* стрелок на рис. 4. В отличие от этого направление стрелок на рис. 6 соответствует направлению действия (нелинейных) операторов R .

Если операторы в левой части уравнения (4) являются достаточно общими, уравнение можно разрешить относительно “штрихованных” операторов. Эти операторы определяются однозначно с точностью до следующего очевидного блочно-диагонального “калибровочного преобразования”:

$$\begin{pmatrix} A'_3 & B'_3 \\ C'_3 & D'_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A'_3 & B'_3 \\ C'_3 & D'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A'_2 & B'_2 \\ C'_2 & D'_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_2 & B'_2 \\ C'_2 & D'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A'_1 & B'_1 \\ C'_1 & D'_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_1 & B'_1 \\ C'_1 & D'_1 \end{pmatrix}.$$

Подробности можно найти в [3, ч. 2].

Что же касается ФУТ, то в нашей блочно-матричной модели оно следует из того факта, что произведение шести X -матриц, отвечающих правой части рис. 5, определяет однозначно и сами эти матрицы (конечно опять-таки с точностью до очевидного блочно-матричного калибровочного преобразования). Доказательство этого факта базируется на тривиальных алгебраических вычислениях, при этом начать надо с объединения на некоторое время струн s и d на рис. 5 в одну “толстую” струну, а затем воспользоваться несколько раз единственностью (по модулю калибровочного преобразования) факторизации произведения трех матриц.

2.2. Алгебро-геометрические решения. Рассмотрим некоторую (гладкую неприводимую) алгебраическую кривую Γ рода g . Сопоставим каждой струне a два эффективных дивизора (т.е. конечных набора точек Γ с *положительными* кратностями) $\mathcal{D}'_a$ и $\mathcal{D}''_a$ одинаковой степени, равной $\dim V_a$ (размерности линейного пространства, ассоциированного с a). Для двух непараллельных струн a и b мы потребуем, чтобы ни одна из точек не входила одновременно в оба дивизора $\mathcal{D}'_a$ и $\mathcal{D}''_b$ (так же как и в оба дивизора $\mathcal{D}''_a$ и $\mathcal{D}'_b$). Смысл этого требования прояснится ниже.

Далее, сопоставим дивизор $\mathcal{D}^A$ каждой точке A плоскости, где расположена струна, по следующим правилам. Для каждой струны a возьмем дивизор $\mathcal{D}'_a$, если точка A лежит слева от нее (в смысле ее ориентации), дивизор $\mathcal{D}''_a$, если A лежит справа от струны, и нулевой дивизор, если A лежит на a . Полученный дивизор обозначим $\mathcal{D}^A_a$. Далее, положим $\mathcal{D}^A = \sum_a \mathcal{D}^A_a$.

Рис. 7

Мы будем интересоваться только дивизорами, сопоставленными по этим правилам внутренним точкам струнных сегментов, ограниченных точками пересечения струн, или же самим точкам пересечения. Если же имеются всего две струны, то их половинам и точке их пересечения будут соответствовать дивизоры, показанные на рис. 7.

Теперь рассмотрим произвольный (общего положения) дивизор $\mathcal{D}$ степени

$$\deg \mathcal{D} = \sum_{\text{по всем } a} \dim V_a + g - 1.$$

Если данному сегменту l струны a соответствует дивизор $\mathcal{D}_l$, поставим также в соответствие этому сегменту линейное пространство мероморфных функций f на Γ , чей дивизор (f) (разность между дивизорами нулей и полюсов) подчиняется условию

$$(f) + \mathcal{D} - \mathcal{D}_l \geq 0$$

(это означает, что сингулярности f контролируются дивизором $\mathcal{D}$ и, более того, f имеет нули в точках дивизора $\mathcal{D}_l$). Легко увидеть, что пространство таких функций изоморфно V_a и, в частности, имеет ту же размерность, так что мы будем отождествлять эти два пространства, пользуясь произвольным изоморфизмом.

Нам понадобится также и явное описание изоморфизма такого рода. Пространство V_a , чей базис, как мы условились в начале п. 2.1, фиксирован, можно представить состоящим из векторов-столбцов (что иногда мы будем писать как транспонированный вектор-строку, используя символ T для матричного транспонирования) высоты $n_a = \dim V_a$. Всякий раз, когда V_a отождествляется с пространством мероморфных функций, мы будем пользоваться этим базисом $(f_1, \dots, f_{n_a})$ и ставить в соответствие вектору-столбцу $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_a})^T \in V_a$ функцию $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{n_a} f_{n_a}$. Таким образом, в различных сегментах струны a пространство V_a отождествлено с *разными* пространствами мероморфных функций посредством произвольных, но фиксированных изоморфизмов. Каждый раз, когда в результате движения струны предельные точки сегмента проходят друг через друга, изоморфизм для “вывернутого наизнанку сегмента” выбирается, конечно, заново.

Пусть струны a и b пересекаются в вершине A . Обозначим через $\mathcal{D}_A$ дивизор, отвечающий A в соответствии с описанными выше правилами. В вершину A входят два ребра (струнные сегменты, *предшествующие* A , сообразно выбранным положительным направлениям на струнах), и два ребра выходят из этой вершины. Нетрудно увидеть, что сумма линейных пространств мероморфных функций, отвечающая входящим ребрам, состоит из таких функций f , что

$$(f) + \mathcal{D} - \mathcal{D}_A \geq 0,$$

и является *прямой* (частный случай, изображенный на рис. 7, позволяет понять это — вспомним условие, по которому ни одна точка не может входить сразу и в $\mathcal{D}'_a$, и в $\mathcal{D}'_b$). Сказанное также справедливо и по отношению к выходящим ребрам, а следовательно, суммы “входящих” и “выходящих” пространств совпадают.

Оператор X_{ab} строится теперь следующим образом. Возьмем некоторый вектор $\Phi \in V_a \oplus V_b$ и представим его как сумму

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_b, \quad \Phi_a \in V_a, \quad \Phi_b \in V_b.$$

Отождествим векторы Φ_a и Φ_b с мероморфными функциями φ_a и φ_b , используя построенные выше изоморфизмы для *выходящих* ребер, так что вектор Φ отождествляется с функцией

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b.$$

Далее, разложим эту функцию в сумму

$$\varphi = \psi_a + \psi_b,$$

где ψ_a и ψ_b принадлежат пространствам, отвечающим *выходящим* ребрам. Отождествим ψ_a и ψ_b с векторами $\Psi_a \in V_a$ и $\Psi_b \in V_b$, соответственно, используя изоморфизмы для входящих ребер, и положим

$$\Psi = \Psi_a + \Psi_b.$$

Оператор X_{ab} определяется требованием, что

$$X_{ab}\Phi = \Psi$$

для каждого вектора Φ (вспомним еще раз, что X_{ab} действует “против стрелок”).

Уравнение (4) для X -операторов, построенных таким способом, следует из того, что обе части равенства (4) действуют на каждый “выходящий” вектор Φ , где сейчас $\Phi \in V_a \oplus V_b \oplus V_c$, по правилу: Φ отождествляется с мероморфной функцией φ с помощью изоморфизмов, отвечающих трем выходящим ребрам; тогда φ отождествляется с некоторым вектором $\Psi \in V_a \oplus V_b \oplus V_c$ с помощью трех “входящих” изоморфизмов. Таким образом, обе части рассматриваемого равенства преобразуют Φ в Ψ , хотя и делают это различными способами.

Приведем явные формулы, определяющие X_{ab} . Напомним, что изоморфизмы между пространствами V_a векторов-столбцов и пространствами мероморфных функций строятся с помощью конкретных базисов в последних. Пусть $(f_1, \dots, f_{n_a})$ и $(g_1, \dots, g_{n_b})$ — это базисы в пространствах *входящих* ребер для каких-то X_{ab} , а $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n_a})$ и $(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{n_b})$ — это базисы, отвечающие *выходящим* ребрам. Нетрудно проверить, что X_{ab} определен формулой

$$(f_1(z), \dots, f_{n_a}(z), g_1(z), \dots, g_{n_b}(z))X_{ab} = (\tilde{f}_1(z), \dots, \tilde{f}_{n_a}(z), \tilde{g}_1(z), \dots, \tilde{g}_{n_b}(z)),$$

которая должна выполняться для всех $z \in \Gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наша модель, описывая конечное число струн, движущихся в плоскости, имеет очевидный “глобальный” интеграл движения (или, скорее, всех допустимых движений) — произведение *всех* X -операторов (дополненных единицами в “недостающих” пространствах), взятое в порядке движения по струнам в положительных направлениях. Если, однако, мы хотим сохранить возможность предельного перехода к бесконечному числу струн, нам придется предпочесть более “локальные” конструкции. Например, пользуясь предложенным методом построения алгебро-геометрических решений, можно включить в рассмотрение новую струну (обозначим ее h) так, чтобы она не пересекала некоторую избранную область Ω плоскости, добавляя в то же время к дивизору $\mathcal{D}$ один из дивизоров $\mathcal{D}'_h$ или $\mathcal{D}''_h$ в зависимости от того, где находится Ω — слева или справа от h . В результате X -матрицы не изменятся (как и дивизоры, отвечающие струнным сегментам) в Ω . Читатель может найти некоторые формулы, относящиеся к бесконечным решеткам кагоме, в работе [3, гл. 3].

3. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ФУТ

Простейшим случаем “уравнения рефакторизации” (5) является случай, когда блоками в матрицах служат просто числа. Такие числа мы будем обозначать строчными буквами, т.е. пусть

$$\begin{aligned} X_{12} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & X'_{12} &= \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 & 0 \\ c'_1 & d'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ X_{13} &= \begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}, & X'_{13} &= \begin{pmatrix} a'_2 & 0 & b'_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ c'_2 & 0 & d'_2 \end{pmatrix}, \\ X_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, & X'_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_3 & b'_3 \\ 0 & c'_3 & d'_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Будем искать решения уравнения

$$X_{12}X_{13}X_{23} = X'_{23}X'_{13}X'_{12}. \quad (6)$$

Нетривиальные *однопараметрические* решения (6) были классифицированы в [4]. Слово “однопараметрические” означает, что a_k, b_k, c_k и d_k , точно так же как и a'_k, b'_k, c'_k и d'_k , — это алгебраические функции *одного* комплексного параметра x , так что

$$\begin{aligned} a_k &= a(x_k), & b_k &= b(x_k), & c_k &= c(x_k), & d_k &= d(x_k), \\ a'_k &= a(x'_k), & b'_k &= b(x'_k), & c'_k &= c(x'_k), & d'_k &= d(x'_k), \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

а оператор R можно рассматривать как преобразование

$$R: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3).$$

Оказывается, что для матрицы

$$X(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$$

существуют шесть существенно различных нетривиальных возможностей.

3.1. Случай а. Предположим, что

$$X(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

k — константа; тогда

$$R: x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1, kx_2 + x_1x_3, x_3.$$

Обратное отображение:

$$R^{-1}: x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1, \frac{x_2 - x_1x_3}{k}, x_3.$$

3.2. Случай б. Пусть

$$X(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ k/x & 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$R: x_1, x_2, x_3 \rightarrow \frac{kx_2 + x_1x_3}{x_3}, x_1x_3, \frac{kx_2x_3}{kx_2 + x_1x_3}.$$

Обратное отображение:

$$R^{-1}: x_1, x_2, x_3 \rightarrow \frac{x_1x_2}{x_2 + x_1x_3}, \frac{x_1x_3}{k}, \frac{x_2 + x_1x_3}{x_1}.$$

3.3. Случай в. Пусть

$$X(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1-x & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$R: x_1, x_2, x_3 \rightarrow \frac{x_3 - x_2 + x_1 x_2}{x_3}, \frac{x_1 x_2 x_3}{x_3 - x_2 + x_1 x_2}, x_3.$$

Обратное преобразование:

$$R^{-1}: x_1, x_2, x_3 \rightarrow \frac{x_1 x_2}{x_3 - x_1 x_3 + x_1 x_2}, x_3 - x_1 x_3 + x_1 x_2, x_3.$$

3.4. Случай г. Пусть

$$X(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1-x & 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$R: x_1, x_2, x_3 \rightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_3 - x_1 x_3}, x_1 + x_3 - x_1 x_3, \frac{(1-x_1)x_2 x_3}{x_1 + x_3 - x_1 x_2 - x_1 x_3},$$

здесь $R^2 = 1$. Это преобразование связано с “уравнением пентагона” и было описано в [5].

3.5. Случай д. Пусть

$$X(x) = \begin{pmatrix} x & 1+ix \\ 1-ix & x \end{pmatrix},$$

тогда

$$R: x_1, x_2, x_3 \rightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_3 + x_1 x_2 x_3}, x_1 + x_3 + x_1 x_2 x_3, \frac{x_2 x_3}{x_1 + x_3 + x_1 x_2 x_3}, \quad (7)$$

здесь опять $R^2 = 1$. Это преобразование электрической сети, рассмотренное в [6]. Переменные x_j и x'_j связаны с сопротивлениями r_j и r'_j (см. введение) следующим образом:

$$x_1 = \frac{1}{r_1}, \quad x_2 = r_2, \quad x_3 = \frac{1}{r_3}, \quad x'_1 = r'_1, \quad x'_2 = \frac{1}{r'_2}, \quad x'_3 = r'_3.$$

Нетрудно убедиться, что совпадение результатов двух последовательностей преобразований на рис. 3 в точности эквивалентно ФУТ для величин x , если заменить все сопротивления, связанные с ребрами графа рис. 3 на $x_j^{\pm 1}$ (где нужно, конечно, правильно распорядиться знаками).

Заметим, что в [6] это преобразование трактовалось в терминах “свободного бозонного уравнения Янга–Бакстера”, а наш вариант отвечает фермионному случаю (см. [3, 4]).

3.6. Случай е. Пусть

$$X(x) = \begin{pmatrix} x & -s(x) \\ s(x) & x \end{pmatrix},$$

где $s(x)^2 = 1 - x^2$. Этот случай эквивалентен онзагеровскому преобразованию “звезда – треугольник”. Можно также интерпретировать его в терминах эйлеровского разложения элемента группы $SO(3)$ на произведение двумерных вращений. Для этого нужно положить $x = \cos \phi$, $s(x) = \sin \phi$. Этот случай был также рассмотрен в [6].

Для R это дает

$$R: x_1, x_2, x_3 \rightarrow \frac{x_1 x_2}{F(x_1, x_2, x_3)}, F(x_1, x_2, x_3), \frac{x_2 x_3}{F(x_1, x_2, x_3)},$$

где F находится из соотношения

$$s(F) = s(x_2)x_1x_3 - s(x_1)s(x_3).$$

Обратное преобразование таково:

$$R^{-1} = IRI,$$

где I переводит пару $(x, s(x))$ в $(x, -s(x))$.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ И МОДЕЛЬ МИВЫ

В работе [6] было показано, что описанная во введении и в п. 3.5 “электрическая” модель связана с хорошо известной интегрируемой моделью Мивы [7]. Обсудим эту связь в контексте настоящей работы.

Рассмотрим плоскости кубической решетки в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3 \ni (x, y, z)$. Запишем уравнения этих плоскостей в виде $x = l$, $y = m$ и $z = n$, где l, m, n принимают все целые значения. Рассмотрим также “движущуюся” плоскость, описываемую уравнением

$$x + y + z = t, \tag{8}$$

где t можно считать “временем”. При произвольном t пересечение кубической решетки с плоскостью (8) порождает в ней регулярную (бесконечную) решетку кагоме. Выберем для каждой линии, образующей эту решетку, положительное направление таким образом, что параллельные линии будут иметь одинаковую ориентацию, а ориентация в целом будет самосогласованной в смысле раздела 1.

Теперь сопоставим каждой вершине решетки кагоме переменную x_k . Потребуем, чтобы струны двигались со временем t согласно уравнению (8), а переменные x_k менялись в соответствии с (7) всякий раз, когда вершина проходит через струну. Таким способом мы получим модель прямолинейных струн типа описанной в разделе 1.

Теперь введем единичные векторы f_1, f_2, f_3 , направленные соответственно по осям x, y, z пространства $\mathbf{R}^3$. Заметим, что каждая вершина решетки кагоме между двумя своими столкновениями со струнами прочерчивает в точности ребро целой кубической решетки в $\mathbf{R}^3$. Таким образом, можно соотнести величины x_k с ребрами кубической

решетки. Для удобства, а также чтобы связать наше изложение с работой [6], мы будем считать, что x_k сопоставлены также *вершинам* кубической решетки по следующему правилу: пусть известен радиус-вектор некоторой вершины n , тогда обозначим через $x_1(n)$ величину x_1 , отвечающую ребру, которое соединяет вершины с радиус-векторами n и $n - f_1$, через $x_2(n)$ – величину x_2 , отвечающую ребру, которое соединяет вершины $n + f_2$ и n , и через $x_3(n)$ – величину x_3 , отвечающую ребру, которое соединяет вершины n и $n - f_3$.

Сопоставим знаки $\epsilon(n) = \pm 1$ вершинам кубической решетки в шахматном порядке. Теперь введем (опять с целью установить связь с работой [6]) векторы e_1, e_2, e_3 :

$$e_1 = \frac{f_3 - f_2 - f_1}{2}, \quad e_2 = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{2}, \quad e_3 = \frac{f_1 - f_2 - f_3}{2}. \quad (9)$$

Наконец, зададим некоторые ненулевые постоянные α_1, α_2 и α_3 и сделаем подстановку

$$x_j(n) = \epsilon(n) \alpha_j \frac{\tau(n + e_1 + e_2 + e_3) \tau(n - e_j)}{\tau(n + e_k) \tau(n + e_l)}, \quad \{j, k, l\} = \{1, 2, 3\},$$

где τ – это новая неизвестная функция, определенная, как это следует из (9), на *центрах кубов* решетки.

Как показано в [6], функция τ удовлетворяет *уравнению Мивы*

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_j \tau(n + e_j) \tau(n - e_j) = 0, \quad e_4 = -e_1 - e_2 - e_3, \quad \alpha_4 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

Заметим, что переменные $a_j(n)$ в [6] связаны с нашими переменными $x_j(n)$ соотношениями

$$a_j(n) = \epsilon(n) x_j(n)^{-1}.$$

5. КВАНТОВАНИЕ МОДЕЛИ “б”

Модель, отвечающая случаю “б” (раздел 3.2), допускает удивительно простое и непосредственное квантование. В соответствии с разделом 3.2 преобразование $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3)$ возникает из соотношения

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ k/x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ k/x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & k/x_3 & 0 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x'_3 \\ 0 & k/x'_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x'_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ k/x'_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x'_1 & 0 \\ k/x'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы проквантовать эту модель, возьмем то же соотношение (10), но с x_1, x_2 и x_3 , принадлежащими некоторой ассоциативной алгебре и удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$x_1 x_2 = \omega^{-1} x_2 x_1, \quad x_1 x_3 = \omega x_3 x_1, \quad x_2 x_3 = \omega^{-1} x_3 x_2, \quad (11)$$

Рис. 8

где ω — это скаляр (а k также остается скаляром). Можно проверить, что в этом случае (10) определяет “штрихованные” переменные непротиворечиво, а именно

$$x'_1 = x_1 + kx_2x_3^{-1}, \quad x'_2 = x_1x_3, \quad x'_3 = k(x_1 + kx_2x_3^{-1})^{-1}x_2. \quad (12)$$

Справедливы следующие соотношения:

$$x'_1x'_2 = \omega x'_2x'_1, \quad x'_1x'_3 = \omega^{-1}x'_3x'_1, \quad x'_2x'_3 = \omega x'_3x'_2. \quad (13)$$

Рассмотрим модель прямолинейной струны, описанную в разделе 1, и зададим перестановочные соотношения для x_k во *всех* вершинах. Потребуем следующее:

- если две переменные x_k не лежат на одной и той же струне, то они коммутируют;
- если вершины с двумя переменными x_k расположены на треугольнике вида рис. 8а или 8б, то выполняются перестановочные соотношения (11) (мы временно заменяем настоящие номера k на 1, 2 и 3). Заметим, что между вершинами 1, 2 и 3 могут иметься другие струны, не изображенные на рис. 8;
- если вершины, в которых имеются две переменные x_k , возникают как точки пересечения струны с двумя параллельными струнами, то перестановочные соотношения между ними можно получить, если устремить одну из вершин на рис. 8 к бесконечности (здесь рисунки 8а и 8б приводят к одинаковым результатам, однако ориентация струн существенна).

Можно проверить, что построенные перестановочные соотношения не меняются под действием преобразований рис. 4.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

В этой работе мы рассмотрели прежде всего классические интегрируемые динамические системы в $(2 + 1)$ -мерном дискретном пространстве-времени. Мы предложили весьма общую схему построения таких систем, а также их решений. Мы показали, что наша схема включает в качестве частного случая билинейное уравнение Мивы.

В этой общей схеме интегрируемость обеспечивается наличием богатого набора симметрий, которые в локальной форме выражаются ФУТ. Из формы ФУТ очевидно, что соответствующую модель не обязательно связывать с регулярной (например, с кубической) решеткой. Ее можно естественно определить, например, на любой конфигурации пересекающихся плоскостей (“струнных мировых листов” раздела 1) в трехмерном пространстве. Алгебро-геометрическое решение для таких систем дается в терминах алгебраической кривой и некоторых постоянных дивизоров, связанных с плоскостями. В некотором смысле уравнения движения, записанные в терминах этих дивизоров, “исчезают”, что напоминает теорию твисторов Пенроуза, где полевые уравнения также “исчезают”.

Мы показали также, что по крайней мере в одном частном случае ФУТ успешно заменяет обычное (квантовое) уравнение тетраэдров, позволяя построить квантовую интегрируемую модель.

Наконец, заметим, что обобщение нашей схемы построения моделей и их алгебро-геометрических решений на размерность $3 + 1$ было дано в работе [8].

Один из авторов (И.Г.К.) благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (проект № 98-01-00895).

Список литературы

- [1] *B. B. Buzanov, Yu. G. Stroganov.* ТМФ. 1982. Т. 52. С. 105–113; *M. T. Jaekel and J.-M. Maillard.* J. Phys. A. 1982. V. 15. P. 1309–1325.
- [2] *J. Hietarinta.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 5727–5748; Labeling schemes for tetrahedron equations and dualities between them, hep-th/9402139.
- [3] *I. G. Korepanov.* Algebraic integrable dynamical systems, $(2 + 1)$ -dimensional models in wholly discrete space-time, and inhomogeneous models in 2-dimensional statistical physics. solv-int/9506003, 1995.
- [4] *S. M. Sergeev.* Solutions of the functional tetrahedron equation connected with the local Yang–Baxter equation for the ferro-electric. solv-int/9709006.
- [5] *R. M. Kashaev and S. M. Sergeev.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 195. P. 309–319; On pentagon, ten-term, and tetrahedron relations. q-alg/9607032.
- [6] *R. M. Kashaev.* Lett. Math. Phys. 1996. V. 35. P. 389–397; On discrete 3-dimensional equations associated with the local Yang–Baxter relation, solv-int/9512005.
- [7] *T. Miwa.* Proc. Japan Acad. 1982. V. 58. Ser. A. P. 9–12.
- [8] *I. G. Korepanov.* Integrability in $3 + 1$ dimensions: relaxing a tetrahedron relation. solv-int/9712006.

Поступила в редакцию 28.II.1998 г.