Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Насибов, Об отсутствии глобальных решений смешанной задачи для нелинейного эволюционного уравнения типа Шредингера, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 2, 190–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:44:04

© 2018 г.

Ш. М. Насибов*

ОБ ОТСУТСТВИИ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА

Исследуется вопрос об отсутствии глобальных решений первой смешанной задачи для одного нелинейного эволюционного уравнения типа Шредингера. Доказано, что при “достаточно больших” значениях начальных данных отсутствуют глобальные решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, нелинейное эволюционное уравнение Шредингера, глобальное решение, отсутствие глобального решения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9390>

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная ограниченная область с гладкой границей. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_t = i\beta\Delta u + f(u, \nabla u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

в которой

$$f(u, \nabla u) \geq \omega_1|u|^{1+\gamma} + \omega_2|\nabla u|^{1+\mu}, \quad (3)$$

где $\omega_1 \geq 0$, $\omega_2 \geq 0$, $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$, $\beta \neq 0$.

Уравнение (1) встречается в различных разделах прикладной физики, в нелинейной квантовой механике, в теории распространения световых волн в нелинейных средах (см., например, работы [1]–[3]). При $f(u) = i\gamma|u|^p u + i\mu u$, $\gamma\beta > 0$, $pn \geq 4$, вопрос о разрушении решений задачи (1), (2) рассматривался в случае $\mu = 0$ в статье [4], в случае $\mu > 0$ – в статье [5], а решения задачи Коши для уравнения (1) при $\mu = 0$ исследовались в работах [4], [6]–[10] и др. Для уравнений, близких к урав-

*Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Баку, Азербайджан. E-mail: nasibov_sharif@hotmail.com

нению (1), вопросы разрушения решений первой смешанной задачи исследованы в статьях [11], [12].

Таким образом, изучение вопроса об отсутствии глобальных решений задачи (1)–(3) является актуальной проблемой.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть λ_1 – первое собственное значение, $\vartheta_1(x)$ – соответствующая первая собственная функция задачи

$$\Delta \vartheta + \lambda \vartheta = 0, \quad x \in \Omega, \quad \vartheta(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Известно, что $\lambda_1 > 0$, $\vartheta_1(x) > 0$ при всех $x \in \Omega$ (см., например, книгу [13]). Не умаляя общности, будем считать, что

$$\int_{\Omega} \vartheta_1(x) dx = 1. \quad (5)$$

Примем следующие обозначения:

$$\omega = \omega_1 + \omega_0 \omega_2, \quad (6)$$

здесь $\omega_0 = [k_0^{-1}(\int_{\Omega} \vartheta_1^{-1/\mu}(x) dx)^{-\mu/(1+\mu)} \|\vartheta_1\|_n^{-1}]^{1+\mu}$, где $k_0 = (1/\sigma_n)^{1/n}/n$, $\sigma_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$. Здесь и далее $\|\cdot\|_p$ – норма в $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$.

Далее

$$\rho = \begin{cases} \gamma & \text{при } \omega_2 = 0, \\ \mu & \text{при } \omega_1 = 0, \\ \gamma = \mu & \text{при } \omega_1 \neq 0, \quad \omega_2 \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ_1 – первое собственное значение, $\vartheta_1(x)$ – соответствующая первая собственная функция задачи (4), $\vartheta_1(x)$ удовлетворяет условию нормировки (5). Далее, пусть начальная функция $u_0(x)$ такова, что

$$y_0 = \int_{\Omega} \vartheta_1(x) \operatorname{Re} u_0(x) dx$$

удовлетворяет условию

$$y_0 > \left(\frac{\lambda_1 |\beta|}{\omega \rho} \right)^{1/\rho}. \quad (8)$$

Тогда максимальное время существования гладких решений задачи (1)–(3) оценивается следующим неравенством:

$$t_{\max} < \frac{1}{\lambda_1 |\beta|} \arcsin \left(\frac{\lambda_1 |\beta|}{\omega \rho y_0^{\rho}} \right).$$

Здесь ω определено формулой (6), ρ – формулой (7).

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ_1 – первое собственное значение, $\vartheta_1(x)$ – соответствующая первая собственная функция задачи (4), $\vartheta_1(x)$ удовлетворяет условию нормировки (5). Далее, пусть начальная функция $u_0(x)$ такова, что

$$y_0 = \operatorname{sgn} \beta \int_{\Omega} \vartheta_1(x) \operatorname{Im} u_0(x) dx$$

удовлетворяет условию

$$y_0 > \left(\frac{\lambda_1 |\beta|}{2\omega\rho} \right)^{1/\rho}. \quad (9)$$

Тогда максимальное время существования гладких решений задачи (1)–(3) оценивается неравенством

$$t_{\max} < \frac{1}{\lambda_1 |\beta|} \arccos \left(1 - \frac{\lambda_1 |\beta|}{\omega\rho y_0^\rho} \right).$$

Здесь ω определено выражением (6), ρ – выражением (7).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы 1 будем проводить от противного, т.е. будем предполагать, что выполнено условие (8), но задача (1)–(3) имеет глобальное решение. Введем на отрезке $[0, T]$, где $T = \pi/(2\lambda_1 |\beta|)$, функцию

$$y_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [e^{\lambda_1 z t} u(t, x) + e^{\lambda_1 \bar{z} t} \bar{u}(t, x)] \vartheta_1(x) dx,$$

где $z = i\beta$, $\bar{z} = -i\beta$, $\bar{u}(x, t)$ – функция, комплексно-сопряженная к функции $u(x, t)$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x, t)$ – гладкое решение задачи (1)–(3), λ_1 – первое собственное значение, $\vartheta_1(x)$ – соответствующая первая собственная функция задачи (4). Тогда для любого $t \in [0, T]$ справедливо соотношение

$$\frac{dy_1}{dt} = \cos(\lambda_1 \beta t) I(t), \quad (10)$$

где $I(t) = \int_{\Omega} f(u(x, t), \nabla u(x, t)) \vartheta_1(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\frac{dy_1}{dt} = R_1(t) + R_2(t), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\lambda_1 z e^{\lambda_1 z t} u(x, t) + \lambda_1 \bar{z} e^{\lambda_1 \bar{z} t} \bar{u}(x, t)] \vartheta_1(x) dx, \\ R_2(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [e^{\lambda_1 z t} u_t(x, t) + e^{\lambda_1 \bar{z} t} \bar{u}_t(x, t)] \vartheta_1(x) dx. \end{aligned}$$

Учитывая уравнение (1), преобразуем $R_2(t)$:

$$\begin{aligned} R_2(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [e^{\lambda_1 z t} (z \nabla u + f(u, \nabla u)) + e^{\lambda_1 \bar{z} t} (\bar{z} \Delta \bar{u} + f(u, \nabla u))] \vartheta_1(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[z e^{\lambda_1 z t} \int_{\Omega} \Delta u \vartheta_1 dx + \bar{z} e^{\lambda_1 \bar{z} t} \int_{\Omega} \Delta \bar{u} \vartheta_1 dx + \int_{\Omega} (e^{\lambda_1 z t} + e^{\lambda_1 \bar{z} t}) f(u, \nabla u) \vartheta_1(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Согласно второй формуле Грина в силу граничных условий на $u(x, t)$ и $\vartheta_1(x)$ имеем соотношение

$$\int_{\Omega} \Delta u \vartheta_1 dx = \int_{\Omega} u \Delta \vartheta_1 dx = -\lambda_1 \int_{\Omega} u \vartheta_1 dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_2(t) &= \frac{1}{2} \left(-\lambda_1 z e^{\lambda_1 z t} \int_{\Omega} u \vartheta dx - \lambda_1 \bar{z} e^{\lambda_1 \bar{z} t} \int_{\Omega} \bar{u} \vartheta dx \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (e^{\lambda_1 z t} + e^{\lambda_1 \bar{z} t}) f(u, \nabla u) \vartheta_1 dx = \\ &= -R_1(t) + \int_{\Omega} \frac{1}{2} (e^{i\lambda_1 \beta t} + e^{-i\lambda_1 \beta t}) f(u, \nabla u) \vartheta_1 dx. \end{aligned}$$

Тогда равенство (11) принимает вид

$$\frac{dy_1}{dt} = \cos(\lambda_1 \beta t) \int_{\Omega} f(u, \nabla u) \vartheta_1 dx,$$

что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Из соотношения (10) для любого $t \in [0, T]$ следует равенство

$$\frac{dy}{dt} = \cos(\lambda_1 |\beta| t) I(t), \quad (12)$$

где $y(t) = y_1(t)$.

Имеем $\cos(\lambda_1 |\beta| t) \geq 0$ для любого $t \in [0, T]$, $I(t) > 0$, следовательно, $dy/dt \geq 0$, поэтому $y(t)$ является возрастающей функцией и в силу условия (8) на y_0 решение $y(t)$ – положительная функция. Для $y(t)$ справедлива оценка

$$y(t) = |y(t)| \leq \int_{\Omega} |u(x, t)| \vartheta_1(x) dx. \quad (13)$$

Оценим $\int_{\Omega} |u(x, t)| \vartheta_1(x) dx$ с помощью равенств

$$I_{\gamma}(t) = \int_{\Omega} |u(x, t)|^{1+\gamma} \vartheta_1(x) dx \quad \text{и} \quad I_{\mu}(t) = \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{1+\mu} \vartheta_1(x) dx.$$

Покажем, что

$$I_{\gamma}(t) \geq \left(\int_{\Omega} |u(x, t)| \vartheta_1(x) dx \right)^{1+\gamma}, \quad (14)$$

$$I_{\mu}(t) \geq \omega_0 \left(\int_{\Omega} |u(x, t)| \vartheta_1(x) dx \right)^{1+\mu}, \quad (15)$$

где ω_0 определено в формуле (6).

Применяя неравенство Гёльдера для интегралов, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x, t)| \vartheta_1(x) dx &= \int_{\Omega} |u| \vartheta_1^{1/(1+\gamma)} \vartheta_1^{\gamma/(1+\gamma)} dx \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^{1+\gamma} \vartheta_1 dx \right)^{1/(1+\gamma)} \left(\int_{\Omega} \vartheta_1 dx \right)^{\gamma/(1+\gamma)} = \left(\int_{\Omega} |u|^{1+\gamma} \vartheta_1 dx \right)^{1/(1+\gamma)} \end{aligned}$$

в силу условия (5), откуда следует оценка (14). Далее по неравенству Гёльдера в силу неравенства Соболева [14] имеем

$$\left(\int_{\Omega} |u| |\vartheta_1| dx \right) \leq \|u\|_{n/(n-1)} \|\vartheta_1\|_n \leq k_0 \int_{\Omega} |\nabla u| dx \|\vartheta_1\|_n. \quad (16)$$

Далее, согласно неравенству Гёльдера для интегралов

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u| dx &= \int_{\Omega} |\nabla u| \vartheta_1^{1/(1+\mu)} \vartheta_1^{-1/(1+\mu)} dx \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{1+\mu} \vartheta_1 dx \right)^{1/(1+\mu)} \left(\int_{\Omega} \vartheta_1^{-1/\mu} dx \right)^{\mu/(1+\mu)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из неравенств (16) и (17) следует, что справедливо следующее неравенство:

$$\left(\int_{\Omega} |u| \vartheta_1 dx \right) \leq k_0 \|\vartheta_1\|_n \left(\int_{\Omega} \vartheta_1^{-1/\mu} dx \right)^{\mu/(1+\mu)} I_{\mu}^{1/(1+\mu)}(t),$$

из которого вытекает формула (15). В силу неравенств (14) и (15) заключаем, что справедливо неравенство

$$I(t) \geq \omega_1 I_{\gamma}(t) + \omega_2 I_{\mu}(t) \geq \omega_1 \left(\int_{\Omega} |u| \vartheta_1 dx \right)^{1+\gamma} + \omega_0 \omega_2 \left(\int_{\Omega} |u| \vartheta_1 dx \right)^{1+\mu},$$

откуда получаем, что

$$I(t) \geq \omega \left(\int_{\Omega} |u| \vartheta_1 dx \right)^{1+\rho}, \quad (18)$$

где ω определено в формуле (6), а ρ – в формуле (7). Далее, из выражений (12), (13) и (18) следует, что на отрезке $[0, T]$ справедливо нелинейное дифференциальное неравенство

$$\frac{dy}{dt} \geq \omega \cos(\lambda_1 |\beta| t) y^{1+\rho}. \quad (19)$$

Разделяя переменные, интегрируя (19), получаем соотношение

$$y^{\rho}(t) \geq \frac{y_0^{\rho}}{R(t)}, \quad (20)$$

где $R(t) = 1 - \theta \sin(\lambda_1 |\beta| t)$, $\theta = \omega \rho y_0^{\rho} / (\lambda_1 |\beta|)$. Функция $R(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$, и при $t = 0$ $R(0) = 1$, а при $t = T$ принимает значение $R(t) < 0$. Следовательно, $R(t)$ на отрезке $[0, T]$ в точке

$$t_k = \frac{1}{\lambda_1 |\beta|} \arcsin \left(\frac{\lambda_1 |\beta|}{\omega \rho y_0^{\rho}} \right)$$

обращается в нуль. На промежутке $[0, t_k)$ из неравенства (20) вытекает, что

$$y(t) \geq \frac{y_0}{R^{1/\rho}(t)}. \quad (21)$$

Из выражения (13) по неравенству Коши–Буняковского имеем

$$y(t) \leq \|u(t)\| \|\vartheta_1\|. \quad (22)$$

Из формул (21), (22) в силу неравенства Стеклова $\|u(t)\| \leq \|\nabla u(t)\|/\sqrt{\lambda_1}$ на $[0, t_k)$ имеет место оценка

$$\frac{y_0}{R^{1/\rho}(t)} \leq \frac{\|\vartheta_1\|}{\sqrt{\lambda_1}} \|\nabla u(t)\|. \quad (23)$$

Из оценки (23) при $t \rightarrow t_k^-$ получаем, что $\|\nabla u(t)\| \rightarrow \infty$, стало быть при выполнении условия (8) задача (1)–(3) не имеет глобального решения.

Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

На отрезке $[0, T]$, где $T = \pi/\lambda_1|\beta|$, введем функцию

$$y_2(t) = -\frac{i}{2} \int_{\Omega} [e^{\lambda_1 z t} u(x, t) - e^{\lambda_1 \bar{z} t} \bar{u}(x, t)] \vartheta_1(x) dx.$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $u(x, t)$ – гладкое решение задачи (1)–(3), λ_1 – первое собственное значение, $\vartheta_1(x)$ – соответствующая первая собственная функция задачи (4). Тогда для любого $t \in [0, T]$ справедливо соотношение

$$\frac{dy_2}{dt} = \sin(\lambda_1 \beta t) I(t), \quad (24)$$

$$\text{где } I(t) = \int_{\Omega} f(u(x, t), \nabla u(x, t)) \vartheta_1(x) dx.$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Перепишем уравнение (24) в следующем виде:

$$\frac{dy}{dt} = \sin(\lambda_1 |\beta| t) I(t), \quad (25)$$

где $y(t) = \operatorname{sgn} \beta y_2(t)$.

На отрезке $[0, T]$ $\sin(\lambda_1 |\beta| t) \geq 0$, стало быть $dy/dt \geq 0$, так как $I(t) > 0$. Следовательно, $y(t) \geq y_0$, и в силу условия (9) на y_0 решение $y(t)$ на отрезке $[0, T]$ является положительной функцией. С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям в доказательстве теоремы 1, из равенства (25) на отрезке $[0, T]$ получаем нелинейное дифференциальное неравенство первого порядка

$$\frac{dy}{dt} \geq \omega \sin(\lambda_1 |\beta| t) y^{1+\rho}. \quad (26)$$

После интегрирования неравенства (26) приходим к соотношению

$$y^\rho(t) \geq \frac{y_0^\rho}{R(t)}, \quad (27)$$

где $R(t) = 1 - \theta + \theta \cos(\lambda_1 |\beta| t)$, $\theta = \omega \rho y_0^\rho / (\lambda_1 |\beta|)$. Поскольку в силу условия (9) на y_0 $R(0) = 1$, $R(T) = 1 - 2\theta < 0$, то $R(t_k) = 0$, $0 < t_k < T$, где

$$t_k = \frac{1}{\lambda_1 |\beta|} \arccos \left(1 - \frac{\lambda_1 |\beta|}{\omega \rho y_0^\rho} \right).$$

Значит, на полуинтервале $[0, t_k)$ в силу формулы (27) справедливо неравенство

$$y(t) \geq \frac{y_0}{R^{1/\rho}(t)}.$$

Доказательства остальной части теоремы 2 аналогично доказательству соответствующей части теоремы 1.

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] K. Rypdal, J. J. Rasmussen, “Blow-up in nonlinear Schroedinger equations-I. A general review”, *Phys. Scr.*, **33**:6 (1986), 481–504; “Blow-up in nonlinear Schroedinger equations-II. Similarity structure of the blow-up singularity”, 498–504.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [3] В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, “Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде”, *УФН*, **111**:10 (1973), 203–247.
- [4] Ш. М. Насибов, “Об устойчивости, разрушении, затухании и самоканализации решений одного нелинейного уравнения Шредингера”, *Докл. АН СССР*, **285**:4 (1985), 807–811.
- [5] Ш. М. Насибов, “Об одном нелинейном уравнении Шредингера с диссипативным членом”, *Докл. АН СССР*, **304**:2 (1989), 285–289.
- [6] Ш. М. Насибов, “Об оптимальных константах в некоторых неравенствах Соболева и их приложении к нелинейному уравнению Шредингера”, *Докл. АН СССР*, **307**:3 (1990), 538–542.
- [7] А. Б. Шабат, “О задаче Коши для уравнения Гинзбурга–Ландау”, *Динамика сплошной среды*, Вып. 1, Изд-во СО РАН, Новосибирск, 1969, 180–194.
- [8] О. И. Кудряшов, “Об особенностях решений нелинейных уравнений типа Гинзбурга–Ландау”, *Сиб. матем. журнал*, **16**:4 (1975), 866–868.
- [9] M. Weinstein, “On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations”, *Commun. Part. Differ. Equ.*, **11**:5 (1986), 545–565.
- [10] H. Nawa, “Asymptotic and limiting profiles of blowup solutions of the nonlinear Schrödinger equations with critical power”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **52**:2 (1999), 193–270.
- [11] Ш. М. Насибов, “О разрушении решений смешанной задачи для нелинейного эволюционного уравнения Гинзбурга–Ландау–Шредингера”, *Дифференц. уравнения*, **39**:8 (2003), 1087–1091.
- [12] Sh. M. Nasibov, “On some sufficient conditions for the blow-up solutions of the nonlinear Ginzburg–Landau–Schrödinger evolution equation”, *J. Appl. Math.*, **2004**:1 (2004), 23–35.
- [13] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, М., 1981.
- [14] G. Talenti, “Best constant in Sobolev inequality”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **110**:1 (1976), 353–372.