Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, П. Е. Кледен, А. Ю. Хренников, Память человека как p -адическая динамическая система, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 3, 385–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf940>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:34:41

© 1998 г. С. Альбеверио*, П. Е. Клёден†, А. Ю. Хренников‡

ПАМЯТЬ ЧЕЛОВЕКА КАК p -АДИЧЕСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Предложена модель воспоминания, основанная на динамических системах в метрическом пространстве p -адических чисел. Элементы этого пространства представляют собой понятия. Понятия считаются близкими, если их p -адические представления имеют достаточно длинный общий начальный набор цифр. Предполагается, что рассматриваемая динамическая система реализуется в подсознании и управляется сознанием, которое определяет параметры системы и данные (порождающие понятия) для начала итераций. Показано, что простейшие p -адические динамические системы позволяют моделировать основные черты воспоминания.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что процесс мышления хорошо моделируется динамической системой, заданной на множестве понятий. Иными словами, существует нелинейное соотношение между входными и выходными понятиями

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in \mathcal{X}, \quad (1)$$

где $\mathcal{X}$ — пространство состояний или конфигураций динамической системы (пространство понятий). Поэтому представляется целесообразным использовать методы теории динамических систем, чтобы исследовать некоторые функции человеческого мозга. При этом главной задачей является построение математической модели, которая бы объясняла, как эти функции реализованы. Для этого требуется адекватное математическое описание понятий и преобразований f .

Следуя [1], отождествим пространство понятий $\mathcal{X}$ с множеством так называемых p -адических целых чисел $\mathbb{Z}_p$, где $p > 1$ — некоторое фиксированное простое число, основание p -адической числовой системы. Основные свойства этой системы описаны в разделе 2. Подробное изложение имеется в [2]. Использовать p -адические целые числа для

*Institute of Applied Mathematics, Bonn, Germany

†FB Mathematik, Johann Wolfgang Goethe Universität, Frankfurt am Main, Germany

‡School of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Växjö University, Växjö, Sweden,
командирован МИЭМ

представления понятий естественно, т.к. любое такое число $x \in \mathbb{Z}_p$ определяется бесконечной последовательностью цифр $x = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, $\alpha_j \in \{1, \dots, p-1\}$, образующих некоторый код в смысле теории информации. p -Адическая метрика ρ_p определяет расстояние между кодами, согласно которому коды x и y близки тогда и только тогда, когда они имеют достаточно длинный общий начальный набор цифр.

В данной работе мы рассматриваем процесс восстановления образа в человеческой памяти. Этот процесс описывается как взаимодействие сознательного и бессознательного, при котором бессознательное действует как динамическая система в конфигурационном пространстве понятий, управляемая в определенные моменты времени и, в частности, запускаемая сознанием. Подсознательное можно представить себе как мощный компьютер, выполняющий огромное число операций с большой скоростью. Итерации управляются сознанием, которое задает исходный образ x_0 , описываемый небольшим (несколько бит) количеством информации, и определяет специальное конфигурационное пространство образов $\mathcal{X}_0$, в котором динамическая система (подсознание) должна действовать начиная с x_0 . Пространство $\mathcal{X}_0$ описывается как некоторый шар в подходящем p -адическом метрическом пространстве. Такой шар содержит огромное количество информации, среди которой невозможно найти нужный образ x_r или множество образов U , используя стандартные методы поиска. Можно, однако, предположить, что сознание передает подсознанию значения параметров s , которые определяют надлежащий закон функционирования динамической системы. Эти значения параметров определяются небольшой информацией. Таким образом, подсознательное имеет все необходимое, чтобы начать процесс восстановления образа x_r , и образ будет найден как аттрактор данной динамической системы. Однако мозг должен завершить процесс за конечное время. Поэтому подсознательное не будет выполнять бесчисленное множество итераций, чтобы найти запомненный образ x_r точно. Скорее, подсознательное определит шар $U_s(x_r)$ некоторого радиуса $s > 0$ в $\mathcal{X}_0$ с центром в x_r . Этот шар рассматривается сознанием как воспоминание об образе x_r . Если требуется уточнить воспоминание, то сознание может увеличить число итераций или количество информации, используемой для описания x_0 или параметров s динамической системы. Увеличение информации представляется более выгодным. В данной работе мы показываем, что, например, более детальное описание параметра s увеличивает точность воспоминания образа x_r , т.е. уменьшает радиус шара $U_s(x_r)$.

Предлагаемая модель решает проблему того, как человеческий мозг может обрабатывать огромные количества информации. Сознание не должно оперировать с большой информацией, оно лишь порождает начальные условия и параметры, описываемые небольшим количеством информации. Подсознательное тоже не должно оперировать с большой информацией. Оно действует как параметрическая динамическая система в пространстве образов. Скорость функционирования системы v_f огромна. Она является важной характеристикой воспоминания и меняется от индивидуума к индивидууму.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части (разделы 2–4) мы исследуем свойства нелинейной p -адической динамической системы $f(x) = x^2 + c$ с единственным параметром c . Во второй части (раздел 5) мы моделируем различные режимы функ-

ционирования мозга, используя вышеупомянутую p -адическую динамическую систему. Хотя наша модель свёрхупрощена, она качественно описывает функционирование мозга. Заметим также, что ограничение квадратичной нелинейностью оправдано тем, что нелинейности более высоких порядков редко реализуются в биологических системах.

2. p -АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Первоначальные сведения о p -адических числах [3] имеются в [2, 4–6]. Приложения в теоретической физике изложены, например, в книге [5] и статьях [7–15]. Теоретико-вероятностные приложения описаны в статьях [6, 16]. В работах [9, 17–20] даны приложения p -адических чисел в теории динамических систем.

Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ строится как пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y|$, где $|\cdot|$ – обычная абсолютная величина. Поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ получаются аналогично, но с помощью метрик $|\cdot|_p$, определяемых следующим образом.

Каждое натуральное число n можно представить в виде произведения простых чисел, т.е. $n = 2^{r_2} 3^{r_3} \dots p^{r_p} \dots$. Положим $|n|_p = p^{-r_p}$. Приняв, что $|0|_p = 0$ и $|-n|_p = |n|_p$, мы распространяем $|\cdot|_p$ на рациональные числа, положив $|n/m|_p = |n|_p/|m|_p$ при $m \neq 0$. Пополнение $\mathbb{Q}$ относительно $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ – это локально компактное поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

В отличие от абсолютной величины, $|\cdot|_p$ удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$|x + y|_p \leq \max[|x|_p, |y|_p], \quad x, y \in \mathbb{Q}_p. \quad (2)$$

Соответственно p -адическая метрика удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$\rho_p(x, y) \leq \max[\rho_p(x, z), \rho_p(z, y)], \quad x, y, z \in \mathbb{Q}_p. \quad (3)$$

Это неравенство означает, что ρ_p – ультраметрика.

Положим $U_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq r\}$ и $U_r^-(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}$, где $r = p^n$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эти множества называются замкнутыми и открытыми шарами в $\mathbb{Q}_p$. Множества $S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = r\}$ называются сферами радиуса r . Примем, что $\mathbb{Z}_p = U_1(0)$. Это кольцо p -адических целых чисел.

Любой элемент x из $\mathbb{Q}_p$ имеет единственное представление в виде

$$x = \frac{a_{-n}}{p^n} + \dots + a_0 + \dots + a_k p^k + \dots, \quad (4)$$

где $a_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ – цифры числа x . Ряд (4) сходится по норме $|\cdot|_p$. Элементы $x \in \mathbb{Z}_p$ представляются в виде $x = a_0 + \dots + a_k p^k + \dots$ и, следовательно, могут быть отождествлены с последовательностями цифр

$$x = (a_0, \dots, a_k, \dots). \quad (5)$$

Если бы вместо простого числа p мы использовали произвольное натуральное число $m > 1$, то получили бы так называемое множество m -адических чисел $\mathbb{Q}_m$, пополнив $\mathbb{Q}$ в метрике $\rho_m(x, y) = |x - y|_m$, которая определяется так же, как и $|\cdot|_p$. Однако $\mathbb{Q}_m$ не обязательно является полем, т.к. в $\mathbb{Q}_m$ могут существовать делители нуля. Множество $\mathbb{Q}_m$ всегда кольцо. Элементы $\mathbb{Z}_m = U_1(0)$ можно отождествить с последовательностями (5) с цифрами $a_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Существуют и более сложные числовые системы $\mathbb{Q}_M$, соответствующие неоднородным шкалам $M = (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$, где $m_j > 1$ – натуральные числа. Элементы $x \in \mathbb{Z}_M = U_1(0)$ можно представить в виде (5) с цифрами $a_j \in \{0, 1, \dots, m_j - 1\}$. В общем случае $\mathbb{Q}_M$ не является кольцом, $\mathbb{Z}_M$ – всегда кольцо.

3. КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО ОБРАЗОВ И ВСПОМИНАНИЕ

Мы предлагаем математическую модель человеческого подсознания в виде динамической системы. Конфигурационное пространство $\mathcal{X}$ такой динамической системы является пространством понятий. Главная проблема состоит в том, чтобы дать математическое описание пространства $\mathcal{X}$. Мы делаем это следующим образом:

Множество понятий $\mathcal{X}$ обладает древовидной структурой. Все понятия имеют общий корень. Существуют понятия с бесконечной сложностью, описываемой бесконечно длинными ветвями дерева $\mathcal{X}$.

ПРИМЕР: 2-АДИЧЕСКОЕ ПОДСОЗНАНИЕ. Это простейшая из предлагаемых нами математических моделей, описывающих подсознание. Все понятия порождаются единственным корнем k данного дерева с помощью бинарной системы кодов “да” (= 1) и “нет” (= 0). Понятия представляются последовательностями нулей и единиц. Дерево понятий $\mathcal{X}_2$ имеет ветви. Поскольку мы приняли, что некоторые понятия несут бесконечно много информации, то конфигурационное пространство понятий $\mathcal{X}_2 = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) : x_j \in \{0, 1\}\}$ может быть отождествлено с множеством 2-адических целых чисел $\mathbb{Z}_2$ (по крайней мере, как множество точек). Если мы используем 2-адическую метрику ρ_2 в $\mathcal{X}_2$, то сможем оценивать близость понятий:

Два понятия x и y близки, если они имеют достаточно длинный общий корень.

ЗАМЕЧАНИЕ. Генератор понятий k не принадлежит пространству понятий $\mathcal{X}_2$, он является идеальным элементом для $\mathcal{X}_2$.

Таким же образом мы можем рассматривать более сложные конфигурационные пространства понятий $\mathcal{X}_m$, в которых существуют m альтернатив ($\alpha = 0, 1, \dots, m-1$) для каждого уровня данного понятия из k . Удобно отождествить $\mathcal{X}_m$ с $\mathbb{Z}_m$ и использовать расстояние между понятиями, порожденное m -адической метрикой ρ_m . В качестве следующего естественного шага следует рассмотреть конфигурационные пространства $\mathcal{X}_M$, в которых число альтернатив зависит от уровня, т.е. $\alpha_j = 0, 1, \dots, m_j - 1$. Тогда мы отождествляем $\mathcal{X}_M$ с $\mathbb{Z}_M$, где $M = \{m_1, \dots, m_j, \dots\}$. Эта модель конфигурационного пространства понятий кажется наиболее реалистичной.

Заключительным этапом построения математической модели является описание процесса вспоминания в пространстве понятий $\mathcal{X}$. Математически это означает, что нужно определить функцию $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, описывающую динамическую систему, действующую в подсознании. Таким способом мы описываем процесс вспоминания как динамическую систему $x_n = f(x_{n-1})$ в пространстве понятий $\mathcal{X}$. Начиная с понятия x_0 (или множества понятий A_0), инициированного сознанием, подсознательно мы генерируем некоторую цепочку понятий $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ (или множество понятий $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$), которые все более точно представляют вспоминаемое понятие.

Разумеется, нас интересуют только непрерывные отображения $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. В силу нашего определения понятий f отображает понятия x и y с длинным общим корнем в понятия $x' = f(x)$ и $y' = f(y)$, которые также имеют длинный общий корень. Поскольку детальный анализ ряда систем $\mathbb{Q}_m$ при $m \neq p$ (p – простое число) и $\mathbb{Q}_M$ пока еще невозможен, мы сосредоточимся здесь на рассмотрении модели человеческого подсознания, описанной с помощью p -адических чисел.

4. p -АДИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ОДНИМ ПАРАМЕТРОМ

Продолжая работу [9], мы исследуем класс p -адических динамических систем

$$\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p, \quad x \longrightarrow f(x), \quad (6)$$

где $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ – аналитическая функция. Мы изучаем поведение итераций $x_n = f^n(x_0)$ с начальной точкой $x_0 \in \mathbb{Z}_p$, где $f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x)$ – n -кратная композиция f . Мы пользуемся стандартной терминологией теории динамических систем (см., например, [21], а также [9] для p -адического случая). Если x_0 – аттрактор, то мы определяем его область притяжения как $A(x_0) = \{y \in \mathbb{Z}_p: f^n(y) \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty\}$. Если $a \in \mathbb{Z}_p$ – неподвижная точка отображения f , то шар $U_r(a)$ в $\mathbb{Z}_p$ называется *диском Зигеля*, если каждая сфера $S_\rho(a)$ ($\rho \leq r$) инвариантна относительно f . Объединение всех дисков Зигеля с центром в точке a называется *максимальным диском Зигеля* и обозначается $SI(a)$. (О дисках Зигеля вещественных и комплексных динамических систем см. [21].)

В этой статье мы ограничимся рассмотрением динамической системы

$$\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p, \quad x \longrightarrow f_c(x) = x^2 + c, \quad (7)$$

где $c \in \mathbb{Z}_p$ – параметр. Несмотря на простоту отображения f поведение системы сложно и богато специфическими особенностями даже при малых простых числах p . Случай $c = 0$ рассмотрен в [9, 18], где доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.0. Пусть $c = 0$. Тогда динамическая система (7) имеет две неподвижные точки $x_- = 0$ и $x_+ = 1$. Если $p = 2$, то эти точки – аттракторы с областями притяжения $A(0) = U_{1/2}(0)$ и $A(1) = U_{1/2}(1)$. Если $p \neq 2$, то $x_- = 0$ – аттрактор с $A(0) = U_{1/p}(0)$ и $x_+ = 1$ – центр диска Зигеля $SI(1) = U_{1/p}(1)$.

Из эвристических соображений ясно, что поведение (7) при $c = 0$ устойчиво по отношению к малым возмущениям параметра c .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $c \in U_{1/p}(0)$. Тогда динамическая система (7) имеет две неподвижные точки $x_- \in U_{1/p}(0)$ и $x_+ \in U_{1/p}(1)$. Если $p = 2$, то эти точки являются аттракторами с областями притяжения $A(x_-) = U_{1/2}(x_-) = U_{1/2}(0)$ и $A(x_+) = U_{1/p}(x_+) = U_{1/2}(1)$. Если $p \neq 2$, то x_- – аттрактор с $A(x_-) = U_{1/p}(x_-) = U_{1/p}(0)$ и x_+ – центр диска Зигеля $SI(1) = U_{1/p}(x_+) = U_{1/p}(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы найти неподвижные точки отображения f_c , требуется решить квадратное уравнение $x = x^2 + c$ в $\mathbb{Z}_p$. Оно имеет формальное решение

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Докажем, что $\sqrt{1 - 4c}$ существует в $\mathbb{Z}_p$ при $|c|_p < 1$. Функция $\sqrt{1 - 4c}$ определяется рядом

$$\sqrt{1 - 4c} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k c^k (2k - 3)!!}{k!}.$$

Наихудшие условия сходимости этого ряда имеют место при $p = 2$, поскольку $|1/2|_p > 1$ только при $p = 2$ (подробнее см. [2]). Чтобы доказать сходимость ряда, достаточно использовать оценку

$$\left| \frac{2^k c^k (2k - 3)!!}{k!} \right|_2 \leq |c|_2^k.$$

Утверждение о поведении динамической системы в неподвижных точках следует из [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Каждая точка $x \in U_{1/p}(0)$ или $x \in U_{1/p}(1)$ является неподвижной точкой динамической системы (7) при некотором параметре $c \in U_{1/p}(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $c = x(1 - x)$. Пусть $x \in U_{1/p}(0)$. Тогда $1 - x \in U_{1/p}(1)$, т.е. $c \in U_{1/p}(0)$. Случай $x \in S_1(0)$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь некоторый параметр $c \in S_1(0)$. Далее мы используем теоремы 6.1 и 6.2 из приложения. “Критическим” значением параметра c является $c_0 = 1/4$, при котором две неподвижные точки динамической системы (7) соединяются в одну неподвижную точку $\bar{x}_0 = 1/2$, являющуюся центром диска Зигеля $U_{1/p}(\bar{x}_0)$. Если $p = 2$, то $c_0 \notin \mathbb{Z}_2$, и поэтому мы не будем рассматривать эту точку в дальнейшем.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $p = 2$. Динамическая система (7) не имеет неподвижных точек, т.к. $\mathbb{Z}_2 = U_{1/2}(0) \cup U_{1/2}(1)$; и, как было при доказательстве предложения 4.2, если неподвижная точка системы (7) принадлежит $\mathbb{Z}_2$, то $c \in U_{1/2}(0)$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $p = 3$ и $c \in U_{1/3}(2)$. Тогда $1 - 4c = 2 \pmod{3}$, поэтому $\sqrt{1 - 4c}$ не принадлежит $\mathbb{Q}_3$ и (7) не имеет неподвижных точек. Поскольку $c_0 = 1 \pmod{3}$, необходимо рассмотреть случай $c \in U_{1/3}(1)$ отдельно.

ЛЕММА 4.1. Пусть $p = 3$ и параметр c имеет каноническое разложение

$$c = 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{2l+1} + \alpha_{2l+2} 3^{2l+2} + \alpha_{2l+3} 3^{2l+3} + \dots,$$

тогда:

- а) $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_3$ при $\alpha_{2l+2} = 1$;
- б) $\sqrt{1-4c} \in \mathbb{Q}_3$ при $\alpha_{2l+2} = 2$;
- в) $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_3$ при $\alpha_{2l+2} = 0$ и $\alpha_{2l+3} \neq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $c = (1/4)(1 + 3^{2l+3} + 4\alpha_{2l+2}3^{2l+2} + 4\alpha_{2l+3}3^{2l+3} + \dots)$, т.е. $1 - 4c = -4\alpha_{2l+2}3^{2l+2} - (1 + 4\alpha_{2l+3})3^{2l+3} + \dots$. Если $\alpha_{2l+2} = 1$, то $1 - 4c = 2 \cdot 3^{2l+2} \pmod{3^{2l+3}}$ и $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_3$. Если $\alpha_{2l+2} = 2$, то $1 - 4c = 1 \cdot 3^{2l+2} \pmod{3^{2l+3}}$ и $\sqrt{1-4c} \in \mathbb{Q}_3$. Наконец, если $\alpha_{2l+2} = 0$ и $\alpha_{2l+3} \neq 2$, то $1 - 4c = s \cdot 3^{2l+3} \pmod{3^{2l+4}}$ при $s = 2, 1$ и $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $p = 3$. Положим $c_l^\alpha = 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{2l+1} + \alpha 3^{2l+2}$ при $\alpha = 1, 2$ и $a_l^\alpha = 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{2l+1} + \alpha 3^{2l+3}$ при $\alpha = 0, 1$. Тогда:

- а) если $c \in U_{1/3^{2l+3}}(c_l^1)$ или $c \in U_{1/3^{2l+4}}(a_l^\alpha)$ при $\alpha = 0, 1$, то динамическая система (7) не имеет неподвижных точек;
- б) если $c \in U_{1/3^{2l+3}}(c_l^2)$, то динамическая система (7) имеет две неподвижные точки $x_\pm^l$, являющиеся центрами дисков Зигеля, причем $SI(x_\pm^l) = U_{1/3}(\bar{x}_0)$, где $\bar{x}_0 = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале используем лемму 4.1. Затем, чтобы определить характер неподвижных точек в случае $\alpha = 2$ и размер соответствующих дисков Зигеля, воспользуемся результатами статьи [9] и тем фактом, что $x_\pm^l = \bar{x}_0 \pm 3^{l+1} \pmod{3^{l+2}}$.

Интересно рассмотреть поведение динамической системы (7) при наличии двух неподвижных точек $x_\pm^l$, имеющих один и тот же диск Зигеля $U_{1/3}(\bar{x}_0)$. В этом случае система порождает следующую динамику в шаре $U_{1/3}(\bar{x}_0)$: существуют два центра $x_\pm^l$ такие, что для любой начальной точки $z_0 \in U_{1/3}(\bar{x}_0)$ расстояние между итерациями z_n точки z_0 и этими центрами сохраняется.

СЛУЧАЙ 3. Пусть $p = 5$. Положим $c \in U_{1/5}(1) \cup U_{1/5}(2)$. Тогда $1 - 4c = 2, 3 \pmod{5}$. Поэтому $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_5$ и (7) не имеет неподвижных точек. Пусть $c \in U_{1/5}(3)$. Тогда $1 - 4c = 4 \pmod{5}$. Поэтому $\sqrt{1-4c} \in \mathbb{Q}_5$ и (7) имеет две неподвижные точки $x_\pm$. Существуют центры дисков Зигеля с $SI(x_+) = U_{1/5}(4)$ и $SI(x_-) = U_{1/5}(2)$. Следовательно, $SI(x_+) \cap SI(x_-) = \emptyset$. Поскольку $c_0 = 4 \pmod{5}$, необходимо рассмотреть случай $c \in U_{1/5}(4)$ отдельно.

ЛЕММА 4.2. Пусть $p = 5$ и c имеет каноническое разложение

$$c = 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 3 \cdot 5^l + \alpha_{l+1} \cdot 5^{l+1} + \dots,$$

где $\alpha_{l+1} = 0, 1, 2, 4$. Тогда:

- а) $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_5$ при всех l , если $\alpha_{l+1} = 0, 1$;
- б) $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_5$ при $l = 2k$ и $\sqrt{1-4c} \in \mathbb{Q}_5$ при $l = 2k + 1$, если $\alpha_{l+1} = 2, 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $c = 4 + (15/4)(5^l - 1) + \alpha_{l+1}5^{l+1} + \dots$, т.е. $1 - 4c = -(3 + 4\alpha_{l+1})5^{l+1} + \beta 5^{l+2}$ с $|\beta|_5 \leq 1$. Если $\alpha_{l+1} = 0$, то $1 - 4c = 2 \cdot 5^{l+1} \pmod{5^{l+2}}$, и если $\alpha_{l+1} = 1$, то $1 - 4c = 3 \cdot 5^{l+1} \pmod{5^{l+2}}$. В обоих случаях $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_5$ при всех l . Аналогично, если $\alpha_{l+1} = 2$, то $1 - 4c = 4 \cdot 5^{l+1} \pmod{5^{l+2}}$, и если $\alpha_{l+1} = 4$, то $1 - 4c = 1 \cdot 5^{l+1} \pmod{5^{l+2}}$. Следовательно, $\sqrt{1-4c} \in \mathbb{Q}_5$ тогда и только тогда, когда $l+1$ четно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $p = 5$. Предположим, что $c \in U_{1/5^{l+2}}(c_l^\alpha)$, где $c_l^\alpha = 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 3 \cdot 5^l + \alpha \cdot 5^{l+1}$ и $\alpha = 0, 1, 2, 4$. Тогда:

а) если $\alpha = 0, 1$ и l произвольно или если $\alpha = 2, 4$ и $l = 2k$, то динамическая система (7) не имеет неподвижных точек;

б) если $\alpha = 2, 4$ и $l = 2k+1$, то динамическая система (7) имеет две неподвижные точки $x_\pm^{l\alpha}$, являющиеся центрами дисков Зигеля с $SI(x_\pm^{l\alpha}) = U_{1/5}(\bar{x}_0)$, где $\bar{x}_0 = 1/2$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.3. Следует лишь использовать тот факт, что неподвижные точки имеют вид $x_\pm^2 = \bar{x}_0 \pm 5^{k+1} \pmod{5^{k+2}}$ и $x_\pm^4 = \bar{x}_0 \pm 5^{k+1}/2 \pmod{5^{k+2}}$.

СЛУЧАЙ 4. Пусть $p = 7$ и $c \in U_{1/7}(3) \cup U_{1/7}(4) \cup U_{1/7}(6)$. Тогда $1 - 4c = 3, 6, 5 \pmod{7}$. Следовательно, $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_7$ и (7) не имеет неподвижных точек. Пусть теперь $c \in U_{1/7}(1) \cup U_{1/7}(5)$. Тогда $1 - 4c = 4, 2 \pmod{7}$. Таким образом, $\sqrt{1-4c} \in \mathbb{Q}_7$ и (7) имеет две неподвижные точки $x_\pm$, являющиеся центрами дисков Зигеля. Если $c \in U_{1/7}(1)$, то $SI(x_+) = U_{1/7}(3)$ и $SI(x_-) = U_{1/7}(5)$, причем если $c \in U_{1/7}(5)$, то имеем $SI(x_+) = U_{1/7}(2)$ и $SI(x_-) = U_{1/7}(6)$. В обоих случаях пересечение дисков Зигеля пусто. Поскольку $c_0 = 2 \pmod{7}$, необходимо исследовать случай $c \in U_{1/7}(2)$ отдельно.

ЛЕММА 4.3. Пусть $p = 7$. Предположим, что c имеет каноническое разложение

$$c = 2 + 5 \cdot 7 + 7^2 + 5 \cdot 7^3 + 7^4 + \dots + 5 \cdot 7^{2l+1} + \alpha_{2l+2}7^{2l+2} + \dots,$$

где $\alpha_{2l+2} = 0, 2, 3, 4, 5, 6$. Тогда:

а) $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_7$ при $\alpha_{2l+2} = 2, 3, 5$;

б) $\sqrt{1-4c} \in \mathbb{Q}_7$ при $\alpha_{2l+2} = 0, 4, 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $c = 1/4 + (1/48 + \alpha_{2l+2})7^{2l+2} + \dots$. Поэтому $1 - 4c = (4 + 3\alpha_{2l+2})7^{2l+2} \pmod{7^{2l+3}}$. Кроме того, при $\alpha_{2l+2} = 0, 2, 3, 4, 5, 6$ имеем $1 - 4c = 4, 3, 6, 2, 5, 1 \pmod{7}$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $p = 7$. Предположим, что c имеет каноническое разложение

$$c = 2 + 5 \cdot 7 + 7^2 + 5 \cdot 7^3 + 7^4 + \dots + 5 \cdot 7^{2l-1} + 7^{2l} + \alpha_{2l+1}7^{2l+1} + \dots,$$

где $\alpha_{2l+1} = 0, 1, 2, 3, 4, 6$. Тогда $\sqrt{1-4c} \notin \mathbb{Q}_7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $c = 1/4 + (5/48 + \alpha_{2l+1})7^{2l+1} + \dots$. Поэтому $1 - 4c = (6 + 3\alpha_{2l+1})7^{2l+1} \pmod{7^{2l+2}}$. Кроме того, при $\alpha_{2l+2} = 0, 1, 2, 3, 4, 6$ имеем $1 - 4c \not\equiv 0 \pmod{7}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $p = 7$. Положим $c = c_l^\alpha = 2 + 5 \cdot 7 + 7^2 + 5 \cdot 7^3 + 7^4 + \dots + 5 \cdot 7^{2l+1} + \alpha 7^{2l+2}$ при $\alpha = 0, 2, 3, 4, 5$ и $c = a_l^\alpha = 2 + 5 \cdot 7 + 7^2 + 5 \cdot 7^3 + 7^4 + \dots + 5 \cdot 7^{2l-1} + 7^{2l} + \alpha 7^{2l+1}$ при $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 6$. Тогда:

а) динамическая система (7) не имеет неподвижных точек, если $c \in U_{1/7^{2l+3}}(c_l^\alpha)$ с $\alpha = 2, 3, 5$ или если $c \in U_{1/7^{2l+2}}(a_l^\alpha)$ с $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 6$;

б) динамическая система (7) имеет две неподвижные точки $x_\pm^{l\alpha}$ при $c \in U_{1/7^{2l+3}}(c_l^\alpha)$ с $\alpha = 0, 4, 6$, и эти неподвижные точки являются центрами дисков Зигеля с $SI(x_\pm^{l\alpha}) = U_{1/7}(\bar{x}_0)$, где $\bar{x}_0 = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения следует из лемм 4.3 и 4.4, результатов статьи [9] и того факта, что $x_\pm^{l0} = \bar{x}_0 \pm 7^{l+1} \pmod{7^{l+2}}$ и $x_\pm^{l4} = \bar{x}_0 \pm 4 \cdot 7^{l+1} \pmod{7^{l+2}}$.

Итак, мы показали, что при $p = 3, 5, 7$ в любой окрестности $U_r(c_0)$ точки $c_0 = 1/4$ существуют шары $U_{r_n}(c_n)$, содержащие параметры c , при которых система (7) имеет две неподвижные точки $x_\pm$ (центры дисков Зигеля), и шары $U_{r'_n}(c'_n)$, содержащие параметры c , при которых неподвижных точек нет. Таким образом, поведение динамической системы (7) нерегулярно зависит от параметра c при $c \rightarrow c_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интересно поведение циклов динамической системы (7) при $c \rightarrow c_0$.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ЧЕРТ ПРОЦЕССА ВСПОМИНАНИЯ

Наши математические результаты, относящиеся к p -адической динамической системе (7), можно использовать для моделирования некоторых основных черт процесса воспоминания, который в действительности может быть более сложным, чем это описано во введении.

Вначале рассмотрим случай $p = 2$. Тогда все понятия представлены 2-адическими целыми числами, т.е. бесконечными последовательностями нулей и единиц. В этом случае поведение динамической системы (7) простейшее: если $c \in U_{1/2}(0)$, то существуют два аттрактора $x_\pm$ с областями притяжения $A(x_-) = U_{1/2}(0)$ и $A(x_+) = U_{1/2}(1)$. Заметим, что $\mathbb{Z}_2 = A(x_-) \cup A(x_+)$, т.е. области $A(x_-)$ и $A(x_+)$ являются частями всего пространства понятий. Следовательно, чтобы вспомнить мысль, сознание должно выбрать подходящую область воспоминания, т.е. один из шаров $U_{1/2}(0)$ или $U_{1/2}(1)$ (это можно сделать, выбрав порождающее понятие $x_0 = 0$ или 1 , соответственно) и подходящее значение параметра c . Тогда динамическая система (7) начнет работать, и после определенного числа итераций сознание получит из подсознания некоторый набор вспоминаемых понятий, а именно шары $U_s(x_-)$ или $U_s(x_+)$, радиусы которых $s > 0$ зависят от числа итераций. Мы рассматриваем этот набор вспоминаемых понятий как результат процесса воспоминания.

Мы используем идеальную математическую модель, в которой понятия описаны с помощью бесконечных последовательностей цифр. В действительности человеческий мозг может оперировать лишь с конечным количеством цифр. Поэтому шар $U_{1/p^n}(a)$, у которого $a = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$ и радиус мал, отождествляется с центром начального сегмента $(a)_n = (a_0, \dots, a_{n-1})$ последовательности кодов. Таким образом, шары $U_s(x_-)$ или $U_s(x_+)$, полученные в процессе вспоминания, можно отождествить с понятиями, описанными с помощью начальных сегментов последовательностей кодов для $x_{\pm}$, однако, если радиусы этих шаров недостаточно малы, сознание может получить из подсознания шары, содержащие все возможные понятия. Следовательно, результат вспоминания зависит от числа итераций, которые происходят в подсознании, прежде чем результат вспоминания будет передан в сознание. Скорость v_f , с которой оперирует динамическая система, играет важную роль в этом процессе вспоминания. Различным индивидуумам нужно разное время для одного и того же числа итераций. Причем после одинакового периода вспоминания обычно они получают различные результаты. Мы можем говорить об *острой памяти*, когда результатом является точное понятие, и о *неострой памяти*, когда результатом является шар, содержащий много понятий. Поскольку процесс вспоминания останавливается через конечное время t_{lim} , кажется, что многие индивидуумы будут всегда действовать в режиме неострой памяти. Две физические характеристики v_f и t_{lim} , которые следует измерять, позволят нам различать фундаментальные аспекты человеческой психологии: *острое либо неострое психическое восприятие мира*.

В нашей модели человеческий мозг выполняет очень высокое сжатие информации благодаря тому, что в сознании хранятся лишь порождающие понятия и параметры s , а это составляет малый объем информации. Например, запомнив порождающее понятие $x = 0$ и значение параметра $s = 1$, сознание может впоследствии восстановить информацию о понятии любого объема после соответствующего числа итераций в подсознании.

Рассмотрим теперь математическую модель, в которой пространство понятий описано p -адическими целыми числами с $p \neq 2$. В такой модели процесс вспоминания более сложен, чем в случае $p = 2$, рассмотренном выше. Наряду с аттракторами в конфигурационном пространстве имеются диски Зигеля и области нерегулярного поведения, которые могут содержать циклы практически любой заданной длины. Предположим, что параметр s принадлежит шару $U_{1/p}(0)$. Тогда конфигурационное пространство динамической системы разделяется на две области $\mathcal{D}_1 = U_{1/p}(0)$ (регулярная доступная память) и $\mathcal{D}_2 = S_1(0)$ (нерегулярная доступная память). Теоретически по крайней мере одно понятие $x \in \mathcal{D}_1$ может быть получено посредством процесса вспоминания, который был описан в случае $p = 2$, т.е. с помощью выбора порождающего понятия $x_0 \in \mathcal{D}_1$, параметра $s \in U_{1/p}(0)$ и затем процедуры итераций в подсознании, сходящейся к некоторому аттрактору, принадлежащему $\mathcal{D}_1$. С другой стороны, понятия x , принадлежащие области вспоминания $\mathcal{D}_2$, не могут быть получены в качестве аттракторов динамической системы. Область вспоминания $\mathcal{D}_2$ разделяется на две подобласти $\mathcal{D}'_2 = U_{1/p}(1)$ и $\mathcal{D}''_2 = S_1(0) \setminus U_{1/p}(1)$.

Если сознание выбирает порождающее понятие $x_0 \in \mathcal{D}'_2$ с параметром $s \in U_{1/p}(0)$, то

итерации динамической системы остаются внутри сферы $S_s(x_+)$ радиуса $s = |x_0 - x_+|_p$. В некотором смысле все эти понятия подобны порождающему понятию x_0 . Поэтому сознание не получает существенно нового понятия, если в какой-то момент оно останавливает динамическую систему. В принципе, однако, сознание может получить практически бесконечное число воспоминаний, лежащих внутри сферы $S_s(x_+)$, останавливая динамическую систему в различные моменты времени. Эти моменты выбираются мозгом, вероятно, некоторым случайным образом. Весьма правдоподобно, что такая ситуация реализуется в естественном процессе воспоминания.

Если сознание выбирает порождающее понятие из $\mathcal{D}_2''$ и параметр $c \in U_{1/p}(0)$, то поведение итераций динамической системы зависит от $x_0 \in \mathcal{D}_2''$. Например, у системы может быть цикл с произвольным периодом $q \leq p - 1$. Тогда в результате воспоминания сознание получает лишь конечное число воспоминаний $x_0, x_1, \dots, x_{q-1}$. Весьма правдоподобно, что такая ситуация реализуется в естественном процессе воспоминания.

Конечно, если сознание не удовлетворено результатом воспоминания (особенно для области воспоминания $\mathcal{D}_2$), оно может изменить характер нелинейности. Например, сознание может выбрать функцию $f_{c,m}(x) = x^m + c$ при $m \geq 3$ и таким образом сможет вспоминать понятия $x \in \mathcal{D}_2$ как аттракторы некоторой новой динамической системы. Изучение такой динамической системы математически более сложно.

Работа поддержана фондами Александра фон Гумбольдта, Университета Риккьо и SFB-237 (Ruhr University и Volkswagen Foundation).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Следующие результаты о квадратах p -адических чисел имеются, например, в [4] и [6].

Используя каноническое разложение, можно записать p -адическое число $x \neq 0$ как $x = p^m \varepsilon$, где $|\varepsilon|_p = 1$ и m — целое. Если x — квадрат p -адического числа $y = p^k \varepsilon_0$, где $|\varepsilon_0|_p = 1$, то $m = 2k$ и $\varepsilon = \varepsilon_0^2$. Таким образом, чтобы описать все квадраты в $\mathbb{Q}_p$, достаточно описать все элементы ε с $|\varepsilon|_p = 1$, являющиеся квадратами, т.е. $\varepsilon = \varepsilon_0^2$ при всех ε_0 .

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $p = 2$, тогда 2-адическое число ε с $|\varepsilon|_2 = 1$ является квадратом тогда и только тогда, когда $\varepsilon \equiv 1 \pmod{8}$.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $p \neq 2$, тогда p -адическое число

$$\varepsilon = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots, \quad c_i = 0, \dots, p-1,$$

является квадратом тогда и только тогда, когда c_0 — квадратичный остаток $\pmod{p}$.

Список литературы

- [1] *A. Yu. Khrennikov*. The description of brain's functioning by the p -adic dynamical systems. Preprint Ruhr University, Bochum, SFB-237, № 355, 1997.
- [2] *W. Schikhov*. Ultrametric Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- [3] *K. Hensel*. Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung. 1897. V. 6. № 1. P. 83–88.
- [4] *Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich*. Number Theory. New York: Academic Press, 1966.
- [5] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов*. p -Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [6] *A. Yu. Khrennikov*. p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [7] *С. Альбеверио, А. Ю. Хренников*. ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 355–374.
- [8] *S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov*. J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 5515–5527.
- [9] *S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, S. De Smedt, B. Tirozzi*. p -Adic dynamical systems. Preprint Bochum University, SFB-237, № 369; *С. Альбеверио, А. Ю. Хренников*. ТМФ. 1998. Т. 114. № 3. С. 349–365.
- [10] *R. Cianci, A. Yu. Khrennikov*. Phys. Lett. B. 1994. V. 328. № 1/2. P. 109–112.
- [11] *B. Dragovic*. Adelic wave function of the universe. In: Proc. 3rd A. Friedmann Intern. Seminar on Grav. Cosmology. St. Petersburg: St. Petersburg Univ. Press, 1995.
- [12] *P. G. O. Freund, M. Olson*. Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 186–190.
- [13] *P. G. O. Freund, E. Witten*. Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 191–195.
- [14] *Yu. Manin*. Springer Lecture Notes in Math. 1985. V. 1111. P. 59–101.
- [15] *V. S. Vladimirov, I. V. Volovich*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659–676.
- [16] *А. Ю. Хренников*. ТМФ. 1993. Т. 97. № 3. С. 348–363.
- [17] *A. Yu. Khrennikov*. p -Adic description of chaos. In: Proc. of Workshop “Nonlinear Physics: theory and experiment”, Gallipoli, Italy, 1995. Eds E. Alfinito, M. Boti et al. Singapore: World Scientific Publ., 1996. P. 177–184.
- [18] *A. Yu. Khrennikov*. A p -adic behaviour of the standard dynamical systems. Preprint Ruhr University, Bochum, SFB-237, № 290, 1995.
- [19] *A. Yu. Khrennikov*. p -Adic model for population growth. Preprint Ruhr University Bochum SFB-237, № 315, 1996.
- [20] *A. Yu. Khrennikov*. The estimate of Kolmogorov complexity of p -adic random sequences. In: Proc. Inter. Conf. “1200 years of Science in Central Europe”. Aachen: Aachen-Verlag, 1997. P. 124–134.
- [21] *H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe*. Chaos and Fractals. New York: Springer-Verlag, 1992.

Поступила в редакцию 23.I.1998 г.