Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, О гамильтоновых операторах в дифференциальных алгебрах, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 369–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 10:47:17

© 2017 г.

В. В. Жаринов*

О ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОПЕРАТОРАХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

Развивается предложенная ранее алгебраическая техника для гамильтонова подхода к эволюционным системам уравнений в частных производных, включая системы со связями, и предлагается определяющая система уравнений (пригодная для компьютерных вычислений), характеризующая гамильтоновы операторы данного вида. Эта техника демонстрируется на простом примере.

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, структура Ли–Пуассона, тождество Якоби, гамильтонов оператор, гамильтонова эволюционная система.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9400>

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [1] мы предложили алгебраическую технику (основанную на книге [2], глава VII) для гамильтонова подхода к эволюционным системам уравнений в частных производных, включая системы со связями. Здесь мы развиваем этот подход и предлагаем определяющую систему уравнений (пригодную для компьютерных вычислений), характеризующую гамильтоновы операторы данного вида.

Мы работаем в рамках алгебро-геометрического подхода к уравнениям в частных производных (см., например, [2]–[4]). Мы надеемся, что наши результаты окажутся полезными в исследованиях, связанных с работами [5]–[19].

Мы используем следующие общие обозначения:

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\};$
- $M = \{1, \dots, m\}, \quad m \in \mathbb{N};$
- $\mathbb{I} = \mathbb{Z}_+^M = \{i = (i^1, \dots, i^m) \mid i^\mu \in \mathbb{Z}_+, \mu \in M\}.$

Все линейные операции выполняются над числовым полем $\mathbb{F}$. Как правило, предполагается суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

---

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: zharinov@mi.ras.ru

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Основной объект в нашей конструкции – дифференциальная алгебра $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$, где (детали и мотивировки см. в [1]):

- $\mathcal{F}$ – унитарная (т. е. содержащая единичный элемент) ассоциативная коммутативная алгебра;
- $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{F})$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{F}$; предполагается, что $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_V \oplus_{\mathcal{F}} \mathfrak{D}_H$;
- $\mathfrak{D}_V = \mathfrak{D}_V(\mathcal{F})$ – *вертикальная* подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$ с формальным $\mathcal{F}$ -базисом $\partial = \{\partial_a \mid a \in \mathbf{A}\}$, $[\partial_a, \partial_b] = 0$, $a, b \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ – множество индексов, в частности $\mathfrak{D}_V = \{X = X^a \partial_a \mid X^a \in \mathcal{F}\}$, где для любого элемента $L \in \mathcal{F}$ действие $\partial_a L \neq 0$ только для конечного числа индексов $a \in \mathbf{A}$;
- $\mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_H(\mathcal{F})$ – *горизонтальная* подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$ с $\mathcal{F}$ -базисом $D = \{D_\mu \mid \mu \in \mathbf{M}\}$, $[D_\mu, D_\nu] = 0$, $\mu, \nu \in \mathbf{M}$;
- $[D, \mathfrak{D}_V] \subset \mathfrak{D}_V$, т. е. $[D_\mu, V] \in \mathfrak{D}_V$ для всех $\mu \in \mathbf{M}$ и $V \in \mathfrak{D}_V$.

Напомним, что множество $\mathfrak{D}$ обладает двумя алгебраическими структурами: структурой алгебры Ли с коммутатором $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ в качестве скобки Ли и структурой $\mathcal{F}$ -модуля с умножением $(K \cdot X)L = K \cdot (XL)$, которые связаны *условием согласования* $[X, L \cdot Y] = (XL) \cdot Y + L \cdot [X, Y]$ для всех $K, L \in \mathcal{F}$ и для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$.

Для любых двух множеств индексов $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ множество $\mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_b^a) \mid \eta_b^a \in \mathcal{F}, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$ обладает структурой $\mathcal{F}$ -модуля с покомпонентным умножением, т. е. $K \cdot \boldsymbol{\eta} = (K \cdot \eta_b^a) \in \mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$ для всех $K \in \mathcal{F}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$.

Через $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$ мы обозначим $\mathcal{F}$ -модуль всех элементов $\boldsymbol{\eta} = (\eta_b^a) \in \mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$ таких, что для любого верхнего индекса $a \in \mathbf{A}$ только конечное число компонент $\eta_b^a \neq 0$. В частности, $\overset{\circ}{\mathcal{F}}^{\mathbf{A}} = \mathcal{F}^{\mathbf{A}}$ для любого множества индексов $\mathbf{A}$, тогда как $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}}$ состоит из всех *конечных* элементов $\boldsymbol{\eta} = (\eta_b) \in \mathcal{F}_{\mathbf{B}}$, и $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}} = \mathcal{F}_{\mathbf{B}}$ тогда и только тогда, когда множество индексов $\mathbf{B}$ конечно. Например, согласно приведенному выше соглашению $\partial K = (\partial_a K) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}$ для любого элемента $K \in \mathcal{F}$, в частности определено линейное отображение $\partial: \mathcal{F} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}$.

Для любого $\mathcal{F}$ -модуля $\mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$ и для любого дифференцирования $X \in \mathfrak{D}$ определено покомпонентное линейное отображение $X: \mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_b^a) \mapsto X\boldsymbol{\eta} = (X\eta_b^a)$. В частности, *правило Лейбница* имеет вид $X(K \cdot \boldsymbol{\eta}) = (XK) \cdot \boldsymbol{\eta} + K \cdot (X\boldsymbol{\eta})$ для всех $X \in \mathfrak{D}$, $K \in \mathcal{F}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{F}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$.

В этих обозначениях коммутатор $[D_\mu, \partial_a] = \Gamma_{\mu a}^b \cdot \partial_b$ для всех $\mu \in \mathbf{M}$, $a \in \mathbf{A}$, и мы предполагаем, что символ $\Gamma = (\Gamma_{\mu a}^b) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{MA}}^{\mathbf{A}}$. Заметим, что здесь множество $\mathbf{M}$ конечно, тогда как множество $\mathbf{A}$, как правило, бесконечное, и согласно приведенному выше определению $\mathcal{F}$ -модуля $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{MA}}^{\mathbf{A}}$ для всякого индекса $b \in \mathbf{A}$ только конечное число компонент $\Gamma_{\mu a}^b \neq 0$.

3. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Мы называем линейное отображение $P(D): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ (т. е. $P(D) \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{F})$) *горизонтальным дифференциальным оператором*, если $P(D) = P_i \cdot D^i$, где индексы $i = (i^1, \dots, i^m) \in \mathbb{I}$, коэффициенты $P = (P_i) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbb{I}}$, дифференциальные мономы

$D^i = (D_1)^{i^1} \circ \dots \circ (D_m)^{i^m}$, так что $P(D)L = P_i \cdot D^i L$ для всех $L \in \mathcal{F}$. Множество всех горизонтальных дифференциальных операторов мы обозначим через $\mathcal{F}[D]$. Это унитарная ассоциативная алгебра с умножением, задаваемым *правилом композиции отображений*. Аналогичным образом для любых четырех множеств индексов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}', \mathbf{B}'$ определен $\mathcal{F}[D]$ -модуль $\mathcal{F}_{\mathbf{B}'\mathbf{A}}^{\mathbf{A}'\mathbf{B}}[D]$ матричных горизонтальных дифференциальных операторов

$$P(D): \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{A}'}, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_b^a) \mapsto \boldsymbol{\chi} = (\chi_{b'}^{a'}), \quad \chi_{b'}^{a'} = P_{b' ai}^{a' b} \cdot D^i \eta_b^a,$$

где $P = (P_{b' ai}^{a' b}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbb{I}}^{\mathbf{A}'\mathbf{B}}$, $P(D) = (P_{b' ai}^{a' b} \cdot D^i)$.

Для каждой пары множеств индексов $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ определено естественное спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} \times \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_b^a), \quad \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_a^b) \mapsto \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \rangle = \eta_b^a \cdot \zeta_b^a.$$

Для каждого горизонтального дифференциального оператора $P(D): \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{A}'}$ определены *сопряженный по Лагранжу оператор*

$${}^*P(D): \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}'}^{\mathbf{B}'} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}, \quad \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_a^{b'}) \mapsto \boldsymbol{\omega} = (\omega_a^b), \quad \omega_a^b = (-D)^i (\zeta_{a'}^{b'} \cdot P_{b' ai}^{a' b}),$$

где ${}^*P = ({}^*P_{ab' i}^{ba'}) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbb{I}}^{\mathbf{B}\mathbf{A}'}$, ${}^*P(D) = ({}^*P_{ab' i}^{ba'} \cdot D^i) = ((-D)^i \circ P_{b' ai}^{a' b})$, и *формула Грина* (формула интегрирования по частям)

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, P(D)\boldsymbol{\eta} \rangle - \langle {}^*P(D)\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle = D_\mu \psi^\mu \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{\zeta} \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}'}^{\mathbf{B}'}, \quad \boldsymbol{\eta} \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}$$

с некоторым *током* $\psi = (\psi^\mu(\boldsymbol{\zeta}, P(D), \boldsymbol{\eta})) \in \mathcal{F}^{\mathbf{M}}$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Мы предполагаем, что дифференциальная алгебра $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$ горизонтально точная, т.е. горизонтальный дифференциальный оператор $P(D) = P_i \cdot D^i = 0$ ($P(D)K = 0$ для всех $K \in \mathcal{F}$) тогда и только тогда, когда его коэффициенты $P_i = 0$ для всех $i \in \mathbb{I}$.

Заметим, что в этом случае таким же свойством обладают и матричные операторы.

4. ОСНОВНЫЕ ИНГРЕДИЕНТЫ

Основные компоненты, инструменты и предположения предлагаемой техники следующие (подробнее см. [1]):

- горизонтальный дифференциальный оператор

$$D: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{M}}, \quad K \mapsto DK = (D_\mu K);$$

- горизонтальный дифференциальный оператор

$$\text{Div} = -{}^*D: \mathcal{F}^{\mathbf{M}} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \psi = (\psi^\mu) \mapsto \text{Div} \psi = D_\mu \psi^\mu;$$

- горизонтальный дифференциальный оператор

$$\nabla: \mathcal{F}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{A}}, \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi^a) \mapsto \boldsymbol{\eta} = (\eta_\mu^a), \quad \eta_\mu^a = D_\mu \phi^a + \Gamma_{\mu b}^a \cdot \phi^b;$$

- сопряженный по Лагранжу оператор

$$\overset{*}{\nabla}: \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}, \quad \chi = (\chi_a^\mu) \mapsto \mathbf{f} = (f_a), \quad f_a = -D_\mu \chi_a^\mu + \Gamma_{\mu a}^b \chi_b^\mu;$$

- вертикальный дифференциальный оператор

$$\partial: \mathcal{F} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}, \quad K \mapsto \partial K = (\partial_a K).$$

Оператор ∇ корректно определен, в силу предположения $\Gamma = (\Gamma_{\mu a}^b) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{MA}}^{\mathbf{A}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Определены композиции $\partial \circ \text{Div}, \overset{*}{\nabla} \circ \partial: \mathcal{F}^{\mathbf{M}} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}}$, и справедливо равенство $\partial \circ \text{Div} + \overset{*}{\nabla} \circ \partial = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любого вектора $\psi = (\psi^\mu) \in \mathcal{F}^{\mathbf{M}}$ имеет место равенство

$$(\partial \circ D_\mu) \psi^\mu + (\overset{*}{\nabla} \circ \partial) \psi^\mu = (-[D_\mu, \partial_a] + \Gamma_{\mu a}^b \partial_b) \psi^\mu = 0$$

согласно определению символа Γ . ■

Нам также понадобятся:

- линейное подпространство $\mathcal{E} = \text{Ker } \nabla$ линейного пространства $\mathcal{F}^{\mathbf{A}}$;
- множество $\mathfrak{D}_E = \mathfrak{D}_E(\mathcal{F}) = \{V \in \mathfrak{D}_V \mid [D_\mu, V] = 0, \mu \in \mathbf{M}\}$ всех эволюционных дифференцирований алгебры $\mathcal{F}$.

Множество $\mathfrak{D}_E$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}_V$, поскольку $[\mathfrak{D}_E, \mathfrak{D}_E] \subset \mathfrak{D}_E$, в силу тождества Якоби для коммутаторов, но не подмодуль $\mathcal{F}$ -модуля $\mathfrak{D}_V$ (см., например, [3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение $\text{ev}: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{D}_E$, $\phi = (\phi^a) \mapsto \text{ev}_\phi = \phi^a \cdot \partial_a$, есть изоморфизм линейных пространств. Более того, структура алгебры Ли на линейном пространстве $\mathfrak{D}_E$ задает изоморфную структуру на линейном пространстве $\mathcal{E}$ правилом*

$$[\phi, \psi] = \xi, \quad \phi = (\phi^a), \psi = (\psi^a), \quad \xi = (\xi^a), \quad \xi^a = \text{ev}_\phi \psi^a - \text{ev}_\psi \phi^a, \quad a \in \mathbf{A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство осуществляется прямой проверкой. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для каждого горизонтального дифференциального оператора $P(D) = (P_{ib}^a \cdot D^i): \mathcal{F}^{\mathbf{B}} \rightarrow \mathcal{F}^{\mathbf{A}}$, его сопряженного по Лагранжу $\overset{*}{P}(D) = ((-D)^i \circ P_{ib}^a): \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{A}} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\mathbf{B}}$ и любого $\phi \in \mathcal{E}$ справедливы следующие утверждения:*

- $[\text{ev}_\phi, P(D)] = \text{ev}_\phi P(D) = ((\text{ev}_\phi P_{ib}^a) \cdot D^i);$
- $[\text{ev}_\phi, \overset{*}{P}(D)] = \text{ev}_\phi \overset{*}{P}(D) = ((-D)^i \circ (\text{ev}_\phi P_{ib}^a)) = [\text{ev}_\phi, P(D)]^*;$

т. е. эволюционное дифференцирование ev_ϕ здесь действует покомпонентно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство опирается на характеристическое свойство эволюционных дифференцирований. ■

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Мы предполагаем, что существует множество индексов A и горизонтальный дифференциальный оператор $\mathbf{J} = J(D): \mathcal{F}^A \rightarrow \mathcal{F}^A$, $\phi = (\phi^\alpha) \mapsto \phi = (\phi^\alpha)$ такой, что

- а) композиция $\nabla \circ \mathbf{J} = 0$, т. е. $\text{Im } \mathbf{J} \subset \text{Ker } \nabla$;
- б) коммутатор $[\text{ev}_\phi, \mathbf{J}] = 0$ для всех $\phi \in \mathcal{E}$.

Подробнее, $\mathbf{J} = (J_{\alpha i}^a \cdot D^i)$, $J = (J_{\alpha i}^a) \in \mathcal{F}_{A\mathbb{I}}^A$, $\phi^a = J_{\alpha i}^a \cdot D^i \phi^\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для сопряженного по Лагранжу оператора $\mathbf{J}^*: \mathring{\mathcal{F}}_A \rightarrow \mathring{\mathcal{F}}_A$ справедливы следующие утверждения:

- а*) композиция $\mathbf{J}^* \circ \nabla^* = 0$;
- б*) коммутатор $[\text{ev}_\phi, \mathbf{J}^*] = 0$ для всех $\phi \in \mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство осуществляется прямой проверкой. ■

5. СТРУКТУРЫ ЛИ–ПУАССОНА

Мы будем использовать следующие обозначения:

- $\mathfrak{F} = \mathcal{F} / \text{Im Div} = \{ \int K = K + \text{Div } \mathcal{F}^M \mid K \in \mathcal{F} \}$;
- $\mathcal{E} = \mathcal{F}^A$, $\mathcal{E}^* = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}; \mathcal{F}) = \mathring{\mathcal{F}}_A$.

Здесь $\mathfrak{F}$ – линейное пространство всех функционалов над линейным пространством $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ – линейное пространство, а $\mathcal{E}^*$ – его дуальное пространство. Естественная проекция $\mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ действует по правилу $K \mapsto \int K = K + \text{Div } \mathcal{F}^M$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Мы предполагаем, что дифференциальная алгебра $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$ имеет тип Дюбуа–Реймона, т. е. обладает следующим свойством: для данного элемента $K \in \mathcal{F}$ равенство $\int K \cdot L = 0$ выполняется для всех $L \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $K = 0$.

В силу предложений 1 и 4 справедливы следующие утверждения: $\partial: \text{Im Div} \rightarrow \text{Im } \nabla^*$ и $\mathbf{J}^* \circ \nabla^* = 0$, следовательно, определена последовательность линейных пространств

$$\mathcal{F} / \text{Im Div} \xrightarrow{\partial} \mathring{\mathcal{F}}_A / \text{Im } \nabla^* \xrightarrow{\mathbf{J}^*} \mathring{\mathcal{F}}_A.$$

В частности, определено линейное отображение (вариационная производная)

- $\delta = \mathbf{J}^* \circ \partial: \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{E}^*$, $\int K \mapsto \delta K = \mathbf{J}^*(\partial K)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Структура Ли–Пуассона над дифференциальной алгеброй $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$ есть билинейное отображение (скобка Ли–Пуассона)

$$\{ \cdot, \cdot \}: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}, \quad \int K, \int L \mapsto \{ \int K, \int L \},$$

со следующими свойствами:

- $\{ \int K, \int L \} + \{ \int L, \int K \} = 0$; (кососимметрия)
- $\mathbf{J}\mathbf{I}(\int K, \int L, \int M) = \{ \int K, \{ \int L, \int M \} \} + \text{с.р.} = 0$; (тождество Якоби)

где аббревиатура “с.р.” означает циклическую перестановку аргументов $\int K, \int L, \int M \in \mathfrak{F}$. В этом случае пара $(\mathfrak{F}, \{ \cdot, \cdot \})$ есть алгебра Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мы зададим скобку $\{\cdot, \cdot\}$ правилом

$$\{fK, fL\} = f\langle \delta K, \Lambda(D)\delta L \rangle \quad \text{для всех} \quad fK, fL \in \mathfrak{F},$$

где горизонтальный дифференциальный оператор

$$\Lambda(D): \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}, \quad f = (f_\alpha) \mapsto \phi = (\phi^\alpha), \quad \phi^\alpha = \Lambda_i^{\alpha\beta} \cdot D^i f_\beta, \quad \alpha \in A,$$

множество коэффициентов $\Lambda = (\Lambda_i^{\alpha\beta}) \in \mathring{\mathcal{F}}_{\mathbb{I}}^{\text{AA}}$. Мы считаем, что оператор $\Lambda(D)$ кососимметрический по Лагранжу, т. е. $\Lambda(D) + \Lambda^*(D) = 0$.

В этом случае скобка $\{\cdot, \cdot\}$ кососимметрическая, и наша задача сводится к тому, чтобы найти по возможности простое и эффективное условие гамильтоновости оператора $\Lambda(D)$, т. е. обеспечить выполнение тождества Якоби.

В статье [1] мы доказали следующий алгебраический аналог теоремы 7.8 из книги [2].

ЛЕММА 1. Тождество Якоби имеет следующее представление:

$$\mathbf{J}\mathbf{I}(fK, fL, fM) = f\langle \delta K, [\text{ev}_{\phi(L)}, \Lambda(D)]\delta M \rangle + \text{с.р.} = 0,$$

где $\phi(L) = (\mathbf{J} \circ \Lambda(D) \circ \delta)L$, $\Lambda(D) = (\Lambda_i^{\alpha\beta} \cdot D^i)$ – горизонтальный дифференциальный кососимметрический по Лагранжу оператор.

Здесь мы усилим этот результат и придадим ему вид, более удобный для реальных вычислений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что тождество Якоби выполняется в усиленной форме, если

$$f\langle f, [\text{ev}_{\phi(g)}, \Lambda(D)]h \rangle + \text{с.р.} = 0$$

для всех $f, g, h \in \mathcal{E}^*$, где $\phi(g) = (\mathbf{J} \circ \Lambda(D))g$.

ЛЕММА 2. В условиях леммы 1 тождество Якоби в усиленной форме может быть записано в виде

$$R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma + (-D)^l (R_{kl}^{\beta\gamma\alpha} \cdot g_\beta \cdot D^k h_\gamma) + (-D)^k (R_{kl}^{\gamma\alpha\beta} \cdot D^l g_\beta \cdot h_\gamma) = 0$$

для всех $g, h \in \mathcal{E}^*$, $\alpha, \beta, \gamma \in A$, $k, l \in \mathbb{I}$, где коэффициенты

$$R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} = R_{kl}^{\alpha\beta\gamma}(\Lambda) = \binom{i}{r} J_{\epsilon i}^a \cdot D^{i-r} \Lambda_{k-r}^{\epsilon\beta} \cdot \partial_a \Lambda_l^{\alpha\gamma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо уточнить выражение

$$f\langle f, [\text{ev}_{\phi(g)}, \Lambda(D)]h \rangle = f f_\alpha \cdot [\text{ev}_{\phi(g)}, \Lambda_l^{\alpha\gamma} \cdot D^l] h_\gamma,$$

где $f, g, h \in \mathcal{E}^*$. Здесь $\phi(g) = (\mathbf{J} \circ \Lambda(D))g$, т. е.

$$\begin{aligned} \phi^a(g) &= J_{\epsilon i}^a \cdot D^i (\Lambda_k^{\epsilon\beta} \cdot D^k g_\beta) = J_{\epsilon i}^a \cdot \binom{i}{r} \cdot D^{i-r} \Lambda_k^{\epsilon\beta} \cdot D^{k+r} g_\beta = \\ &= \binom{i}{r} \cdot J_{\epsilon i}^a \cdot D^{i-r} \Lambda_{k-r}^{\epsilon\beta} \cdot D^k g_\beta. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно предложению 3

$$\begin{aligned} \int f_\alpha \cdot [\text{ev}_{\boldsymbol{\phi}(g)}, \Lambda_l^{\alpha\gamma} \cdot D^l] h_\gamma &= \int f_\alpha \cdot \binom{i}{r} \cdot J_{\epsilon i}^a \cdot D^{i-r} \Lambda_{k-r}^{\epsilon\beta} \cdot D^k g_\beta \cdot \partial_a \Lambda_l^{\alpha\gamma} \cdot D^l h_\gamma = \\ &= \int R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot f_\alpha \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \langle \delta K, [\text{ev}_{\boldsymbol{\phi}(L)}, \Lambda(D)] \delta M \rangle + \text{с.р.} &= \\ &= \int R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot (f_\alpha \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma + g_\alpha \cdot D^k h_\beta \cdot D^l f_\gamma + h_\alpha \cdot D^k f_\beta \cdot D^l g_\gamma) = \\ &= \int (R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot f_\alpha \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma + R_{kl}^{\beta\gamma\alpha} \cdot D^l f_\alpha \cdot g_\beta \cdot D^k h_\gamma + R_{kl}^{\gamma\alpha\beta} \cdot D^k f_\alpha \cdot D^l g_\beta \cdot h_\gamma) = \\ &= \int f_\alpha \cdot (R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma + (-D)^l (R_{kl}^{\beta\gamma\alpha} \cdot g_\beta \cdot D^k h_\gamma) + (-D)^k (R_{kl}^{\gamma\alpha\beta} \cdot D^l g_\beta \cdot h_\gamma)), \end{aligned}$$

где мы дважды воспользовались формулой Грина интегрирования по частям. Ясно, что последнее представление и предполагаемое свойство Дюбуа–Реймона дифференциальной алгебры $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$ влекут наше утверждение. ■

ТЕОРЕМА 1. В условиях леммы 2 тождество Якоби в усиленной форме сводится к системе уравнений $Q = Q(\Lambda) = (Q_{kl}^{\alpha\beta\gamma}) = 0$, или, более подробно,

$$Q_{kl}^{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \text{для всех } \alpha, \beta, \gamma \in A, \quad k, l \in \mathbb{I},$$

где

$$Q_{kl}^{\alpha\beta\gamma} = Q_{kl}^{\alpha\beta\gamma}(\Lambda) = R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} + (-1)^j \binom{j}{p, k, l-i} D^p R_{ij}^{\beta\gamma\alpha} + (-1)^i \binom{i}{p, k-j, l} D^p R_{ij}^{\gamma\alpha\beta},$$

и $\binom{j}{p, k, l-i}, \binom{i}{p, k-j, l}$ суть триномиальные коэффициенты¹⁾.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, здесь

$$\begin{aligned} R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma + (-D)^l (R_{kl}^{\beta\gamma\alpha} \cdot g_\beta \cdot D^k h_\gamma) + (-D)^k (R_{kl}^{\gamma\alpha\beta} \cdot D^l g_\beta \cdot h_\gamma) &= \\ &= R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma + (-1)^j \binom{j}{pqr} D^p R_{kj}^{\beta\gamma\alpha} \cdot D^q g_\beta \cdot D^{r+k} h_\gamma + \\ &+ (-1)^i \binom{i}{pqr} D^p R_{il}^{\gamma\alpha\beta} \cdot D^{q+l} g_\beta \cdot D^r h_\gamma = \\ &= R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma + (-1)^j \binom{j}{p, k, l-i} D^p R_{ij}^{\beta\gamma\alpha} \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma + \\ &+ (-1)^i \binom{i}{p, k-j, l} D^p R_{ij}^{\gamma\alpha\beta} \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma = Q_{kl}^{\alpha\beta\gamma} \cdot D^k g_\beta \cdot D^l h_\gamma. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться предполагаемой горизонтальной точностью дифференциальной алгебры $(\mathcal{F}, \mathfrak{D}_H)$. ■

¹⁾ Напомним, полиномиальные коэффициенты $\binom{i}{j_1, \dots, j_p} = \frac{i!}{j_1! \dots j_p!}$, $i = j_1 + \dots + j_p$. В частности, биномиальный коэффициент $\binom{i}{j} = \binom{i}{j, i-j}$.

6. ЭВОЛЮЦИЯ БЕЗ СВЯЗЕЙ

Здесь (подробнее см. [1]) алгебра $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(XU)$ есть алгебра всех гладких функций на бесконечномерном пространстве $XU = X \times U$, зависящих от конечного числа аргументов x^μ, u_i^α , где:

- $X = \mathbb{R}^M = \{x = (x^\mu) \mid x^\mu \in \mathbb{R}, \mu \in M\}$ – пространство независимых переменных;
- $U = \mathbb{R}^A = \{u = (u^\alpha) \mid u^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in A\}$ – пространство зависимых переменных, A – конечное множество индексов;
- $U = \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^A = \{u = (u_i^\alpha) \mid u_i^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in A, i \in \mathbb{I}\}$ – пространство дифференциальных переменных, $u^\alpha = u_0^\alpha$.

Алгебра Ли $\mathfrak{D}_H$ имеет $\mathcal{F}$ -базис $D = \{D_\mu \mid \mu \in M\}$, где *полные частные производные*

$$D_\mu = \partial_{x^\mu} + u_{i+(\mu)}^\alpha \partial_{u_i^\alpha}, \quad i + (\mu) = (i^1, \dots, i^\mu + 1, \dots, i^m).$$

Подалгебра Ли $\mathfrak{D}_V$ имеет $\mathcal{F}$ -базис $\{\partial_{u_i^\alpha} \mid \alpha \in A, i \in \mathbb{I}\}$, так что здесь $a = \binom{\alpha}{i}$, $A = \binom{A}{\mathbb{I}}$, и коммутатор

$$[D_\mu, \partial_{u_i^\alpha}] = -\partial_{u_{i-(\mu)}^\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \Gamma_{\mu\alpha j}^{i\beta} = -\delta_\alpha^\beta \delta_{j+(\mu)}^i, \quad \alpha, \beta \in A, \quad i, j \in \mathbb{I}, \quad \mu \in M.$$

Отметим, что здесь пара $\binom{\beta}{j}$ есть единый верхний индекс, а пара $\binom{i}{\alpha}$ есть единый нижний индекс.

Далее, в этой ситуации,

- $\nabla: \mathcal{F}_{\mathbb{I}}^A \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{I}}^A, \quad \phi = (\phi_i^\alpha) \mapsto \eta = (\eta_{\mu i}^\alpha), \quad \eta_{\mu i}^\alpha = D_\mu \phi_i^\alpha - \phi_{i+(\mu)}^\alpha;$
- $\mathbf{j}: \mathcal{F}^A \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{I}}^A, \quad \phi = (\phi^\alpha) \mapsto \phi = (\phi_i^\alpha), \quad \phi_i^\alpha = D^i \phi^\alpha = \delta_{ik} \delta_\beta^\alpha \cdot D^k \phi^\beta;$
- $\text{Ker } \mathbf{j} = 0, \quad \text{Im } \mathbf{j} = \text{Ker } \nabla, \quad [\text{ev } \phi, \mathbf{j}] = 0 \text{ для всех } \phi \in \mathcal{E};$
- $Q_{kl}^{\alpha\beta\gamma} = R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} + (-1)^j \binom{j}{p, k, l-i} D^p R_{ij}^{\beta\gamma\alpha} + (-1)^i \binom{i}{p, k-j, l} D^p R_{ij}^{\gamma\alpha\beta};$
- $R_{kl}^{\alpha\beta\gamma} = \binom{i}{r} D^{i-r} \Lambda_{k-r}^{\epsilon\beta} \cdot \partial_{u_i^\epsilon} \Lambda_l^{\alpha\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in A, \quad k, l, i, r, j, p \in \mathbb{I}.$

7. ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ

Здесь мы считаем, что

- $X = \mathbb{R}, \quad U = \mathbb{R}, \quad U = \mathbb{R}_{\mathbb{I}}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{Z}_+, \quad \mathcal{F} = \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(XU);$
- $D = \partial_x + u_{i+1} \partial_{u_i}, \quad [D, \partial_{u_i}] = -\partial_{u_{i-1}}, \quad i \in \mathbb{I}.$

В этом случае горизонтальный дифференциальный оператор $\Lambda(D) = \sum_{i=0}^s \Lambda_i \cdot D^i$, где *порядок* $s \in \mathbb{N}$, коэффициенты $\Lambda_i = \Lambda_i(u_0, u_1, \dots, u_{n(i)}) \in \mathcal{F}$, $0 \leq i \leq s$. В частности (см. лемму 2, теорему 1),

- $R_{kl} = \binom{i}{r} D^{i-r} \Lambda_{k-r} \cdot \partial_{u_i} \Lambda_l, \quad k, l, i, r, j, p \in \mathbb{I};$
- $Q_{kl} = R_{kl} + (-1)^j \binom{j}{p, k, l-i} D^p R_{ij} + (-1)^i \binom{i}{p, k-j, l} D^p R_{ij};$
- $\text{supp } R = \{(k, l) \in \mathbb{I}^2 \mid l \leq s, k \leq n(l) + s\};$
- $\text{sp } R_{kl} = \{(r, i) \in \mathbb{I}^2 \mid \max\{0, k-s\} \leq r \leq k, r \leq i \leq n(l)\}.$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В этих обозначениях

$$R_{kl} = \sum_{\text{sp } R_{kl}} \binom{i}{r} D^{i-r} \Lambda_{k-r} \cdot \partial_{u_i} \Lambda_l, \quad (k, l) \in \text{supp } R,$$

и $R_{kl} = 0$ для $(k, l) \notin \text{supp } R$.

Положим

$$Q_{kl} = R_{kl} + Q'_{kl} + Q''_{kl}, \quad (k, l) \in \text{supp } Q,$$

где $\text{supp } Q = \text{supp } R \cup \text{supp } Q' \cup \text{supp } Q'' \subset \mathbb{I}^2$,

- $\text{supp } Q' = \bigcup_{(i,j) \in \text{supp } R} \{(k, l) \in \mathbb{I}^2 \mid k \leq j, l \geq i, k + l \leq i + j\}$,
- $\text{supp } Q'' = \bigcup_{(i,j) \in \text{supp } R} \{(k, l) \in \mathbb{I}^2 \mid k \geq j, l \leq i, k + l \leq i + j\}$.

По определению $R_{kl} = 0$ для $(k, l) \notin \text{supp } R$, $Q_{kl}^\sharp = 0$ для $(k, l) \notin \text{supp } Q^\sharp$, где $\sharp = ', ''$.

7.1. Пример. Рассмотрим оператор $\Lambda(D) = \lambda D + D\lambda/2$, $\lambda = \lambda(u_0, \dots, u_n) \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Здесь $s = 1$, $\Lambda_0 = D\lambda/2$, $\Lambda_1 = \lambda$, $n(i) = n + 1 - i$ при $i = 0, 1$, так что $n(i) + i = n + 1$. По построению оператор $\Lambda(D)$ кососимметрический по Лагранжу. В силу теоремы 1, функция λ определяется системой дифференциальных уравнений $Q_{kl} = Q_{kl}(\lambda) = 0$, $k, l \in \mathbb{I}$.

Вычисления показывают, что $\text{supp } R = \{(k, l) \in \mathbb{I}^2 \mid l \leq 1, k \leq n(l) + 1\}$.

Обозначим $\lambda_{u_i} = \partial_{u_i} \lambda$, $i = 0, \dots, n$, и положим

$$\begin{aligned} \binom{i}{k}' &= \binom{i}{k} + 2 \binom{i}{k-1}, \\ \binom{i}{pkl}' &= \binom{i}{p, k-1, l} - \binom{i}{p, k, l-1} = \frac{(k-l)i!}{p! k! l!}, \quad p+k+l = i+1. \end{aligned} \quad (1)$$

Итак (напомним, что мы предполагаем суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам в естественных пределах),

$$\begin{aligned} R_{kl} &= \binom{i}{r} D^{i-r} \Lambda_{k-r} \cdot \partial_{u_i} \Lambda_l = (k-r=0, 1) = \\ &= \left(\binom{i}{k} D^{i-k} \Lambda_0 + \binom{i}{k-1} D^{i+1-k} \Lambda_1 \right) \cdot \partial_{u_i} \Lambda_l = \\ &= \frac{1}{2} \left(\binom{i}{k} D^{i+1-k} \lambda + 2 \binom{i}{k-1} D^{i+1-k} \lambda \right) \cdot \partial_{u_i} \Lambda_l = \frac{1}{2} \binom{i}{k}' D^{i+1-k} \lambda \cdot \partial_{u_i} \Lambda_l. \end{aligned}$$

В частности,

$$R_{k1} = \frac{1}{2} \binom{i}{k}' D^{i+1-k} \lambda \cdot \lambda_{u_i}, \quad k = 0, \dots, n+1, \quad (2)$$

тогда как

$$\begin{aligned} R_{k0} &= \frac{1}{4} \binom{i}{k}' D^{i+1-k} \lambda \cdot \partial_{u_i} (D\lambda) = (\partial_{u_i} \circ D = D \circ \partial_{u_i} + \partial_{u_{i-1}}) = \\ &= \frac{1}{4} \binom{i}{k}' D^{i+1-k} \lambda \cdot D\lambda_{u_i} + \binom{i}{k}' D^{i+1-k} \lambda \cdot \lambda_{u_{i-1}} = \\ &= \left(\binom{i+1}{k}' - \binom{i}{k}' = \binom{i}{k-1}' \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\binom{i}{k}' (D^{i+2-k} \lambda \cdot \lambda_{u_i} + D^{i+1-k} \lambda \cdot D\lambda_{u_i}) + \binom{i}{k-1}' D^{i+2-k} \lambda \cdot \lambda_{u_i} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(D \left(\binom{i}{k}' D^{i+1-k} \lambda \cdot \lambda_{u_i} \right) + \binom{i}{k-1}' D^{i+1-(k-1)} \lambda \cdot \lambda_{u_i} \right), \end{aligned}$$

так что

$$R_{k0} = \frac{1}{2}(DR_{k1} + R_{k-1,1}), \quad k = 0, \dots, n+2. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q'_{kl} &= (-1)^j \binom{j}{p, k, l-i} D^p R_{ij} = (j = 0, 1) = \\ &= \binom{0}{p, k, l-i} D^p R_{i0} - \binom{1}{p, k, l-i} D^p R_{i1} = \\ &= \delta_k^0 R_{l0} - \delta_k^0 DR_{l1} - \delta_{k+(l-i)}^1 R_{i1} = (DR_{l1} + R_{l-1,1} = 2R_{l0}) = \\ &= -(\delta_k^0 R_{l0} + \delta_k^1 R_{l1}) = -R_{lk}, \end{aligned}$$

т. е.

$$Q'_{kl} = -R_{lk}, \quad l = 0, \dots, n+2, \quad k = 0, 1. \quad (4)$$

Далее,

$$\begin{aligned} Q''_{kl} &= (-1)^i \binom{i}{p, k-j, l} D^p R_{ij} = (j = 0, 1) = \\ &= (-1)^i \binom{i}{pkl} D^p R_{i0} + (-1)^i \binom{i}{p, k-1, l} D^p R_{i1} = (2R_{i0} = DR_{i1} + R_{i-1,1}) = \\ &= \frac{1}{2}(-1)^i \binom{i}{pkl} D^p (DR_{i1} + R_{i-1,1}) + (-1)^i \binom{i}{p, k-1, l} D^p R_{i1} = \\ &= \frac{1}{2}(-1)^i \left(\binom{i}{p-1, k, l} - \binom{i+1}{pkl} + 2 \binom{i}{p, k-1, l} \right) D^p R_{i1} = \\ &= \frac{1}{2}(-1)^i \left(\binom{i}{p, k-1, l} - \binom{i}{p, k, l-1} \right) D^p R_{i1}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством

$$\binom{i}{p-1, k, l} + \binom{i}{p, k-1, l} + \binom{i}{p, k, l-1} = \binom{i+1}{pkl}, \quad p+k+l = i+1.$$

Так что

$$Q''_{kl} = \frac{(-1)^i}{2} \binom{i}{pkl}' D^p R_{i1}, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad p+k+l = i+1 \leq n+2. \quad (5)$$

Заметим, что $Q''_{kl} = -Q''_{lk}$ в силу равенства $\binom{i}{pkl}' = -\binom{i}{plk}'$ (см. определение (1)).

Итак,

$$Q_{kl} = Q_{kl}(\lambda) = R_{kl} - R_{lk} + \frac{(-1)^i}{2} \binom{i}{pkl}' D^p R_{i1} = -Q_{lk}. \quad (6)$$

Наша цель теперь – найти все функции $\lambda = \lambda(u_0, \dots, u_n) \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, такие, что $Q(\lambda) = (Q_{kl}(\lambda)) = 0$. Удобно начать с уравнения $Q_{1,n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Здесь, $R_{1,n+1} = 0$, $R_{n+1,1} = \lambda \cdot \lambda_{u_n}$, тогда как

$$Q''_{1,n+1} = \frac{(-1)^i}{2} \binom{i}{p, 1, n+1}' D^p R_{i1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \binom{n+1}{0, 1, n+1}' R_{n+1,1} = \frac{(-1)^n n}{2} R_{n+1,1}.$$

Таким образом,

$$Q_{1,n+1} = -R_{n+1,1} + \frac{(-1)^n n}{2} R_{n+1,1} = \left(\frac{(-1)^n n}{2} - 1 \right) R_{n+1,1} \begin{cases} = 0, & n = 2, \\ \neq 0, & n > 2. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение $Q_{1,n+1} = 0$ влечет $\partial_{u_n} \lambda = 0$ при $n > 2$, другими словами, $\lambda = \lambda(u_0, u_1, u_2)$. Случай $n = 2$ требует дальнейшего детального рассмотрения. Именно, здесь

$$\begin{aligned} Q_{04} &= 0 - R_{40} + \frac{(-1)^2}{2} R_{31} = -\frac{1}{2} R_{31} + \frac{(-1)^2}{2} R_{31} = 0, \\ Q_{03} &= 0 - R_{30} - \frac{1}{2} R_{21} + \frac{3}{2} D R_{31} = D R_{31} - R_{21}, \\ Q_{02} &= 0 - R_{20} + \frac{1}{2} (3D^2 R_{31} - 2D R_{21} + R_{11}) = \frac{3}{2} D (D R_{31} - R_{21}) = \frac{3}{2} D Q_{03}, \\ Q_{01} &= R_{01} - R_{10} + \frac{1}{2} (D^3 R_{31} - D^2 R_{21} + D R_{11} - R_{01}) = \frac{1}{2} D^2 Q_{03}, \\ Q_{13} &= 0 - R_{31} + R_{31} = 0, \\ Q_{12} &= 0 - R_{21} + \left(\frac{3}{2} D R_{31} - \frac{1}{2} R_{21} \right) = \frac{3}{2} Q_{03}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались формулами (3) и (6). Все остальные уравнения несущественны. Таким образом, единственным существенным уравнением является следующее уравнение: $Q_{03} = D R_{31} - R_{21} = 0$. Здесь

$$\begin{aligned} R_{31} &= \lambda \cdot \lambda_{u_2}, \quad D R_{31} = D \lambda \cdot \lambda_{u_2} + \lambda \cdot D \lambda_{u_2}, \quad R_{21} = \lambda \cdot \lambda_{u_1} + \frac{5}{2} D \lambda \cdot \lambda_{u_2}, \\ Q_{03} &= \lambda \cdot D \lambda_{u_2} - \frac{3}{2} D \lambda \cdot \lambda_{u_2} - \lambda \cdot \lambda_{u_1} = u_3 \left(\lambda \cdot \lambda_{u_2 u_2} - \frac{3}{2} \lambda_{u_2}^2 \right) + \tilde{Q}_{03}(u_0, u_1, u_2). \end{aligned}$$

Уравнение $\lambda \cdot \lambda_{u_2 u_2} - 3\lambda_{u_2}^2/2 = 0$ имеет общее решение $\lambda = (\phi u_2 + \psi)^{-2}$, функции $\phi, \psi(u_0, u_1) \in \mathcal{F}$ произвольные. Приведенное уравнение имеет вид

$$\tilde{Q}_{03} = \lambda \cdot (\lambda_{u_1 u_2} u_2 + \lambda_{u_0 u_2} u_1) - \frac{3}{2} (\lambda_{u_1} u_2 + \lambda_{u_0} u_1) \cdot \lambda_{u_2} - \lambda \cdot \lambda_{u_1} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{u_i} &= -2(\phi u_2 + \psi)^{-3} (\phi_{u_i} u_2 + \psi_{u_i}), \quad i = 0, 1, \quad \lambda_{u_2} = -2(\phi u_2 + \psi)^{-3} \phi, \\ \lambda_{u_i u_2} &= 2(\phi u_2 + \psi)^{-4} (3(\phi_{u_i} u_2 + \psi_{u_i}) \phi - (\phi u_2 + \psi) \phi_{u_i}), \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

После подстановки и ряда простых преобразований получаем окончательную форму этого уравнения:

$$\tilde{Q}_{03} = 2(\phi u_2 + \psi)^{-5} (\psi_{u_1} - \phi_{u_0} u_1) = 0.$$

Результирующее уравнение $\psi_{u_1} - \phi_{u_0} u_1 = 0$ имеет общее решение

$$\phi(u_0, u_1) = \chi_v(u, v)|_{u=u_0, v=u_1^2/2}, \quad \psi(u_0, u_1) = \chi_u(u, v)|_{u=u_0, v=u_1^2/2}, \quad (7)$$

где $\chi(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ есть произвольная гладкая функция.

Мы суммируем наши вычисления в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2 (ср. [7], [8]). Дифференциальный оператор $\Lambda(D) = \lambda D + D\lambda/2$, $\lambda \in \mathcal{F}$, является гамильтоновым тогда и только тогда, когда $\lambda = (\phi u_2 + \psi)^{-2}$, где функции $\phi, \psi(u_0, u_1) \in \mathcal{F}$ заданы формулами (7).

Список литературы

- [1] В. В. Жаринов, “Структуры Ли–Пуассона над дифференциальными алгебрами”, *ТМФ*, **192**:3 (2017), 459–472.
- [2] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [3] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, World Sci., Singapore, 1992.
- [4] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [5] В. В. Жаринов, “Эволюционные системы со связями в виде условий нулевой дивергенции”, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 3–16.
- [6] В. В. Жаринов, “О преобразовании Беклунда”, *ТМФ*, **189**:3 (2016), 323–334.
- [7] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, “Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры”, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:4 (1979), 13–30.
- [8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория”, *УМН*, **44**:6(270) (1989), 29–98.
- [9] М. О. Катанаев, “Векторные поля Киллинга и однородная и изотропная вселенная”, *УФН*, **186**:7 (2016), 763–775.
- [10] G. A. Alekseev, “Collision of strong gravitational and electromagnetic waves in the expanding universe”, *Phys. Rev. D*, **93**:6 (2016), 061501, 6 pp.
- [11] А. П. Чугайнова, В. А. Шаргатов, “Устойчивость структуры разрывов, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–де Фриза–Бюргерса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:2 (2016), 259–274.
- [12] А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова, “Исследование разрывов в решениях уравнений упругопластической среды Прандтля–Рейсса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:4 (2016), 650–663.
- [13] В. А. Васильев, “Локальные лакуны Петровского вблизи параболических особенностей волновых фронтов строго гиперболических уравнений в частных производных”, *Матем. сб.*, **207**:10 (2016), 4–27.
- [14] В. В. Козлов, “Об уравнениях гидродинамического типа”, *ПММ*, **80**:3 (2016), 294–303.
- [15] В. М. Бухштабер, “Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега–де Фриза”, *Тр. МИАН*, **294** (2016), 191–215.
- [16] В. П. Павлов, В. М. Сергеев, “Гидродинамика и термодинамика как единая полевая теория”, *Тр. МИАН*, **294** (2016), 237–247.
- [17] А. Г. Куликовский, А. П. Чугайнова, “Автомодельная задача о волнах в упругопластической среде Прандтля–Рейсса”, *Тр. МИАН*, **295** (2016), 195–205.
- [18] А. Т. Ильичев, А. П. Чугайнова, “Теория спектральной устойчивости гетероклинических решений уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса с произвольным потенциалом”, *Тр. МИАН*, **295** (2016), 163–173.
- [19] Г. А. Алексеев, “Интегрируемые и неинтегрируемые структуры в уравнениях Эйнштейна–Максвелла с абелевой группой изометрий G_2G_2 ”, *Тр. МИАН*, **295** (2016), 7–33.

Поступила в редакцию 22.05.2017