Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ё. Пак, О четырехмерной ковариантности диаграмм Фейнмана в гравитации Эйнштейна, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 2, 288–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:38:04

© 2018 г.

И. Ё. Пак*

О ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ КОВАРИАНТНОСТИ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА В ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА

Ранее было замечено, что физические состояния в терминах формализма Арновитта–Дезера–Мизнера в рамках четырехмерной теории гравитации Эйнштейна голографически упрощаются и могут быть описаны как трехмерные. Очевидно, при таком подходе возникает проблема с четырехмерной ковариантностью; выясняется, что таких проблем с ковариантностью две.

Рассмотрены методы решения этих проблем. Несмотря на то что нефизическое свойство следа флуктуации метрики известно давно, его никогда не рассматривали с точки зрения применения для вычисления диаграмм Фейнмана; правильные методы анализа следа с помощью фиксации калибровки являются ключом к решению скрытых проблем с ковариантностью. Что касается второй проблемы, то, как оказалось, можно провести ковариантную ренормировку в любом петлевом порядке на промежуточных шагах, что сохраняет четырехмерную ковариантность. Только на финальном этапе необходимо рассматривать трехмерные внешние физические состояния. При физических внешних состояниях эффективное одночастично-неприводимое действие становится трехмерным, а возможность ренормировки обеспечивается так же, как в трехмерном случае. Проведена однопетлевая двухточечная ренормировка, при которой пристальное внимание уделено следу флуктуации метрики. В частности, описана однопетлевая ренормировка постоянной Ньютона.

Ключевые слова: квантование гравитации, голография, метод фонового поля, четырехмерная ковариантность.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9404>

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение продолжительного времени предпринимался ряд попыток квантования гравитации [1]–[14], а поиск действительных степеней свободы в теории гравитации имеет длительную историю. Стоит отметить, что в статье [15] утверждается, что действительные динамические степени свободы гравитационного поля связаны

*Department of Applied Mathematics, Philander Smith College, Little Rock, Arkansas, USA.
E-mail: inyongpark05@gmail.com

с некоторыми гиперповерхностями рассматриваемого пространства-времени. Посвященные этой теме обсуждения можно найти в работах [16]–[18]. В настоящей работе ставится акцент на вычислительном аспекте метода квантования [19], а также помимо прочего показано, каким образом следует обращаться со следом флуктуации метрики при применении диаграмм Фейнмана теории возмущений.

Голографическое свойство также обсуждается в исследованиях 'т Хофта степеней свободы черной дыры и дуальностей типа АДС/КТП. Для более полного понимания дуальностей типа АДС/КТП и мотивации, лежащей в основе идей работы [20], в статье [21] предложена модификация метода размерной редукции – “размерная редукция к гиперповерхности расслоения”. Как правило, можно изучать секторы исходной теории, имеющие меньшие размерности, принудительно осуществляя редукцию теории к более низкой размерности (это утверждение верно и для размерной редукции к гиперповерхности расслоения, отличие лишь в том, что редукция проводится не принудительно, а порождается посредством фиксации калибровки). Формализм Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ), применяемый аналогично тому, как это сделано в работе [21], приводит к фиксации калибровки почти всех нефизических полей, что в свою очередь в статье [19] приводит к “спонтанной” (в отличие от проведенной принудительно) размерной редукции исходной теории к гиперповерхности. В отличие от проведенной принудительно редукции, в данном случае не происходит потери физических степеней свободы исходной теории, поскольку в рассмотрении по-прежнему находится весь физический сектор исходной теории в силу того, что спонтанная редукция порождается с помощью фиксации калибровки.

Что касается предложенного метода квантования [19], существуют и прочие подходы к квантованию, зависящие от степени ковариантности. При заимствовании из статьи [19] метода канонического оператора и соответствующего континуального интеграла возможно сохранение только трехмерной ковариантности. Очевидно, такой трехмерный подход порождает проблему, связанную с четырехмерной ковариантностью, которая является одной из двух проблем, рассматриваемых в настоящей работе. Несмотря на то что полноценное рассмотрение в терминах четырехмерной ковариантности является предметом будущих исследований, в настоящей работе используется “почти” ковариантный четырехмерный метод: степени свободы вне массовой поверхности четырехмерны, а физические состояния на массовой поверхности в явном виде трехмерны. Более точно, сначала мы вычисляем контрчлены функций Грина с помощью стандартного, но усовершенствованного метода фонового поля (МФП) и строим четырехмерное ковариантное эффективное одночастично-неприводимое действие. В дальнейшем мы рассматриваем амплитуды, в которых внешние состояния являются физическими, т. е. “трехмерными”. Эффективное действие, отвечающее таким амплитудам, можно получить при подстановке в исходное эффективное действие в качестве полей “трехмерных” физических полей.

Несмотря на то что МФП имеет продолжительную историю применений, некоторые сложности, возникающие при его использовании в теории гравитации, требуют дальнейшего исследования. В частности, тот факт, что не все гладко, был отмечен еще в работах [6], [22] (см. также статью [23]), в которых предложенный в работах [24]–[26] подход для калибровочно-инвариантного эффективного действия подробно изучен для одной петли (более подробное обсуждение приведено в п. 2.3). Далее следует отметить, что возможны другие, еще более простые улучшения метода при его применении в теории гравитации. При рассматриваемых условиях оказывается, что наличие следа флуктуации метрики порождает скрытый конфликт

с четырехмерной ковариантностью. При вычислении одночастично-неприводимого действия вне массовой поверхности мы применяем МФП таким образом, что четырехмерная ковариантность имеет место несмотря на то, что действие разложено в окрестности постоянной физической фоновой метрики (например, плоского пространства-времени). Общепринятый способ применения МФП приводит к нековариантным формам контрчлена; эта проблема освещена в литературе (см., например, работу [27]). Усовершенственная техника МФП является одним из новых¹⁾ результатов настоящей работы, его более точное описание приведено далее. Несмотря на то что МФП применяется данным образом для того, чтобы сохранить четырехмерную ковариантность, полученные контрчлены по-прежнему нельзя выразить в ковариантных терминах. Это патологическое свойство в явном виде демонстрируется в п. 3.1 и приложении Б. Выясняется, что в литературе существует важное упущение: ковариантность членов одночастично-неприводимого действия предполагается существующей и коэффициенты вычисляются исходя из этого. Анализ, проведенный в настоящей работе, показывает, что наличие ненулевого следа несовместимо с ковариантностью. Любопытным является тот факт, что данная сложность возникает в силу проблемы, обнаруженной довольно давно в статьях [31]–[33]: расходимости континуального интеграла из-за наличия следа флуктуации метрики. В методе, отличном от рассмотренного в работах [32], [33], применяется бесследовый пропагатор (его точное описание дано в п. 2.3) для работы с нефизической модой, а именно при наличии следа флуктуации метрики.

Статья имеет следующую структуру. Мы начинаем с обзора двух аспектов теории: определения физических состояний и МФП. В п. 2.1 рассмотрена редукция физических состояний без привлечения полного набора нелинейных калибровок де Дондера, а потому рассматриваемый метод является слегка улучшенной версией редукционных подходов из работы [19] или статьи [34]. Редукция физических состояний очевидным образом порождает проблему с четырехмерной ковариантностью, которая является одной из двух главных проблем, связанных с ковариантностью, исследованных в настоящей работе. Что касается МФП, обсуждаемого в пп. 2.2 и 2.3, особое внимание уделяется тому, каким образом ковариантный МФП изменяет диаграммы Фейнмана, связанные с действием, являющимся разложением в окрестности заданной фоновой метрики. Одна из ключевых характеристик нашего улучшенного МФП – “двойной” сдвиг, описанный формулой (5). Наш подход сравнивается с более ранними работами. Эти и вытекающие из них идеи продемонстрированы на примере однопетлевых двухточечных амплитуд [35]–[37]. Для ренормировки мы сначала применяем четырехмерный ковариантный метод вне массовой поверхности и подсчитываем эффективное действие вне массовой поверхности в разделе 3. Мы привлекаем бесследовый пропагатор для того, чтобы избавиться от второй проблемы с ковариантностью и для эффективного устранения следа флуктуации метрики. Как показано в п. 3.1, можно легко увидеть патологическое свойство следа, изучая ковариантность духового сектора (см. также приложение Б). Пока мы не наложим условия связи, которые до этого не принимались во внимание, можно получать различные четырехмерные ковариантные контрчлены. Когда фиксация калибровки уже учтена и использованы связи, определяющиеся функцией сдвига (shift vector)

¹⁾В действительности в целом аналогичная техника применяется в статьях [28]–[30], о чем мы узнали недавно.

и функцией хода (lapse function)²⁾, эффективное действие редуцируется к трехмерному, как показано в разделе 3.2. Наличие бесконечного количества связей становится несущественным, так как можно все их нивелировать при переопределении поля. Далее мы описываем ренормировку постоянной связи. Последний раздел содержит заключение и описание направлений будущих исследований.

2. ПОДГОТОВКА К ГОЛОГРАФИЧЕСКОМУ КВАНТОВАНИЮ

В настоящем разделе осуществляется подготовка к четырехмерному голографическому квантованию, которое описано в следующем разделе. Сначала мы проводим обзор более ранних работ [19], [34], [39], в которых определены физические состояния. Далее мы рассматриваем МФП, обращая особое внимание на то, как его следует применять при разложении действия в окрестности заданной фоновой метрики, чтобы сохранялась четырехмерная ковариантность. Особо отмечена необходимость применения бесследового пропагатора [19], [40]–[42] и техники двойного сдвига (5) (см. работы [28]–[30], [39]). Также решена задача³⁾, возникающая в статье [39], в которой однопетлевые контрчлены для действия, разложенного в окрестности плоской фоновой метрики, не выражались в ковариантных терминах. Ближе к концу раздела данный метод вычисления сравнивается с прочими методами, существующими в литературе.

Для лучшего понимания структуры работы полезно начать рассмотрение нашего подхода уже сейчас. Применяемый МФП является стандартным, но имеет усовершенствованную реализацию. При стандартном МФП в негравитационной теории рассматривается следующее разложение поля Ψ :

$$\Psi \equiv \psi_{\text{в}} + \psi, \quad (2)$$

где $\psi_{\text{в}}$, ψ – фоновое и квантовое поля, а флуктуационное поле ψ интегрируется для получения эффективного действия в терминах поля $\psi_{\text{в}}$. Таким образом, ковариантность сохраняется, что является большим преимуществом, например, при ренормировке.

Тем не менее в гравитационной теории существует дополнительная проблема (как показано ниже, из-за технических ограничений). Предположим, что рассматривается возмущение фиксированного физического фонового поля $g_{0\mu\nu}$ (например, плоского пространства-времени или пространства-времени черной дыры) и теория разложена в окрестности $g_{0\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} + g_{0\mu\nu}. \quad (3)$$

²⁾Метод фиксации калибровки из настоящей работы недавно был обобщен для фоновой метрики черной дыры [38].

³⁾Однопетлевые двухточечные контрчлены вычислены в статье [39] при следующем переопределении поля, представленном в работе [43]:

$$q^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}; \quad (1)$$

далее повторяется вычисление амплитуды/контрчлена [39] без переопределения поля. В одной из сносок в работе [39] приведены рассуждения о том, что, возможно, это переопределение поля и вызывает проблему. Но это не так: мы повторили анализ без привлечения переопределения (1) и пришли к той же проблеме. Основная идея устранения данной сложности заключается в применении МФП так, как показано далее в статье, а затем устранения следа флуктуации метрики.

При вычислении различных петлевых диаграмм возникают расходимости. Контрчлены можно определить при введении дополнительного сдвига

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + g_{\text{B}\mu\nu} \quad (4)$$

и интегрировании $h_{\mu\nu}$ по полям $g_{\text{B}\mu\nu}$ в качестве внешних линий. Именно таким образом однопетлевые контрчлены для двухточечных амплитуд были получены в статье [39] при плоском фоновом поле $g_{0\mu\nu}$. Контрчлены, как оказалось, не являются ковариантными, и, следовательно, их нельзя выразить в ковариантных терминах.

Для решения проблемы (см. также обсуждение после формулы (21)) применяется МФП при введении следующего сдвига [28]–[30], [39]:

$$g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} + (g_{\text{B}\mu\nu} + g_{0\mu\nu}), \quad (5)$$

где сумма $g_{\text{B}\mu\nu} + g_{0\mu\nu}$ считается единым членом, а флуктуация метрики $h_{\mu\nu}$ предполагается бесследовой, как подробно описано далее. Существуют две причины рассматривать сдвиг именно в таком виде. Во-первых, необходимо установить возможность ренормировки, а для этого нужна ковариантность фонового поля. Во-вторых, ренормировка гравитации включает в себя анализ возмущений заданного фонового поля, для которого опять-таки подходит наш усовершенствованный МФП. Другими словами, мы применяем МФП именно таким образом, поскольку нам необходимо одновременно достичь двух целей: осуществить ренормировку и провести анализ возмущений при заданном фоновом поле.

2.1. Определение физических состояний. В рамках любой теории определение физических состояний является основной частью процедуры квантования. Это особенно важно в нашем случае, так как мы собираемся сфокусировать свое внимание на диаграммах Фейнмана с физическими внешними линиями. Различные редукции действительных степеней свободы приведены в работах [15]–[18], и в каждом случае проводилось стандартное $(3 + 1)$ -разложение, когда время отделено от прочих координат. Например, в статье [15] показано, что пространственноподобную гиперповерхность, определенную с точностью до конформного множителя, можно принять за действительную степень свободы. В работах [16], [17] показано, что редуцированный гамильтониан можно задать через объем некоторой гиперповерхности после того, как была проведена редукция гамильтониана в классе четырехмерных многообразий с определенными топологическими ограничениями. Настоящая статья и связанные с ней работы [14], [19], [39], [44] не ограничиваются рассмотрением проблемы действительных степеней свободы, но также посвящены и проблеме квантования гравитации. В них также применяется $(3 + 1)$ -разложение, при котором отделяется одно из пространственных направлений. При квантовании приходится иметь дело со связями, которые определяются пространственными диффеоморфизмами, и с гамильтоновыми связями. Проблема решения ограничения типа диффеоморфизма являлась одним из основных препятствий в квантовании гравитации. В наших работах использовался лагранжев формализм, а эти связи мы называли связями типа вектора сдвига и функции смещения соответственно и решили их в явном виде. Смысл решения ограничения типа вектора сдвига показан в статьях [34], [44] с помощью теории расслоений. В данных работах для осуществления редукции устранялись нефизические степени свободы, связанные с внешними состояниями.

Одним из ключевых фактов при редукции являлось то, что остаточную трехмерную калибровочную симметрию можно привлечь для того, чтобы избавиться от нединамических полей, например функции смещения и вектора сдвига. Этот факт дополняет собой обычную процедуру фиксации калибровки в объеме. Подробно остаточная трехмерная симметрия обсуждается в работе [39].

В статье [19] было обнаружено, что физическое состояние пространства редуцируется к трехмерному в рамках классического анализа⁴⁾ (подобный линейный анализ приведен в более ранней работе [46]). Там же описано каноническое операторное квантование. Основываясь на математических соображениях, детально изложенных в статьях [34] и [44], мы склонны считать, что редукция физических состояний является свойством глобально гиперболического пространства-времени и не зависит от выбора калибровки. Рассмотрим анализ, проведенный в работе [19], изложив его несколько иначе (данный результат важен в следующем разделе). Рассмотрим четырехмерное действие Эйнштейна–Гильберта

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (6)$$

и квантование в рамках операторного формализма. Разделим координаты следующим образом:

$$x^\mu \equiv (y^m, x^3), \quad (7)$$

где $\mu = 0, 1, 2, 3$ и $m = 0, 1, 2$. Параметризуя четырехмерную метрику [47], [48] в виде $(3+1)$ -разложения, получаем равенства

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{mn} & N_m \\ N_n & n^2 + \gamma^{mn} N_m N_n \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^{mn} + N^m N^n / n^2 & -N^m / n^2 \\ -N^n / n^2 & 1 / n^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где n и N_m обозначают соответственно функцию смещения и вектор сдвига. Действие принимает вид

$$S = \int d^4x n \sqrt{-\gamma} (R^{(3)} + K^2 - K_{mn} K^{mn}), \quad (9)$$

а его вторая фундаментальная форма дается выражением

$$K_{mn} = \frac{1}{2n} (\mathcal{L}_{\partial_3} \gamma_{mn} - \nabla_m N_n - \nabla_n N_m), \quad K = \gamma^{mn} K_{mn}, \quad (10)$$

где через $\mathcal{L}_{\partial_3}$ обозначена производная Ли вдоль векторного поля ∂_{x^3} , а ∇_m – трехмерная ковариантная производная, построенная на основе γ_{mn} . Вектор сдвига

⁴⁾Может показаться, что это голографическое свойство отличается от дуальности типа АДС/КТП. Степени свободы калибровочной теории могут выглядеть чужеродными для исходной системы с гравитацией, в то время как степени свободы, дуальные в указанном смысле исходной теории гравитации, являются родственными по отношению к теории гравитации. Истинная разница между упомянутыми дуальностями состоит в том, что в нашем случае их можно увидеть непосредственно в том смысле, что их получение не требует никаких преобразований, в то время как в случае соответствия АДС/КТП калибровочные степени свободы проявляются после некоторого “процесса дуализации”, включающего в себя формализм Гамильтона–Якоби [20], [45].

и функция смещения являются нединамиическими, а их уравнения полей записываются как

$$\nabla_m (K^{mn} - \gamma^{mn} K) = 0, \quad (11)$$

$$R^{(3)} - K^2 + K_{mn} K^{mn} = 0. \quad (12)$$

След метрики уравнения полей имеет вид $R^{(4)} = R^{(3)} + K^2 - K_{mn} K^{mn} = 0$. Комбинируя это равенство с уравнением (12), получаем соотношение

$$R^{(3)} = 0 = K^2 - K_{mn} K^{mn}. \quad (13)$$

Второе равенство (13) приводит к равенству $K_{mn} K^{mn} = 0$, из которого в свою очередь вытекает, что

$$K_{mn} = 0 \quad (14)$$

после применения поворота Вика и выбора калибровки $K = 0$, $N_m = 0$. Резюмируя, заметим, что поскольку использованы все калибровочные степени свободы, число физических компонент фиксировано и равно двум до применения связи, определяющей функцией хода. Любая дополнительная связь, сокращающая количество независимых компонент, таким образом, возникает не из-за наложения связи, определяющей функцией хода. Единственный способ обеспечить эту ситуацию состоит в том, чтобы осуществить редукцию в рамках зависимых координат, и это приведет к тому, что член $K_{mn} K^{mn}$ станет “тождественно” равен нулю. Тогда вполне обоснованным будет переход в евклидово пространство с помощью поворота Вика; согласно результатам работ [19], [38] отсюда следует, что $K_{mn} = 0$. Таким образом, физические состояния глобального пространства-времени, допускающие подобный выбор калибровки, становятся трехмерными⁵⁾. Аналогичный результат получен некоторое время назад в статье [46] в рамках линейного подхода.

2.2. Вычисление контрчленов с помощью МФП. Несмотря на то что МФП обычно применяется для сохранения ковариантности на каждом шаге процедуры ренормировки, его применение не обязательно ограничивается только этой целью. Метод можно применять вне зависимости от наличия или отсутствия ковариантности (или выбора калибровки) для удобного вычисления эффективного действия (в особенности для вычисления контрчленов). Именно таким образом мы используем МФП в статье [39]. Тем не менее ковариантность является бесценным преимуществом при ренормировке. Ниже мы обсуждаем способы применения МФП таким образом, чтобы сохранить ковариантность даже после разложения действия в окрестности заданного фонового поля. Наши рассуждения приводят к решению проблемы, которая рассмотрена в статье [39] (в процессе мы учитываем еще один тонкий момент). Оглядываясь назад, мы понимаем, что в работе [39] мы решали проблему четырехмерной ковариантности, пользуясь формулировками, которые

⁵⁾Несмотря на то что равенство $K = 0$ следует из одной из четырех нелинейных компонент калибровки де Дондера, его можно представить как следствие выбора калибровки, не зависящего от калибровки де Дондера. Именно на квантовом уровне флуктуационных полей применяется поворот Вика; равенство $K_{mn} K^{mn} = 0$ допускает четырехмерные конфигурации на классическом уровне (здесь существует тонкость: решение Шварцшильда, например, не удовлетворяет равенству $K_{mn} K^{mn} = 0$). Эта проблема подробно рассмотрена в работе [38]). Более тонкий и обобщенный анализ материала данного пункта содержится в статье [49].

Рис. 1. $\lambda\zeta^3$ -Теория, МФП для нулевого вакуума.

скрывали сложности с ковариантностью. Обращаем внимание, что существует способ применения МФП для достижения обеих целей: сохранения ковариантности и эффективного вычисления контрчленов.

Упомянутая дополнительная тонкость обсуждалась в работах [31]–[33]. Несмотря на то что патологическое свойство, описанное авторами этих работ, не наблюдается в рамках стандартного МФП, оно также не проявляется в процессе петлевых вычислений и в настоящей работе⁶⁾. Проблема приводит к тому, что присутствие нефизических состояний влечет расходимость и нековариантность континуального интеграла. В нашей работе показано, что избавление от следа флуктуации метрики путем фиксации калибровки обеспечивает ожидаемую четырехмерную ковариантность на уровне эффективного одночастично-неприводимого действия вне массовой поверхности.

Продemonстрируем соответствующие проблемы, используя скалярную $\lambda\zeta^3$ -теорию. Пусть

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \zeta \partial^\mu \zeta - \frac{\lambda}{3!} \zeta^3. \quad (15)$$

При стандартном МФП контрчлены вычисляются с помощью сдвига

$$\zeta \rightarrow \zeta + \zeta_B. \quad (16)$$

После интегрирования ζ по фоновому полю ζ_B , используемому в качестве внешних линий (как показано, например, на рис. 1), получаем контрчлены для однопетлевой двухточечной диаграммы. Обращаем внимание на то, что полученные таким образом контрчлены можно использовать для устранения однопетлевой расходимости, порожденной возмущением в окрестности *нулевого вакуума* $\zeta = 0$.

Можно рассмотреть ненулевой постоянный⁷⁾ вакуум $\zeta = \zeta_0$ и разложить теорию (15) в его окрестности:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \zeta \partial^\mu \zeta - \frac{\lambda}{3!} (\zeta^3 + 3\zeta_0 \zeta^2 + 3\zeta_0^2 \zeta + \zeta_0^3). \quad (17)$$

⁶⁾В отличие от негравитационных случаев стандартное применение МФП становится проблематичным в силу того, что теория возмущений в окрестности нулевой метрики определена некорректно.

⁷⁾Постоянный вакуум рассматривается для простоты. Результаты работы по существу не зависят от предположения о постоянстве вакуума.

Рис. 2. $\lambda\zeta^3$ -Теория, МФП для ненулевого вакуума.

В лагранжиане возникает однопетлевая расходимость, вычисление контрчленов проводится посредством применения МФП. Осуществим сдвиг действия (17) относительно $\zeta = \zeta_B$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu (\zeta + \zeta_B + \zeta_0) \partial^\mu (\zeta + \zeta_B + \zeta_0) - \frac{\lambda}{3!} (\zeta + \zeta_B + \zeta_0)^3, \quad (18)$$

и проинтегрируем поле ζ по фоновому полю ζ_B , взятому в качестве внешних линий. Вычисления в работе [39] (и некоторых других более ранних работах) проводились аналогичным образом. Этот метод имеет недостаток: при его использовании проблема четырехмерной ковариантности остается “в тени”.

Теперь мы получили возможность применения МФП для эффективного вычисления контрчленов и для сохранения ковариантности даже при рассмотрении ненулевого фонового поля. Введем для удобства

$$\xi_B = \zeta_B + \zeta_0. \quad (19)$$

Тогда формулу (18) можно записать как

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu (\zeta + \xi_B) \partial^\mu (\zeta + \xi_B) - \frac{\lambda}{3!} (\zeta + \xi_B)^3. \quad (20)$$

Теперь предположим, что мы будем использовать выражение (18), но флуктуационное поле ζ будем интегрировать так, что поле $\zeta_B + \zeta_0$ становится внешним (этот случай, безусловно, можно рассматривать так, будто в формулы (16) и (20) вместо ξ_B подставлено $\zeta_B + \zeta_0$). Как показано на рис. 2, интегрирование скалярного поля по внешним полям ξ_B соответствует сумме трех диаграмм, на которых ζ_B , ζ_0 являются внешними линиями. Необходимость рассмотрения второй и третьей диаграмм в правой части рис. 2 очевидно следует из вида вершин в формуле (17).

Простое рассуждение о внешних линиях обеспечивает решение проблемы, поставленной в работе [39]. Рассмотрим интересующий нас объект – гравитационное действие. Сдвинем метрику следующим образом:

$$g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} + \tilde{g}_{B\mu\nu}, \quad \text{где} \quad \tilde{g}_{B\mu\nu} \equiv \varphi_{B\mu\nu} + g_{0\mu\nu}, \quad (21)$$

и проинтегрируем $h_{\mu\nu}$ по фоновому полю $\tilde{g}_{B\mu\nu}$ на внешних линиях (см. рис. 3). Полученное эффективное одночастично-неприводимое действие есть ковариантная функция от $\tilde{g}_{B\mu\nu}$ (которое тождественно равно $\varphi_{B\mu\nu} + g_{0\mu\nu}$) (поскольку в статье [39] анализ проводился иным образом, ковариантность не была учтена). Полученное действие было бы ковариантным в обычных, т. е. негравитационных, условиях. Тем не менее в гравитационном случае существует еще одна тонкость, связанная с присутствием нефизических мод, в частности следа флуктуации метрики. Его наличие

$$\varphi_B + g_0 \text{ --- } \text{star loop} \text{ --- } \varphi_B + g_0 = \varphi_B \text{ --- } \text{star loop} \text{ --- } \varphi_B + 2 \varphi_B \text{ --- } \text{star loop} \text{ --- } g_0 + g_0 \text{ --- } \text{star loop} \text{ --- } g_0$$

Рис. 3. МФП для однопетлевого гравитона (без указания индексов пространства-времени).

мешает существованию ковариантности, как показано ниже. Теорию возмущений можно применить, используя бесследовый пропагатор, который устраняет след, что по сути является фиксацией калибровки [38], для эффективного действия. Рассмотрим данное рассуждение детально.

2.3. Сравнение с существующими МФП. В силу того что МФП так часто используется, полезно провести краткое сравнение способа его использования в настоящей работе с некоторыми предыдущими способами его применения. Одно из основных преимуществ использования МФП – сохранение четырехмерной ковариантности, и, как будет показано ниже, наличие следа флуктуации метрики является препятствием для существования ковариантности.

Сначала укажем отличие идеи ковариантности от идеи независимости от выбора калибровки: эффективное действие можно выразить в терминах ковариантных полей, но оно при этом может зависеть от параметров, которые в свою очередь зависят от выбора калибровки. Было выдвинуто предложение применять МФП так, чтобы имела место независимость эффективного действия от выбора калибровки (см. работы [24]–[26] и ссылки в них). Тем не менее при дальнейших исследованиях [6], [22] обнаружилось, что некоторая степень зависимости от выбора калибровки сохраняется (другими словами, эффективное действие зависит от так называемой метрики конфигурационного пространства). В настоящей работе показано, что, как правило, эффективное действие не только зависит от выбора калибровки, но и не обладает ковариантностью: прямое вычисление с помощью диаграмм Фейнмана демонстрирует, что след, если его не устранить, влияет на четырехмерную ковариантность.

В литературе встречаются два наиболее распространенных способа вычисления членов эффективного действия, в частности контрчленов. Первый заключается в сохранении четырехмерной ковариантности членов и записи контрчленов в наиболее общей форме, которую позволяет многомерный анализ. Второй способ заключается в применении метода теплового ядра. Несмотря на то что эти методы весьма эффективны в негравитационных калибровочных теориях, проблема, связанная с наличием следа флуктуации метрики [31]–[33], [40]–[42] приводит к дополнительной задаче: устранению следа.

Обсудим, каким образом можно устранить след в рамках прямого метода диаграмм Фейнмана⁸⁾. Несмотря на то что применение усовершенствованного МФП

⁸⁾В целом аналогичная техника устранения следа работает и в случае четырехмерного ковариантного метода анзаца: численные коэффициенты ковариантных членов эффективного действия изменяются в силу отсутствия следа. Несмотря на то что представляется возможным провести вычисления методом теплового ядра так, чтобы устранить след флуктуации метрики, нам до сих пор неясно, как именно провести эту процедуру.

(которое привело к более глубокому пониманию проблемы, возникающей в работе [39], касающейся того, почему проведенный анализ оказался не подходящим для исследования четырехмерной ковариантности), как ожидалось, приведет к получению ковариантного эффективного действия, в результате эта цель *не была достигнута* (см. приложение Б и п. 3.1, где подробно рассмотрен данный вопрос). Корнем проблемы является предпетлевая расходимость, которая отмечена в статьях [31]–[33], вызванная присутствием нефизической калибровочной моды, следа флуктуации метрики. Несмотря на то что эта проблема возникает естественным образом, в литературе нет ясного понимания того, возникает ли, и если возникает, то где именно, подобная проблема при вычислении диаграмм Фейнмана. В настоящей работе возникновение данной проблемы рассмотрено в новом свете, наши рассуждения подробно изложены далее. Этой проблемы можно избежать: основным принципом решения является устранение нефизических степеней свободы: как только след флуктуации метрики выделен и устранен⁹⁾, появляется четырехмерная ковариантность.

Для того чтобы понять, как устранить след, начнем рассмотрение со стандартного пропагатора (т. е. имеющего след) в калибровке де Дондера, когда

$$\mathcal{L}_{\text{g.f.}} = -\frac{1}{2} \left(\partial_\rho \phi^{\mu\rho} - \frac{\partial^\mu \phi}{2} \right)^2.$$

Тогда

$$\langle \phi_{\mu\nu} \phi_{\rho\sigma} \rangle = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{ik^2}. \quad (22)$$

Теперь рассмотрим бесследовую флуктуацию метрики; этого можно достичь применением бесследового пропагатора. В явном виде введем бесследовое поле

$$\phi_{\mu\nu}^{\text{tl}} \equiv \phi_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \phi. \quad (23)$$

Тогда становится “бесследовым” следующий коррелятор [19]:

$$\langle \phi_{\mu\nu}^{\text{tl}}(x) \phi_{\rho\sigma}^{\text{tl}}(y) \rangle = \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{ik^2}. \quad (24)$$

Как можно легко убедиться, следа нет ни у члена с индексом $(\mu\nu)$, ни у члена с индексом $(\rho\sigma)$. Это именно то, что выше мы называли “бесследовым” пропагатором. В корреляционных вычислениях ниже действие переписано в терминах $\phi_{\mu\nu}^{\text{tl}}$ (верхний индекс “tl” далее мы опускаем) и ϕ , а также использован бесследовый коррелятор пары полей $\phi_{\mu\nu}^{\text{tl}}$. Мода ϕ со следом эффективно устранена.

⁹⁾Необходимость наложения условия бесследовости при калибровке де Дондера была ранее показана в работе [42] (см. также статьи [40], [41]), о чем авторы узнали недавно. Согласно подробному и тщательному анализу в более современной работе [38] устранения следа можно добиться с помощью фиксации калибровки.

3. ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ КОВАРИАНТНОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ ВНЕ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Поскольку мы обсудили все необходимые моменты теории, можно приступить к однопетлевой ренормировке. Не стоит обращать внимание на тот факт, что с ростом порядка петли возникает все больше контрчленов, но следует терпеливо вычислять контрчлены во всех порядках. Предположим, что получено четырехмерное ковариантное одночастично-неприводимое действие до нужного порядка. Тогда можно наложить условия связи физических состояний (в теории возмущений необходимо линеаризовать¹⁰⁾ уравнения связей, но сохранить их трехмерность). Полученное выражение содержит всю физическую информацию. Континуальное интегрирование вне массовой поверхности приводит к более сложному виду четырехмерного одночастично-неприводимого действия по сравнению с работами [19], [39], в которых вычисления осуществлялись на трехмерном уровне. Тем не менее эта дополнительная сложность исчезает при переопределении поля, которое проводится после наложения условий связи на эффективное действие.

Рассмотрим действие Эйнштейна

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (25)$$

где $\kappa^2 = 16\pi G$, G – постоянная Ньютона; коэффициент κ^2 в настоящем разделе опущен. Осуществляя сдвиг метрики по правилу

$$g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv \varphi_{\mu\nu} + g_{0\mu\nu}, \quad g_{0\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (26)$$

получаем равенство [37]¹¹⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sqrt{-\tilde{g}} \left(-\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\gamma h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\gamma h_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_\gamma h^\alpha_\alpha \tilde{\nabla}^\gamma h^\beta_\beta + h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} \tilde{R}^{\alpha\gamma\beta\delta} - \right. \\ \left. - h_{\alpha\beta} h^\beta_\gamma \tilde{R}^{\kappa\alpha\gamma}_\kappa - h^\alpha_\alpha h_{\beta\gamma} \tilde{R}^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \tilde{R} + \frac{1}{4} h^\alpha_\alpha h^\beta_\beta \tilde{R} + \dots \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Поля с тильдами являются фоновыми, духовое действие задано как

$$\mathcal{L}_{\text{gh}} = -\tilde{\nabla}^\nu \bar{C}^\mu \tilde{\nabla}_\nu C_\mu + \tilde{R}_{\mu\nu} \bar{C}^\mu C^\nu + \dots \quad (28)$$

Здесь и в формуле (27) удержаны лишь члены, относящиеся к одной петле.

3.1. Устранение следа метрики. Как было отмечено выше, некоторые авторы [31]–[33], [40]–[42] ранее обозначили проблему, вызванную присутствием нефизических компонент флуктуации метрики. Можно увидеть проявление этой проблемы в настоящей работе, если обратить пристальное внимание на кинетическую часть духового сектора

$$\mathcal{L}_{\text{gh}} = -\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}^\nu \bar{C}^\mu \tilde{\nabla}_\nu C_\mu. \quad (29)$$

¹⁰⁾ Аналогично тому, как это сделано в сноске в работе [50] (см. стр. 33, гл. 15).

¹¹⁾ В статье [37] принято соглашение, что $R_{\mu\nu} \equiv R^\kappa_{\mu\nu\kappa}$, а мы полагаем $R_{\mu\nu} \equiv R^\kappa_{\mu\kappa\nu}$. Следовательно, знак члена $h^\alpha_\alpha h_{\beta\gamma} \tilde{R}^{\beta\gamma}$ здесь отличается от знака в [37] (более того, кажется, что имеются опечатки в знаках последних двух членов соответствующего уравнения в [37]).

Рис. 4. Гравитонная петля (а), духовая петля (б) (индексы пространства-времени опущены).

Его вклад в эффективное действие, в частности в контрчлены, согласно ожиданиям должен выражаться в терминах, ковариантных относительно фонового поля. Как показано в настоящей работе, обычный анализ слишком формален и не позволяет должным образом решить проблему с патологической расходимостью, замеченной в работах [32] и [33]. Ниже показано, что наличие следа флуктуации метрики действительно вызывает неприятности: оно разрушает ковариантность.

Для вычисления контрчленов из формулы (29) необходимо исключить духовые поля, проинтегрировав их с полным пропагатором, связанным с $\tilde{g}_{B\mu\nu}$ в выражении (21). Вместо того чтобы пытаться единовременно провести все вычисления, можно в силу технических ограничений получить результат с помощью теории возмущений, подсчитывая континуальные интегралы по плоскому пространству-времени в нужном порядке. Другими словами, при вычислении результата с помощью теории возмущений, например с точностью до второго порядка полей, мы “прощупываем” полный результат с точностью до второго порядка (конечно, можно изучать и более высокие порядки). Для начала разложим метрику $\tilde{g}_{\mu\nu}$ в окрестности метрики плоского пространства-времени:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv \varphi_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}, \quad (30)$$

где опущен индекс B в члене $\varphi_{B\mu\nu}$. Кинетическое духовое действие (29) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gh}} = & - \left[\partial^\mu \bar{C}^\nu \partial_\mu C_\nu + \frac{1}{2} \varphi \partial^\mu \bar{C}^\nu \partial_\mu C_\nu - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda (-C_\lambda \partial^\mu \bar{C}^\nu + \bar{C}_\lambda \partial^\mu C^\nu) - \right. \\ & \left. - (\eta^{\nu\beta} \varphi^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\alpha} \varphi^{\nu\beta}) \partial_\beta \bar{C}_\alpha \partial_\nu C_\mu \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Можно вычислить контрчлены для диаграмм на рис. 4б. На наивном уровне можно ожидать, что результат обладает четырехмерной ковариантностью. Другими словами, можно ожидать, что результат имеет вид разложения по полям до второго порядка

$$a_1 \tilde{R}^2 + a_2 \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu}, \quad (32)$$

где a_1, a_2 – некоторые численные коэффициенты. Выясняется, что результат и в самом деле непредставим точно в таком виде: члены, содержащие след (т.е. $\varphi \equiv \eta^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}$), разрушают ковариантность. Если принять $\varphi = 0$, чего можно достигнуть при применении бесследового пропагатора, результат принимает ковариантную форму (32).

Далее мы излагаем подробно все детали. В пространстве геометрических координат искомый коррелятор записывается как

$$-\frac{1}{2} \left\langle \left[\int \frac{1}{2} \varphi \partial^\mu \bar{C}^\nu \partial_\mu C_\nu - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda (-C_\lambda \partial^\mu \bar{C}^\nu + \bar{C}_\lambda \partial^\mu C^\nu) - (\eta^{\nu\beta} \varphi^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\alpha} \varphi^{\nu\beta}) \partial_\beta \bar{C}_\alpha \partial_\nu C_\mu \right]^2 \right\rangle. \quad (33)$$

Его можно переписать, перегруппировывая члены, следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{(I)} &\equiv -\frac{1}{2} \int \int \left[\frac{1}{2} \varphi \eta^{\beta\nu} \eta^{\alpha\mu} - \eta^{\nu\beta} \varphi^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \varphi^{\nu\beta} \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} \varphi \eta^{\beta'\nu'} \eta^{\alpha'\mu'} - \eta^{\nu'\beta'} \varphi^{\mu'\alpha'} - \eta^{\mu'\alpha'} \varphi^{\nu'\beta'} \right] \times \\ &\quad \times \langle (\partial_\beta \bar{C}_\alpha \partial_\nu C_\mu) (\partial_{\beta'} \bar{C}_{\alpha'} \partial_{\nu'} C_{\mu'}) \rangle, \\ \text{(II)} &\equiv -\frac{1}{2} (2) \int \int \left[\frac{1}{2} \varphi \eta^{\beta\nu} \eta^{\alpha\mu} - \eta^{\nu\beta} \varphi^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \varphi^{\nu\beta} \right] \tilde{\Gamma}_{\mu'\nu'}^{\lambda'} \times \\ &\quad \times \langle (\partial_\beta \bar{C}_\alpha \partial_\nu C_\mu) (-\partial^{\mu'} \bar{C}^{\nu'} C_{\lambda'} + \partial^{\mu'} C^{\nu'} \bar{C}_{\lambda'}) \rangle, \\ \text{(III)} &\equiv -\frac{1}{2} \int \int \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu'\nu'}^{\lambda'} \langle (-\partial^\mu \bar{C}^\nu C_\lambda + \partial^\mu C^\nu \bar{C}_\lambda) (-\partial^{\mu'} \bar{C}^{\nu'} C_{\lambda'} + \partial^{\mu'} C^{\nu'} \bar{C}_{\lambda'}) \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Контрчлены можно выделить из расходящихся частей. Как мы обнаружили (как и в работе [39], мы применили пакет *xAct* 'xTensor' программы *Mathematica* для численных тензорных вычислений), верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{(I)} &\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{15} (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{30} \partial^2 \varphi (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^{\alpha\beta}) - \frac{1}{15} \partial^2 \varphi \partial^2 \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{15} \partial^2 \varphi^{\alpha\kappa} \partial_\kappa \partial_\sigma \varphi_\alpha^\sigma + \frac{17}{60} \partial^2 \varphi_{\mu\nu} \partial^2 \varphi^{\mu\nu} \right], \\ \text{(II)} &\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{2} \partial^2 \varphi_{\alpha\beta}(x) \partial^2 \varphi^{\alpha\beta} + \frac{1}{6} \partial^2 \varphi(x) \partial^2 \varphi - \frac{1}{6} \partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} \partial^2 \varphi \right], \\ \text{(III)} &\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{12} \partial^2 \varphi_{\alpha\beta}(x) \partial^2 \varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{6} (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^{\alpha\beta})^2 + \frac{1}{3} \partial^2 \varphi^{\alpha\kappa} \partial_\kappa \partial_\sigma \varphi_\alpha^\sigma \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где параметр ϵ связан с полной размерностью пространства-времени d равенством

$$d = 4 - 2\epsilon. \quad (36)$$

Полный контрчленный лагранжиан этого сектора задается суммой указанных вкладов:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{2}{15} \partial^2 \varphi_{\mu\nu} \partial^2 \varphi^{\mu\nu} + \frac{4}{15} \partial^2 \varphi^{\alpha\kappa} \partial_\kappa \partial_\sigma \varphi_\alpha^\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{30} (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{5} \partial^2 \varphi \partial_\alpha \partial_\beta \varphi^{\alpha\beta} + \frac{1}{10} \partial^2 \varphi \partial^2 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Полагая $\varphi = 0$, получаем, что

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{2}{15} \partial^2 \varphi_{\mu\nu} \partial^2 \varphi^{\mu\nu} + \frac{4}{15} \partial^2 \varphi^{\alpha\kappa} \partial_\kappa \partial_\sigma \varphi_\alpha^\sigma - \frac{1}{30} (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^{\alpha\beta})^2 \right]. \quad (38)$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} R^2 &\simeq \partial_\mu \partial_\nu \varphi^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \varphi^{\rho\sigma}, \\ R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} &\simeq \frac{1}{4} [\partial^2 \varphi^{\mu\nu} \partial^2 \varphi_{\mu\nu} - 2 \partial^2 \varphi^{\alpha\kappa} \partial_\kappa \partial_\sigma \varphi_\alpha^\sigma + 2 (\partial_\mu \partial_\nu \varphi^{\mu\nu})^2], \end{aligned} \quad (39)$$

перепишем выражение (38) в виде

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{8}{15} \tilde{R}_{\alpha\beta} \tilde{R}^{\alpha\beta} + \frac{7}{30} \tilde{R}^2 \right]. \quad (40)$$

3.2. Четырехмерные ковариантные однопетлевые контрчлены. В предыдущем пункте мы исследовали часть духового сектора для демонстрации того, каким образом описанная в работах [31]–[33] проблема возникает при непосредственных вычислениях. В настоящем пункте мы вычисляем контрчлены гравитонного сектора и оставшейся части духового сектора. Таким образом, мы получаем полное контрчленное действие (54) (см. ниже).

При разложении (27) мы получаем, что

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\gamma h^{\alpha\beta} \partial^\gamma h_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \partial_\gamma h_\alpha^\alpha \partial^\gamma h_\beta^\beta + \mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}} + \mathcal{L}_{\text{VIII}}, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{VI}} &= (2\eta^{\beta\beta'} \tilde{\Gamma}^{\alpha'\gamma\alpha} - \eta^{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}^{\alpha'\gamma\beta'}) \partial_\gamma h_{\alpha\beta} h_{\alpha'\beta'}, \\ \mathcal{L}_{\text{VII}} &= \left[\frac{1}{2} (\eta^{\alpha\alpha'} \eta^{\beta\beta'} \varphi^{\gamma\gamma'} + \eta^{\beta\beta'} \eta^{\gamma\gamma'} \varphi^{\alpha\alpha'} + \eta^{\alpha\alpha'} \eta^{\gamma\gamma'} \varphi^{\beta\beta'}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \varphi \eta^{\alpha\alpha'} \eta^{\beta\beta'} \eta^{\gamma\gamma'} - \frac{1}{2} \eta^{\gamma\gamma'} \eta^{\alpha'\beta'} \varphi^{\alpha\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(-\varphi^{\gamma\gamma'} + \frac{1}{2} \varphi \eta^{\gamma\gamma'} \right) \eta^{\alpha\beta} \eta^{\alpha'\beta'} \right] \partial_\gamma h_{\alpha\beta} \partial_{\gamma'} h_{\alpha'\beta'}. \end{aligned} \quad (42)$$

Эти вершины возникают из первой строки формулы¹²⁾ (27), а вершина $\mathcal{L}_{\text{VIII}}$ есть вторая строка:

$$\mathcal{L}_{\text{VIII}} = \left(h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} \tilde{R}^{\alpha\gamma\beta\delta} - h_{\alpha\beta} h_\gamma^\beta \tilde{R}^{\kappa\alpha\gamma}_\kappa - h_\alpha^\alpha h_{\beta\gamma} \tilde{R}^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \tilde{R} + \frac{1}{4} h_\alpha^\alpha h_\beta^\beta \tilde{R} + \dots \right). \quad (43)$$

Для получения полной однопетлевой двухточечной амплитуды необходимо рассмотреть следующий коррелятор:

$$\begin{aligned} \frac{i^2}{2} \langle (\mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}} + \mathcal{L}_{\text{VIII}})^2 \rangle &= \\ &= \frac{i^2}{2} (\langle (\mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}})^2 \rangle + 2 \langle (\mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}}) \mathcal{L}_{\text{VIII}} \rangle + \langle \mathcal{L}_{\text{VIII}}^2 \rangle). \end{aligned} \quad (44)$$

¹²⁾Различие между $\mathcal{L}_{\text{VI}}$ и $\mathcal{L}_{\text{VII}}$ введено для удобства при написании кода в программе *Mathematica*.

Можно убедиться, что очевидно ковариантный коррелятор $\langle \mathcal{L}_{\text{VIII}}^2 \rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\langle \left(h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} \tilde{R}^{\alpha\gamma\beta\delta} - h_{\alpha\beta} h_{\gamma}^{\beta} \tilde{R}^{\kappa\alpha\gamma}_{\kappa} - h_{\alpha}^{\alpha} h_{\beta\gamma} \tilde{R}^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \tilde{R} + \frac{1}{4} h_{\alpha}^{\alpha} h_{\beta}^{\beta} \tilde{R} \right)^2 \right\rangle = \\ & = -\frac{1}{2} \left\langle \left(h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} \tilde{R}^{\alpha\gamma\beta\delta} - h_{\alpha\beta} h_{\gamma}^{\beta} \tilde{R}^{\kappa\alpha\gamma}_{\kappa} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \tilde{R} \right)^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (45)$$

где первое равенство верно в силу использования бесследового пропагатора. Применяя факты из алгебры, получаем выражение

$$-\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-3\tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} - \tilde{R}^2 \right]. \quad (46)$$

Для двух других корреляторов мы проводим вычисления с использованием бесследового пропагатора; вычисления с использованием пропагатора с ненулевым следом проведено в одном из приложений¹³⁾. Первый коррелятор в правой части (44) имеет вид

$$-\frac{1}{2} \langle (\mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}})^2 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{23}{40} R^2 + \frac{37}{20} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \right]. \quad (47)$$

Второй коррелятор записывается как

$$-\frac{1}{2} 2 \langle (\mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}}) \mathcal{L}_{\text{VIII}} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} R^2. \quad (48)$$

Таким образом, полный гравитонный вклад дается выражением

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \langle (\mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}} + \mathcal{L}_{\text{VIII}})^2 \rangle &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[\left(-3 + \frac{37}{20} \right) \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} + \left(-1 - \frac{23}{40} + 1 \right) \tilde{R}^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{23}{20} \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{23}{40} \tilde{R}^2 \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Анализ духового сектора аналогичен анализу, проведенному выше. Полный духовый вклад можно было бы получить устранением при интегрировании по духовым полям с полным пропагатором. Вероятно, результат можно получить при использовании теории возмущений и вычислении континуальных интегралов по плоскому пространству-времени с точностью до нужного порядка. Например, с точностью до второго порядка можно вычислить следующий коррелятор с использованием пропагатора плоского пространства-времени:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\langle \left\{ \left[\frac{1}{2} \varphi \partial^{\mu} \bar{C}^{\nu} \partial_{\mu} C_{\nu} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} (\partial^{\mu} \bar{C}^{\nu} C_{\lambda} - \partial^{\mu} C^{\nu} \bar{C}_{\lambda}) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (\eta^{\nu\beta} \varphi^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\alpha} \varphi^{\nu\beta}) \partial_{\beta} \bar{C}_{\alpha} \partial_{\nu} C_{\mu} \right] - R_{\mu\nu} \bar{C}^{\mu} C^{\nu} \right\}^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (50)$$

¹³⁾ Отличие заключается в том, что использование пропагатора с ненулевым следом приводит к нековариантному результату, как показано в приложении Б.

Часть вычислений уже была проведена в предыдущем разделе. После выполнения нескольких громоздких шагов получаем, что

$$2 \left\langle \left[\frac{1}{2} \varphi \partial^\mu \bar{C}^\nu \partial_\mu C_\nu - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda (\partial^\mu \bar{C}^\nu C_\lambda - \partial^\mu C^\nu \bar{C}_\lambda) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\eta^{\nu\beta} \varphi^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\alpha} \varphi^{\nu\beta}) \partial_\beta \bar{C}_\alpha \partial_\nu C_\mu \right] R_{\mu\nu} \bar{C}^\mu C^\nu \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{3} \tilde{R}^2 \right] \quad (51)$$

и

$$-\frac{1}{2} \langle [R_{\mu\nu} \bar{C}^\mu C^\nu]^2 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}. \quad (52)$$

Полагая $\varphi = 0$, приходим к выражениям

$$(50) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{8}{15} \tilde{R}_{\alpha\beta} \tilde{R}^{\alpha\beta} + \frac{7}{30} \tilde{R}^2 + \frac{1}{3} \tilde{R}^2 + \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} \right] = \\ = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[\frac{7}{15} \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} + \frac{17}{30} \tilde{R}^2 \right]. \quad (53)$$

Таким образом, полные однопетлевые контрчлены заданы суммой формул (49) и (53):

$$\Delta \mathcal{L}_{1\text{loop}} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[\left(-\frac{23}{20} + \frac{7}{15} \right) \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} + \left(-\frac{23}{40} + \frac{17}{30} \right) \tilde{R}^2 \right] = \\ = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{41}{60} \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{120} \tilde{R}^2 \right]. \quad (54)$$

Этот результат отличается от известного результата работы [35] в силу уже перечисленных причин: текущий результат получен при использовании бесследового пропагатора, что в свою очередь было мотивировано желанием избежать проблемы, замеченной в статьях [31]–[33], посредством избавления от следа флуктуации метрики с помощью фиксации калибровки.

(

Ренормировка \$\$\$-матрицы)Ренормировка \$S\$-матрицы

В предыдущем разделе было установлено, что контрчлены однопетлевой двухточечной амплитуды можно выразить в терминах четырехмерных ковариантных величин тогда и только тогда, когда устранен след флуктуации метрики. Ренормировку можно провести вплоть до любого порядка лишь при рассмотрении физических внешних состояний, так как в этом случае тензоры Римана в эффективном действии редуцируются до трехмерных и выражаются в терминах трехмерных тензора и метрики Риччи. Если установлена возможность ренормировки, остается лишь аккуратно провести саму процедуру. Далее мы рассматриваем однопетлевую ренормировку метрики при помощи переопределения поля и однопетлевую ренормировку постоянной связи¹⁴⁾.

¹⁴⁾Для одной петли тензор Римана имеет вид $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$, и можно использовать хорошо известное равенство

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 = \text{полная производная.} \quad (55)$$

Возможность ренормировки устанавливается без использования редукции одночастично-неприводимого действия к трехмерному. Тем не менее этот факт является особенностью однопетлевого случая; для более высокого петлевого порядка необходимо прибегать к использованию редукции.

3.3. Редукция одночастично-неприводимого действия. В данном пункте мы обсуждаем один из важнейших этапов ренормировки более высокого петлевого порядка, а именно редукцию четырехмерного ковариантного эффективного действия к трехмерному. Одночастично-неприводимое действие в предыдущем разделе было получено при рассмотрении внешних состояний вне массовой поверхности. В случае негравитационной калибровочной теории не обязательно отделять ренормировку эффективного действия вне массовой поверхности от ренормировки S -матрицы, так как ее можно ренормализовать вне массовой поверхности в любом случае, но в гравитационной теории это не так. Покажем, что в теории гравитации Эйнштейна в рамках ковариантного подхода допускается ренормировка несмотря на то, что при рассмотрении только физических внешних состояний появляется бесконечное число контрчленов.

Рассмотрим физические внешние состояния; как упомянуто в п. 2.1, они являются трехмерными. Можно наложить различные условия связи на уровне эффективного одночастично-неприводимого действия (для этого может оказаться полезной общая теория поля, описанная в книге [51]). Несмотря на то что обсуждение можно продолжать на более абстрактном уровне редукции Лемана–Симанчика–Циммермана (ЛСЦ), например, как в работе [52], вместо этого мы рассмотрим частный случай.

Проиллюстрируем нашу идею, анализируя один из членов действия духового сектора (31)

$$- \eta^{\nu\beta} \varphi^{\mu\alpha} \partial_\beta \bar{C}_\alpha \partial_\nu C_\mu. \quad (56)$$

Расходимость однопетлевого двухточечного коррелятора этой вершины дается выражением

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 x_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 x_2}{(2\pi)^4} e^{-il_1 x_1} e^{-il_2 x_2} \langle h_{\mu\nu}(x_1) h_{\rho\sigma}(x_2) \rangle_{1\text{-loop div}} = \\ & = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 x_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 x_2}{(2\pi)^4} e^{-il_1 x_1} e^{-il_2 x_2} \langle h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} [\eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} \partial_\beta \bar{C}_\alpha \partial_\nu C_\mu]^2 \rangle = \\ & = \frac{1}{4} \frac{\delta(l_1 + l_2)}{(2\pi)^4} P_{\mu\nu}{}^{\kappa_1\kappa_2} P_{\rho\sigma\kappa_1\kappa_2} \frac{1}{l_1^2 l_2^2} (l_1^4), \end{aligned} \quad (57)$$

где l_1, l_2 обозначают 4-импульс вне массовой поверхности. Вклад в S -матрицу физической двухточечной амплитуды можно получить, устраняя внешние пропагаторы стандартной процедурой редукции ЛСЦ:

$$\Rightarrow \frac{1}{4} [2\pi\delta(0)] \frac{(2\pi)^3 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{(2\pi)^4} P_{mnr s} \vec{p}_1^2, \quad (58)$$

где (m, n, r, s) обозначают индексы трехмерной поляризации, а $\vec{p}_1$ суть 3-импульсы на массовой поверхности. Применяя МФП, получаем, что контрчлены имеют вид

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \langle [\eta^{\nu\beta} \varphi^{\mu\alpha} \partial_\beta \bar{C}_\alpha \partial_\nu C_\mu]^2 \rangle_{\text{loop}} = -\frac{1}{8} \int d^4 x \partial^2 \varphi^{\mu\nu}(x^\mu) \partial^2 \varphi_{\mu\nu}(x^\mu). \quad (59)$$

Рассмотрим редукцию координатной зависимости к трехмерной:

$$\Delta\mathcal{L}_{3D} = -\frac{1}{8} \int dx^0 \int d^3 x \partial^2 \varphi^{mn}(x^i) \partial^2 \varphi_{mn}(x^i), \quad (60)$$

где ∂^2 теперь является трехмерным. Можно легко убедиться, что вклад данного контрчленного действия в S -матрицу избавляет от необходимости, присутствующей в выражении (58) после поворота Вика (заметим, что $\int dx^0 = (2\pi) \delta(0)$ [50]).

3.4. Ренормировка посредством переопределения поля. Когда эффективное действие редуцировано до трехмерного, можно ренормировать метрику переопределением поля [53] (таким образом, в нашем случае возможность ренормировки достигается более сложным путем, чем обычно, так как здесь требуется переопределение поля, в котором нет необходимости при обычной ренормировке, когда требуются только сдвиги параметров). Для одной петли возможность ренормировки через переопределение поля обеспечивает равенство (55), как показано ниже. Рассмотрим выражение (25) и последующее переопределение метрики (опуская значки тильды):

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + c_1 \kappa^2 g_{\mu\nu} R + c_2 \kappa^2 R_{\mu\nu}; \quad (61)$$

действие принимает вид

$$\frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R \rightarrow \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(c_1 + \frac{1}{2} c_2 \right) R^2 - c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right]. \quad (62)$$

Таким образом, контрчлены (54) можно устранить при подходящем выборе c_1, c_2 :

$$c_1 + \frac{1}{2} c_2 = \frac{1}{240} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2}, \quad -c_2 = \frac{41}{120} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2}. \quad (63)$$

Из соотношений выше следует, что

$$c_1 = \frac{7}{40} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2}, \quad c_2 = -\frac{41}{120} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2}. \quad (64)$$

Для того чтобы установить возможность ренормировки более высокого петелевого порядка, следует применить аналогичные шаги в рамках трехмерного подхода¹⁵⁾. Более точно, после вычисления одночастично-неприводимого действия более высокого петлевого порядка вне массовой поверхности можно отделить ренормировку S -матрицы от ренормировки общих функций Грина вне массовой поверхности и свести задачу к предыдущей. Выбор лишь физических состояний в качестве внешних линий соответствует выбору трехмерных полей в эффективном действии, что согласуется со стандартной процедурой ЛСЦ. Все члены тензора Римана в эффективном действии сводятся к хорошо известным выражениям в терминах тензора и метрики Риччи. Другими словами, полное эффективное действие теперь можно

¹⁵⁾ Другими словами, редукция осуществляется согласно схеме (индекс “(3)” обозначает трехмерные величины)

$$R \rightarrow R^{(3)}, \quad R_{\mu\nu} \rightarrow R_{mn}^{(3)}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow R_{mnr\sigma}^{(3)}, \quad (65)$$

и используется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} R_{mnr\sigma}^{(3)} = & \left(R_{mr}^{(3)} - \frac{1}{4} R^{(3)} g_{mr}^{(3)} \right) g_{ns}^{(3)} - \left(R_{ms}^{(3)} - \frac{1}{4} R^{(3)} g_{ms}^{(3)} \right) g_{nr}^{(3)} + \\ & + \left(R_{ns}^{(3)} - \frac{1}{4} R^{(3)} g_{ns}^{(3)} \right) g_{ms}^{(3)} - \left(R_{nr}^{(3)} - \frac{1}{4} R^{(3)} g_{nr}^{(3)} \right) g_{ms}^{(3)}. \end{aligned} \quad (66)$$

Рис. 5. Трехточечные гравитонные амплитуды.

выразить с помощью трехмерных тензора и метрики Риччи. Таким образом, как и в работе [53], можно провести переопределение метрического поля для устранения контрчленов и, следовательно, доказать возможность ренормировки исходного четырехмерного действия.

3.5. Однопетлевая ренормировка κ . Определив контрчлены однопетлевых двухточечных амплитуд, приступим теперь к решению проблемы ренормировки постоянной связи. Контрчлены из формулы (54) также вносят свой вклад как контрчлены однопетлевых трехточечных амплитуд, показанных на рис. 5. Необходимо вычислить однопетлевые трехточечные расходимости и понять, достаточно ли влияние вышеупомянутых контрчленов для устранения данной расходимости (конечно же, следует принять во внимание и духовые петлевые диаграммы; однако с такими диаграммами тяжело работать даже при помощи компьютерного моделирования). Если неожиданно не происходит исчезновение расходимости, есть вероятность, что их окажется недостаточно. Тогда необходимо ренормализовать трехточечную вершину, вытекающую из самого действия Эйнштейна–Гильберта; это означает, что следует ренормализовать постоянную Ньютона.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

“Толографическое квантование” в терминах формализма АДМ в рамках четырехмерной теории гравитации Эйнштейна было предложено в работах [19], [39], [44]. В них было проведено точное определение гиперповерхности динамических степеней свободы при помощи формализма АДМ при нестандартном $(3+1)$ -разложении. Было предложено проводить ренормировку целиком в рамках трехмерной модели.

В настоящей работе с помощью подхода, основанного на четырехмерной ковариантности, установлена возможность ренормировки S -матрицы, основанная на редукции эффективного одночастично-неприводимого действия к трехмерному. Если рассматриваются только внешние физические состояния, все поля, включая тензор Римана, сводятся к трехмерным. Когда четырехмерный тензор Римана редуцирован до трехмерного, эффективное действие можно выразить в терминах трехмерных тензора и метрики Риччи, что дает возможность проведения ренормировки путем переопределения метрического поля. Трехмерный подход, предложенный в статьях [19], [39], и подход, основанный на четырехмерной ковариантности, до некоторого момента можно рассматривать как две различные ренормировки, как это сделано в настоящей работе. Можно предположить, что при применении к физическим величинам они дают одинаковые результаты.

Неудивительно, что четырехмерная ковариантность играет важную роль при установлении возможности ренормировки в данном контексте. Мы решили две различные проблемы, касающиеся инвариантности. Первая сложность была вызвана тем, что рассматривалось разложение в окрестности фиксированного фонового поля, и ковариантность можно восстановить, применяя усовершенствованный МФП. Ключевым моментом является то, что следующие две процедуры сдвига не эквивалентны. Первая процедура – это сдвиг $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, а затем осуществляется разложение действия. Далее проводится еще один сдвиг $h_{\mu\nu} \rightarrow \varphi_{\text{в}\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Этот подход является внутренне нековариантным, и именно так вычисления проведены в работе [39]. Второй подход (более подходящий с точки зрения сохранения ковариантности) состоит в том, чтобы разложить $g_{\mu\nu}$ как $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varphi_{\text{в}\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ и считать $\eta_{\mu\nu} + \varphi_{\text{в}\mu\nu}$ единым членом. Далее можно получить действие (27), но теперь рассматривая фоновую метрику не как $\eta_{\mu\nu} + \varphi_{\text{в}\mu\nu}$. Тогда контрчлены действительно принимают ковариантный вид.

Вторая трудность, связанная с ковариантностью, более очевидна: использование трехмерного подхода при описании четырехмерной физики приводит к проблеме с четырехмерной ковариантностью. Ключевой шаг для восстановления четырехмерной ковариантности состоит в том, что следует не налагать связи, определяющиеся функцией смещения и функцией хода, непосредственно на исходный лагранжиан, а формулировать их скорее как условия на физическое состояние, как только получено эффективное одночастично-неприводимое действие вне массовой поверхности. Тогда действие в континуальном интеграле принимает ковариантный вид. Редукция к трехмерному виду проводится на уровне одночастично-неприводимого действия, когда внешними линиями становятся физические состояния, которые трехмерны. Другими словами, интегрирование проводится полностью в рамках четырехмерной теории, но процедура редукции, связанная с амплитудами физических внешних состояний, приводит к переходу в трехмерную теорию.

В действительности далее возникает еще один вопрос. Он касается независимости от выбора калибровки. Дальнейшее обсуждение этого вопроса можно найти в статье [38]. Редукция к трехмерному виду, возможно, зависит от выбора калибровки. Можно ли провести редукцию при другом выборе калибровки? Если это так, иной выбор калибровки, вероятно, приведет к более высокому уровню ковариантности. По нашему мнению, этот вопрос в большой мере сводится к вопросу о естественности формализма АДМ. Как упомянуто в п. 2.1, редукцию классического решения к трехмерному виду можно провести с помощью решения уравнений поля без привлечения нелинейной калибровки де Дондера. Формализм АДМ абсолютно естествен при рассмотрении глобально гиперболического пространства-времени, а многие физически интересные пространства-времена действительно являются глобально гиперболическими. Тем не менее остается вопрос о том, возможно ли для сохранения более высокой степени ковариантности не решать условия связи точно, но наложить их в процессе редукции. Мы считаем, что подобный подход в лучшем случае столкнется с проблемами, перечисленными в статье [39], или более серьезными проблемами.

Одно из дальнейших направлений исследования – это каким образом можно в явном виде провести ренормировку постоянной связи (более предпочтительным является использование большего числа компонент процедуры БРСТ-квантования).

Другим направлением является продолжение анализа работ [19], [39] и настоящей работы в случае пространства-времени черной дыры¹⁶⁾. Мы планируем опубликовать результаты по данным вопросам в ближайшем будущем.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обозначения

Сигнатура метрики имеет вид

$$\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +). \quad (\text{A.1})$$

Все греческие индексы предполагаются четырехмерными:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{A.2})$$

а все латинские индексы трехмерны:

$$a, b, c, \dots, m, n, r, \dots = 0, 1, 2. \quad (\text{A.3})$$

Были использованы следующие сокращения:

$$\phi \equiv \eta_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu}, \quad \phi^\mu \equiv \partial_\kappa \phi^{\kappa\mu}. \quad (\text{A.4})$$

Четырехмерный гравитон и духовые пропагаторы заданы как

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\mu\nu}(x_1) \phi_{\rho\sigma}(x_2) \rangle &= P_{\mu\nu\rho\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{ik^2}, \\ \langle C_\mu(x_1) \bar{C}_\nu(x_2) \rangle &= \eta_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{ik^2} e^{ik(x_1-x_2)}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

где бесследовый пропагатор

$$P_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \right). \quad (\text{A.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Проблема, связанная с пропагатором с ненулевым следом

В основном тексте статьи было показано, что контрчлены оказываются ковариантными при использовании бесследового пропагатора. Напротив, использование пропагатора с ненулевым следом приводит к результатам, которые невозможно представить в ковариантном виде. Диагональный кинетический член дается выражением

$$-\frac{1}{2} \langle (\mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}})^2 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^2} \left[-\frac{7}{12} R^2 + \frac{11}{6} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{7}{12} (2R^2 \partial^2 \varphi + (\partial^2 \varphi)^2) \right]. \quad (\text{B.1})$$

Перекрестный член имеет вид

$$-\frac{1}{2} 2 \langle (\mathcal{L}_{\text{VI}} + \mathcal{L}_{\text{VII}}) \mathcal{L}_{\text{VIII}} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^2} \left[\left(4R^{\alpha\beta} \partial^2 \varphi_{\alpha\beta} + \frac{5}{3} R \partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} - \frac{8}{3} R \partial^2 \varphi \right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Ни тот, ни другой нельзя представить в ковариантном виде. Каждый член должен был быть ковариантным при отсутствии проблемы с ковариантностью: данная патология вызвана наличием ненулевого следа флуктуаций метрики.

¹⁶⁾ Это направление уже было исследовано, см. статью [38].

Благодарности. Автор благодарен К. Ли за гостеприимство во время визита в Korea Institute for Advanced Study в Сеуле. Автор также благодарен С. Сину за гостеприимство во время посещения Hanyang University, Сеул.

Список литературы

- [1] B.S. DeWitt, “Quantum field theory in curved spacetime”, *Phys. Rept.*, **19**:6 (1975), 295–357.
- [2] K.S. Stelle, “Renormalization of higher-derivative quantum gravity”, *Phys. Rev. D*, **16**:4 (1977), 953–969.
- [3] I. Antoniadis, E. T. Tomboulis, “Gauge invariance and unitarity in higher-derivative quantum gravity”, *Phys. Rev. D*, **33**:10 (1986), 2756–2779.
- [4] S. Weinberg, “Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation”, *General Relativity. An Einstein Centenary Survey*, eds. S. Hawking, W. Israel, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979, 790–831.
- [5] M. Reuter, “Nonperturbative evolution equation for quantum gravity”, *Phys. Rev. D*, **57**:2 (1998), 971–985, arXiv: hep-th/9605030.
- [6] S. D. Odintsov, “Does the Vilkovisky–De Witt effective action in quantum gravity depend on the configuration space metric?”, *Phys. Lett. B*, **262**:4 (1991), 394–397.
- [7] A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik, I. P. Karmazin, “The renormalization group for non-renormalizable theories: Einstein gravity with a scalar field”, *Phys. Rev. D*, **48**:8 (1993), 3677–3694, arXiv: gr-qc/9302007.
- [8] P. Van Nieuwenhuizen, “Supergravity”, *Phys. Rept.*, **68**:4 (1981), 189–398.
- [9] Z. Bern, J. J. Carrasco, L. J. Dixon, H. Johansson, R. Roiban, “Amplitudes and ultraviolet behavior of $\mathcal{N} = 8$ supergravity”, *Fortsch. Phys.*, **59**:7–8 (2011), 561–578, arXiv: 1103.1848.
- [10] A. Ashtekar, “New variables for classical and quantum gravity”, *Phys. Rev. Lett.*, **57**:18 (1986), 2244–2247.
- [11] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, arXiv: gr-qc/0110034.
- [12] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz, R. Loll, “Nonperturbative Quantum Gravity”, *Phys. Rept.*, **519**:4–5 (2012), 127–210, arXiv: 1203.3591.
- [13] G. Calcagni, “Introduction to multifractional spacetimes”, *AIP Conf. Proc.*, **1483** (2012), 31–53, arXiv: 1209.1110.
- [14] J. F. Donoghue, B. R. Holstein, “Low energy theorems of quantum gravity from effective field theory”, *J. Phys. G*, **42**:10 (2015), 103102, 46 pp., arXiv: 1506.00946.
- [15] J. W. York, Jr., “Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation”, *Phys. Rev. Lett.*, **28**:16 (1972), 1082–1085.
- [16] V. Moncrief, “Reduction of the Einstein equations in $(2 + 1)$ -dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller space”, *J. Math. Phys.*, **30**:12 (1989), 2907–2914.
- [17] A. E. Fischer, V. Moncrief, “Hamiltonian reduction of Einstein’s equations of general relativity”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **57**:1–3 (1997), 142–161.
- [18] F. Gay-Balmaz, T. S. Ratiu, “A new Lagrangian dynamic reduction in field theory”, *Ann. Inst. Fourier*, **60**:3 (2010), 1125–1160, arXiv: 1407.0263.
- [19] I. Y. Park, “Hypersurface foliation approach to renormalization of ADM formulation of gravity”, *Eur. Phys. J. C*, **75**:9 (2015), 459, 11 pp., arXiv: 1404.5066.
- [20] M. Sato, A. Tsuchiya, “Born–Infeld action from supergravity”, *Progr. Theoret. Phys.*, **109**:4 (2003), 687–707, arXiv: hep-th/0211074.
- [21] I. Y. Park, “Dimensional reduction to hypersurface of foliation”, *Fortsch. Phys.*, **62**:1–12 (2014), 966–974, arXiv: 1310.2507.

- [22] S. D. Odintsov, I. N. Shevchenko, “Gauge-invariant and gauge-fixing independent effective action in one-loop quantum gravity”, *Fortsch. Phys.*, **41**:8 (1993), 719–736; С. Д. Одинцов, И. Н. Шевченко, “Проблемы с калибровочно-инвариантным эффективным действием, не зависящим от выбора калибровки”, *ЯФ*, **55**:4 (1992), 1136–1145.
- [23] S. R. Huggins, G. Kunstatter, H. P. Leivo, D. J. Toms, “The Vilkovisky–de Witt effective action for quantum gravity”, *Nucl. Phys. B*, **301**:4 (1988), 627–660.
- [24] G. A. Vilkovisky, “The unique effective action in quantum field theory”, *Nucl. Phys. B*, **234**:1 (1984), 125–137.
- [25] E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin, “On the new definition of off-shell effective action”, *Nucl. Phys. B*, **234**:2 (1984), 509–523.
- [26] S. D. Odintsov, “The parametrization invariant and gauge invariant effective actions in quantum field theory”, *Fortsch. Phys.*, **38**:5 (1990), 371–391; С. Д. Одинцов, “Эффективное действие Вилковьского в квантовой гравитации с материей”, *ТМФ*, **82**:1 (1990), 66–74.
- [27] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP Publ., Bristol, 1992.
- [28] R. E. Kallosh, O. V. Tarasov, I. V. Tyutin, “One-loop finiteness of quantum gravity off mass shell”, *Nucl. Phys. B*, **137**:1–2 (1978), 145–163.
- [29] D. M. Capper, J. J. Dulwich, M. Ramon Medrano, “The background field method for quantum gravity at two loops”, *Nucl. Phys. B*, **254** (1985), 737–746.
- [30] I. Antoniadis, J. Iliopoulos, T. N. Tomaras, “One-loop effective action around de Sitter space”, *Nucl. Phys. B*, **462**:2–3 (1996), 437–452, arXiv: hep-th/9510112.
- [31] K. Kuchař, “Ground state functional of the linearized gravitational field”, *J. Math. Phys.*, **11**:12 (1970), 3322–3334.
- [32] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, M. J. Perry, “Path integrals and the indefiniteness of the gravitational action”, *Nucl. Phys. B*, **138**:1 (1978), 141–150.
- [33] P. O. Mazur, E. Mottola, “The path integral measure, conformal factor problem and stability of the ground state of quantum gravity”, *Nucl. Phys. B*, **341**:1 (1990), 187–212.
- [34] I. Y. Park, “Foliation, jet bundle and quantization of Einstein gravity”, *Front. Phys.*, **4** (2016), 25, 14 pp., arXiv: 1503.02015.
- [35] G. ’t Hooft, M. J. G. Veltman, “One-loop divergencies in the theory of gravitation”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A (N. S.)*, **20**:1 (1974), 69–94.
- [36] S. Deser, P. van Nieuwenhuizen, “One-loop divergences of quantized Einstein–Maxwell fields”, *Phys. Rev. D*, **10**:2 (1974), 401–410.
- [37] M. H. Goroff, A. Sagnotti, “The ultraviolet behavior of Einstein gravity”, *Nucl. Phys. B*, **266**:3–4 (1986), 709–736.
- [38] I. Y. Park, “Holographic quantization of gravity in a black hole background”, *J. Math. Phys.*, **57**:2 (2016), 022305, 16 pp., arXiv: 1508.03874.
- [39] I. Y. Park, “Lagrangian constraints and renormalization of 4D gravity”, *JHEP*, **04** (2015), 053, 30 pp., arXiv: 1412.1528.
- [40] V. I. Ogievetsky, I. V. Polubarinov, “Interacting field of spin 2 and the Einstein equations”, *Ann. Phys.*, **35**:2 (1965), 167–208.
- [41] N. Grillo, *Quantization of the graviton field, characterization of the physical subspace and unitarity in causal quantum gravity*, arXiv: hep-th/9911118.
- [42] T. Ortín, *Gravity and Strings*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [43] D. M. Capper, G. Leibbrandt, M. Ramón Medrano, “Calculation of the graviton self-energy using dimensional regularization”, *Phys. Rev. D*, **8**:12 (1973), 4320–4331.
- [44] I. Y. Park, “Quantization of gravity through hypersurface foliation”, arXiv: 1406.0753.
- [45] E. Hatefi, A. J. Nurmagambetov, I. Y. Park, “ADM reduction of IIB on $\mathcal{H}^{p,q}$ to dS braneworld”, *JHEP*, **04** (2013), 170, 24 pp., arXiv: 1210.3825.

- [46] A. Higuchi, “Quantum linearization instabilities of de Sitter spacetime. I”, *Class. Quantum Grav.*, **8**:1 (1991), 1961–1981.
- [47] R. L. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, “Republication of: The dynamics of general relativity”, *Gen. Rel. Grav.*, **40**:9 (2008), 1997–2027, arXiv:gr-qc/0405109.
- [48] E. Poisson, *A Relativist’s Toolkit. The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [49] I. Y. Park, “One-loop renormalization of a gravity-scalar system”, *Eur. Phys. J. C*, **77**:5 (2017), 337, 20 pp., arXiv:1606.08384.
- [50] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, v. II: *Modern Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [51] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **85**, Oxford Univ. Press, New York, 1996.
- [52] G. Sterman, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [53] G. ’t Hooft, “An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure”, *Nucl. Phys. B*, **62** (1973), 444–460.

Поступила в редакцию 19.05.2017,
после доработки 16.06.2017