Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Функциональные интегралы по гауссовской мере Боголюбова: точные асимптотики, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 2, 171–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 11:44:53

© 2018 г.

В. Р. Фаталов*

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ГАУССОВСКОЙ МЕРЕ БОГОЛЮБОВА: ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ

Доказаны теоремы о точных асимптотиках при $u \rightarrow \infty$ двух функциональных интегралов по мере Боголюбова μ_B вида

$$\int_{C[0,\beta]} \left[\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right]^u d\mu_B(x), \quad \int_{C[0,\beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x)$$

для значений $p = 4, 6, 8, 10$ при $p > p_0$, где $p_0 = 2 + 4\pi^2/\beta^2\omega^2$ – пороговое значение, β – обратная температура, ω – собственная частота гармонического осциллятора, $0 < \alpha < 2$. В качестве метода исследования использован метод Лапласа в гильбертовых функциональных пространствах для распределений почти наверное непрерывных гауссовских процессов.

Ключевые слова: мера Боголюбова, почти наверное непрерывные гауссовские процессы, метод Лапласа в гильбертовом функциональном пространстве, многообразие точек минимума.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9405>

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Гауссовский процесс Боголюбова – это стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, с нулевым средним и ковариационной функцией

$$B(t, s) := \mathbf{E}\xi(t)\xi(s) = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh}(\beta\omega/2)} \operatorname{ch}\left(\omega|t-s| - \frac{\beta\omega}{2}\right), \quad t, s \in [0, \beta],$$

где $m > 0$ – масса частицы, $\beta > 0$ – обратная температура, $\omega > 0$ – собственная частота гармонического осциллятора [1]. Как указано в работах [2], [3], траектории гауссовского процесса Боголюбова принадлежат почти наверное (п.н.) пространству $C^0[0, \beta]$ непрерывных на отрезке $[0, \beta]$ функций $x(t)$ с равномерной метрикой,

Работа над статьей выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-01-00050).

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vrfatalov@yandex.ru

удовлетворяющих условию $x(0) = x(\beta)$. Распределение μ_B процесса $\xi(t)$ в пространстве $C^0[0, \beta]$ называется гауссовской мерой Боголюбова. Ряд интересных утверждений, связанных с мерой Боголюбова, доказан в работах [2]–[6]. В результате непростых вычислений, проведенных в работе [7], оказалось, что условная версия процесса Боголюбова возникает также в ряде важных задач теории возмущений в квантовой механике (см. монографию [8]).

Настоящая работа основана на нашей предыдущей статье [3] и является ее развитием.

Мы доказываем теоремы о точных асимптотиках при $u \rightarrow \infty$ для следующих двух типов функциональных интегралов по мере Боголюбова:

$$\int_{C[0, \beta]} \left[\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right]^u d\mu_B(x), \quad \int_{C[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x), \quad (1.1)$$

где $0 < \alpha < 2$, $p = 4, 6, 8, 10$ и при этом $p > p_0 \equiv 2 + 4\pi^2/\beta^2\omega^2$. Существование критического значения p_0 было установлено в работах [2], [7], в статье [2] было также указано, что значение p_0 является пороговым в том смысле, что интегралы (1.1) имеют качественно разные точные асимптотики при $0 < p < p_0$ и при $p > p_0$. С физической точки зрения это означает, что в рассматриваемой физической системе при $p = p_0$ происходит фазовый переход. Математически это объясняется тем, что при $0 < p < p_0$ соответствующая экстремальная задача для функционала действия в методе Лапласа имеет всего два решения (одно из них строго положительное решение e_0 , другое центрально-симметричное ему решение $-e_0$, см. лемму 10 в работе [2]), в то время как при $p > p_0$ указанная задача имеет однопараметрическое двухсвязное многообразие решений: одна компонента связности – это многообразие M_0 , состоящее из одного класса строго положительных функций, другая компонента связности – это множество $-M_0$, которое центрально симметрично множеству M_0 (см. леммы 5, 6 в [3] и леммы 4, 8 настоящей работы). Видно, что в вышеприведенной математической интерпретации фазового перехода симметрия в определенном смысле сохраняется.

Отметим, что излагаемая ниже теорема 1 об асимптотиках первого типа функциональных интегралов будет полезна при вычислении точных асимптотик для коэффициентов разложения рядов теории возмущений в квантовой механике после фазового перехода при $p > p_0$.

Метод доказательства полученных в настоящей статье результатов – это метод Лапласа в функциональных пространствах для гауссовских мер, разработанный в статьях [9]–[11]. Многие утверждения мы, рассматривая случай $p > 2$, формулируем в достаточно общем виде; это сделано с целью возможного обобщения основных результатов статьи – теорем 1 и 2 – на другие значения параметра p .

Перейдем к точной формулировке полученных результатов. Как и в [2], [3], для фиксированного числа $2 < p < \infty$ введем следующие непрерывные функции:

$$J(\delta) \equiv J_p(\delta) := \int_\delta^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1-\delta^2}{1-\delta^p}(1-t^p) - (1-t^2)}}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (1.2)$$

$$M(\delta) \equiv M_p(\delta) := \int_\delta^1 \frac{t^p dt}{\sqrt{\frac{1-\delta^2}{1-\delta^p}(1-t^p) - (1-t^2)}},$$

Отметим, что подынтегральные функции в (1.2) имеют интегрируемые особенности при $t = \delta$ и $t = 1$. В лемме 5 из [2] доказаны следующие соотношения для $p > 2$:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} J_p(\delta) = +\infty, \quad \lim_{\delta \uparrow 1} J_p(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{p-2}}. \quad (1.3)$$

Доопределим функцию по непрерывности:

$$J_p(1) := \lim_{\delta \uparrow 1} J_p(\delta) = \frac{\pi}{\sqrt{p-2}}.$$

Положим

$$\mathcal{P} := \{p = 4, 6, 8, 10 \text{ и при этом } p > p_0\}.$$

Проводя дальнейшие исследования асимптотических свойств меры Боголюбова, автор обнаружил, что доказательство леммы 1 из [2] содержит неточность. В работе [3] дано новое строгое доказательство указанной леммы для значений $p \in \mathcal{P}$. Лемма 1 из [2] заново сформулирована и доказана в [3] в следующем виде.

ЛЕММА 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть фиксировано $p > 2 + 4\pi^2/\beta^2\omega^2$. Тогда уравнение

$$J_p(\delta) = \frac{\beta\omega}{2}, \quad 0 < \delta < 1, \quad (1.4)$$

имеет хотя бы один корень.

2. Для значений $p \in \mathcal{P}$ уравнение (1.4) имеет единственный корень, который мы обозначим через $\delta_0 \equiv \delta_0(p, \beta\omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Все результаты из раздела 1 статьи [2] остаются в силе, кроме логарифмических соотношений (1.18), (1.25), (1.43). Для множеств $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, определенных в формуле (5.12) из [2], выполнено равенство $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$, поскольку функция x_1 из (5.11) в [2] принадлежит $\mathcal{M}_0$. Таким образом, для значений $p \in \mathcal{P}$ минимизирующее многообразие $\mathcal{M}$ из леммы 10 в [2] имеет более простой вид: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup [-\mathcal{M}_0]$; см. также лемму 5 в работе [3].

В силу леммы 4 из [2] имеют место неравенства

$$\delta_0(4, \beta\omega) > \delta_0(6, \beta\omega) > \delta_0(8, \beta\omega) > \delta_0(10, \beta\omega).$$

Для $p \in \mathcal{P}$ положим

$$b_0 = b_0(p, \beta\omega) := \left(\frac{\beta\omega}{2M(\delta_0)} \right)^{1/p}, \quad h_0 := b_0\delta_0, \quad \delta_\infty := \frac{1}{\text{ch}(\beta\omega/2)}.$$

В силу леммы 12 из [2] для фиксированных $p \in \mathcal{P}$, $\beta > 0$, $\omega > 0$ справедливы неравенства $0 < \delta_\infty < \delta_0 < h_0 < 1 < b_0$. Определим также важный параметр (множитель Лагранжа)

$$\lambda_0 = \lambda_0(p, \beta\omega) := \beta^2\omega^2 \frac{b_0^2 - h_0^2}{2(b_0^p - h_0^p)} = \beta^2\omega^2 \frac{1 - \delta_0^2}{2(1 - \delta_0^p)b_0^{p-2}} > 0. \quad (1.5)$$

Пусть $\|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$, $p \geq 1$, обозначает норму в банаховом пространстве $L^p = L^p[0, 1]$ функций, интегрируемых в p -й степени на $[0, 1]$.

Для фиксированного $p \in \mathcal{P}$ введем функцию

$$\theta(s) \equiv \theta(s, p, \beta\omega) := \frac{1}{\beta\omega} \int_{\delta_0}^{s/b_0} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1-\delta_0^2}{1-\delta_0^p} (1-z^p) - (1-z^2)}}, \quad h_0 \leq s \leq b_0.$$

Функция $\theta(s)$ монотонно возрастает по $s \in [h_0, b_0]$, при этом

$$\theta(h_0) = 0, \quad \theta(b_0) = \frac{J(\delta_0)}{\beta\omega} = \frac{1}{2},$$

следовательно, однозначно определена обратная функция θ^{-1} . Положим

$$x_0(t) := \theta^{-1}(t), \quad t \in [0, 1/2]. \quad (1.6)$$

Распространим функцию $x_0(t)$ на весь отрезок $[0, 1]$ симметричным образом:

$$x_0(t) = x_0(1-t), \quad t \in [1/2, 1]. \quad (1.7)$$

Очевидно, функция $x_0(t)$ является строго положительной, она монотонно возрастает при $t \in [0, 1/2]$, причем $x_0(0) = h_0$ и $x_0(1/2) = b_0$. Таким образом, для всех значений $t \in [0, 1]$ выполнены неравенства $0 < h_0 \leq x_0(t) \leq b_0$. Из результатов статьи [2] следует, что функция $x_0(t)$ дважды дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяет нелинейной граничной задаче

$$\begin{aligned} x''(t) &= \beta^2 \omega^2 x(t) - \lambda_0 p x^{p-1}(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1) = h_0, & x'(0) = x'(1) = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

при этом $x'_0(1/2) = 0$ и $\|x_0\|_p = 1$.

Введем функции

$$f_0(t) = \frac{x_0(t)}{\|x_0\|_2}, \quad f_1(t) = \frac{x'_0(t)}{\|x'_0\|_2}, \quad t \in [0, 1]. \quad (1.9)$$

Для формулировки основного результата нам понадобится следующее предложение. Ниже ν – спектральный параметр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть фиксировано $p \in \mathcal{P}$. Самосопряженная граничная задача на собственные числа для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} -z''(t) + \beta^2 \omega^2 z(t) &= \frac{p(1-p)\lambda_0}{\nu} x_0^{p-2}(t) z(t), & t \in [0, 1], \\ z(0) &= z(1), & z'(0) = z'(1), \end{aligned} \quad (1.10)$$

имеет последовательность собственных чисел $\{\nu_n\}_{n=0}^\infty$ следующего вида:

$$\nu_0 = 1 - p < -1 = \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \leq \nu_4 < \dots < 0, \quad (1.11)$$

при этом $\sum_{n=0}^\infty |\nu_n| < \infty$. Собственному числу $\nu_0 = 1 - p$ отвечает L^2 -нормированная положительная собственная функция $f_0(t)$, собственному числу $\nu_1 = -1$ соответствует L^2 -нормированная собственная функция $f_1(t)$ из (1.9), собственным числам ν_k , $k = 2, 3, \dots$, соответствуют L^2 -нормированные собственные функции $f_k(t)$, и при этом система $\{f_k(t)\}_{k=0}^\infty$ образует ортонормированный базис в L^2 .

Предложение 1 вытекает из предложения 1 работы [3], в котором нужно положить $\mu = -\nu/\lambda_0$, $\mu_n = -\nu_n/\lambda_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Первый основной результат настоящей работы связан с интегралами первого типа из формулы (1.1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы числа $m > 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$ и $p \in \mathcal{P}$. Тогда для стационарного гауссовского процесса Боголюбова $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, при $u \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \int_{C^0[0, \beta]} \left[\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right]^u d\mu_B(x) &\equiv \mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right]^u = \\ &= \left(\frac{\beta u}{m} \right)^{up/2} \beta^u \exp \left\{ -\frac{up}{2} (1 + \ln \lambda_0) \right\} \sqrt{u} C_1 (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.12)$$

при этом постоянная $C_1 = C_1(p, \beta\omega) > 0$ записывается следующим образом:

$$C_1 = \frac{\|x'_0\|_2^2 \sqrt{2\beta\omega \operatorname{sh}(\beta\omega/2)}}{\sqrt{\pi\lambda_0 C_2}} \left[\prod_{k=2}^{\infty} (1 + \nu_k) \right]^{-1/2}, \quad (1.13)$$

где

$$C_2 = C_2(p, \beta\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{ch} \left(\beta\omega |t - s| - \frac{\beta\omega}{2} \right) x'_0(t) x'_0(s) dt ds > 0. \quad (1.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для $p \in \mathcal{P}$ положим

$$C_0 = C_0(p, \beta\omega) = 2\lambda_0 b_0^p - \beta^2 \omega^2 b_0^2 < 0.$$

Отметим, что постоянные C_1 , C_2 , C_0 (как и величины δ_0 , h_0 , b_0 , λ_0) зависят только от p и произведения $\beta\omega$, но не зависят от массы m . Несложно доказать, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} \|x_0\|_2^2 &= \int_0^1 x_0^2(t) dt = \frac{\lambda_0(p+2) - C_0}{2\beta^2\omega^2}, \\ \|x'_0\|_2^2 &= \int_0^1 [x'_0(t)]^2 dt = \frac{\lambda_0(p-2) + C_0}{2}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для $p \in \mathcal{P}$ утверждение теоремы 1 уточняет п. 4 теоремы 5 из работы [2], где была вычислена только логарифмическая асимптотика математического ожидания в (1.12).

Второй основной результат настоящей работы связан с интегралами второго типа из формулы (1.1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы числа $m > 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$, $p \in \mathcal{P}$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда для стационарного гауссовского процесса Боголюбова $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, при $u \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) &\equiv \mathbf{E} \exp \{ u \|\xi\|_p^\alpha \} = \\ &= K_1 \exp \{ q_1 u^{2/(2-\alpha)} \} u^{1/(2-\alpha)} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$q_1 = q_1(p, \alpha) = \frac{2 - \alpha}{2} \left(\frac{\alpha \beta^{(2+p)/p}}{\lambda_0 p m} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} > 0,$$

$$K_1 = \frac{2 \|x'_0\|_2^2 \sqrt{\beta \omega \operatorname{sh}(\beta \omega / 2)}}{\sqrt{(2 - \alpha) \pi C_2}} \left(\frac{\alpha}{\lambda_0 p} \right)^{1/(2-\alpha)} \left(\frac{\beta^{(p+2)/p}}{m} \right)^{\alpha/[2(2-\alpha)]} \left[\prod_{k=2}^{\infty} (1 + \nu_k) \right]^{-1/2}, \quad (1.16)$$

а постоянная $C_2 = C_2(p, \beta \omega)$ задана в формуле (1.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для $p \in \mathcal{P}$ утверждение теоремы 2 уточняет пункт 4 теоремы 1 из [2], где была вычислена только логарифмическая асимптотика математического ожидания в (1.15).

2. ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ ГАУССОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ: МНОГООБРАЗИЕ ТОЧЕК МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ

Следуя работам [3], [9], изложим один общий результат об асимптотиках гауссовских интегралов в функциональном гильбертовом пространстве. При помощи этого результата мы докажем теоремы 1 и 2. Необходимые сведения о гауссовских мерах в банаховых пространствах можно найти в обзорной статье [11], книгах [12]–[15] и указанной там литературе.

Пусть $L^2 \equiv L^2[0, 1]$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых действительных измеримых функций на $[0, 1]$ со скалярным произведением и нормой

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_0^1 x^2(t) dt \right)^{1/2}, \quad x, y \in L^2[0, 1].$$

Пусть $C[0, 1]$ – банахово пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций с нормой $\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$. Ниже $\operatorname{Dom}(K)$ обозначает область определения оператора K , $\operatorname{Ran}(K)$ – область его значений, тождественные операторы в различных пространствах обозначаются одним и тем же символом I . Линейный оператор $K: L^2 \rightarrow L^2$ называется симметричным, если $\langle Kg, h \rangle = \langle Kh, g \rangle$ для всех $h, g \in L^2$. Если числовая функция $S: L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема по Фреше в точке $x \in L^2$ (см. [16]), то ее первую и вторую производные по Фреше в точке x мы обозначаем через $S'(x)$ и $S''(x)$. При этом мы рассматриваем производные $S'(x)$ и $S''(x)$ как ограниченные линейные операторы из L^2 в $\mathbb{R}$ и из L^2 в L^2 соответственно и пишем

$$S'(x)[h] = \langle h, S'(x) \rangle, \quad S''(x)[h, v] = \langle h, S''(x)v \rangle, \quad h, v \in L^2. \quad (2.1)$$

В правой части первого равенства (учитывая общий вид непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве) мы полагаем, что $S'(x) \in L^2$.

Пусть P_A – гауссовская мера в гильбертовом пространстве $L^2[0, 1]$, сосредоточенная на $C[0, 1]$, т. е.

$$P_A(C[0, 1]) = 1. \quad (2.2)$$

Предположим, что мера P_A имеет нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор $A: L^2 \rightarrow L^2$. Используя сведения, изложенные в книгах [12], [13], можно показать, что при сформулированных выше условиях справедливо включение $\operatorname{Ran}(A) \subset C[0, 1]$. Предположим, что выполнены следующие условия.

A1. Пусть f и F – непрерывные действительные функции, заданные на L^2 , такие что их сужения $f|_{C[0,1]}$ и $F|_{C[0,1]}$ на $C[0, 1]$ непрерывны и для некоторых постоянных $d_1 > 0$, $d_2 \geq 0$, $d_3 \geq 0$, $d_4 \geq 0$, $0 < \alpha < 2$ выполнены неравенства

$$|f(x)| \leq d_1 \exp\{d_2 \|x\|_\infty^\alpha\}, \quad F(x) \geq -d_3 \|x\|_\infty^\alpha - d_4, \quad x \in C[0, 1]. \quad (2.3)$$

A2. Минимум по $x \in \text{Ran}(A)$ функционала $\Lambda(x) := F(x) + \langle x, A^{-1}x \rangle/2$ равен Λ_0 и достигается на одномерном компактном дважды дифференцируемом многообразии M .

Таким образом, $M \subset \text{Ran}(A) \subset C[0, 1]$ и $\Lambda(x) = \Lambda_0$ для всех $x \in M$. Обозначим через $n_x \in L^2$ единичный касательный вектор к кривой M в точке x , через $\widehat{M}_x$ – одномерное аффинное пространство, натянутое на вектор n_x и содержащее точку x (т. е. одномерное касательное пространство к M в точке x), см. книги [16], [17]. Тогда $M_x := \widehat{M}_x - x$ представляет собой одномерное подпространство в L^2 , содержащее точку 0. Как это принято, мы будем рассматривать единичные касательные векторы как свободные, поэтому выходящий из нуля единичный вектор, на который натянуто подпространство M_x , мы также будем обозначать через n_x .

Разложим гильбертово пространство L^2 в прямую сумму: $L^2 = M_x \oplus N_x$, где N_x – ортогональное дополнение подпространства M_x коразмерности единица [18]. Введем следующие два условия.

A3. В пространстве L^2 существует окрестность U_0 многообразия M такая, что в точках $x \in U_0 \cap C[0, 1]$ функция $f(x)$ дифференцируема по Фреше, функция $F(x)$ трижды дифференцируема по Фреше и выполнено условие невырожденности: для всех $x \in M$ имеет место неравенство

$$\langle y, [A^{-1} + F''(x)]y \rangle > 0, \quad 0 \neq y \in N_x \cap \text{Dom}(A^{-1}). \quad (2.4)$$

Здесь согласно (2.1) $F''(x): L^2 \rightarrow L^2$ есть ограниченный линейный оператор.

A4. Для меры Лебега mes на кривой M выполнено условие

$$\text{mes}\{x \in M: f(x) \neq 0\} > 0.$$

Для каждого фиксированного $x \in M$ выберем некоторый ортонормированный базис $\{e_k^x\}_{k=0}^\infty$ в гильбертовом пространстве L^2 так, что

$$e_0^x = n_x. \quad (2.5)$$

Пусть $L(x): L^2 \rightarrow L^2$ – линейный оператор, имеющий в базисе $\{e_k^x\}_{k=0}^\infty$ следующее матричное представление:

$$L(x) = \begin{bmatrix} 0 & n_x \\ An_x & I + AF''(x) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) понимается в следующем координатном смысле. Элемент $n_x = e_0^x = (1, 0, 0, \dots) \in L^2$ записывается как вектор-строка своих координат, элемент $An_x \in L^2$ записывается в виде вектор-столбцов, (вообще говоря, недиагональный) оператор $I + AF''(x): L^2 \rightarrow L^2$ записывается как матрица в базисе $\{e_k^x\}_{k=0}^\infty$. Матрица $L(x)$ состоит из этих блоков и числа 0, стоящего в верхнем левом углу.

Несложно показать, что неравенство (2.4) эквивалентно условию

$$\det L(x) \neq 0 \quad \text{для всех } x \in M. \quad (2.7)$$

Положим

$$c(x) = |\det L(x)|^{-1/2}, \quad x \in M. \quad (2.8)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть P_A – гауссовская мера в гильбертовом пространстве L^2 , удовлетворяющая условию (2.2) и имеющая нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия **A1–A4**. Тогда при $u \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_{C[0,1]} f(x) e^{-u^2 F(x)} dP_A(ux) &= \int_{L^2[0,1]} f(x) e^{-u^2 F(x)} dP_A(ux) = \\ &= e^{-\Lambda_0 u^2} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \int_M f(x) c(x) dV_M(x) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $c(x)$ задано в (2.8), dV_M – элемент длины на кривой M .

Первое равенство в формуле (2.9) вытекает из условия (2.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 3 предназначена для вычисления точных асимптотик гауссовских интегралов в функциональном гильбертовом пространстве L^2 в том распространенном случае, когда мера P_A является распределением в L^2 гауссовского п. н. непрерывного случайного процесса. Очевидно, в этом случае выполнено условие (2.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорема 3 представляет собой модификацию теоремы 1 из статьи [10]. Отметим три отличия в формулировках этих двух теорем. В работе [10] рассмотрен случай абстрактного сепарабельного гильбертова пространства H и общей гауссовской меры на нем, в нашей теореме 3 присутствуют интегралы в функциональном гильбертовом пространстве L^2 по гауссовской мере P_A , сосредоточенной на пространстве $C[0, 1]$. При этом наше условие **A3** значительно слабее соответствующего условия из [10] о бесконечной дифференцируемости функции F на всем гильбертовом пространстве H . Кроме того, форма записи (2.8) функции $c(x)$ через детерминант $L(x)$ отсутствует в [10], но при этом сама формула (2.8) получена на основе формулы (1.13) из [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Довольно часто оператор $AF''(x)$ и множество M обладают некоторыми свойствами симметрии (подробное определение можно найти в работе [10], см. также [11]). В такой ситуации значение функции $c(x)$ равно одному и тому же числу c для всех точек $x \in M$ и, если $f \equiv 1$, мы имеем $\int_M c(x) dV_M(x) = c \cdot \text{mes}(M)$, где $\text{mes}(M)$ – длина кривой M . Именно такой случай возникает при доказательстве теорем 1 и 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Элементы базиса e_k^x , $k = 2, 3, \dots$, целесообразно выбирать таким образом, чтобы матричное представление оператора $I + AF''(x)$ в базисе $\{e_k^x\}_{k=0}^\infty$ имело наиболее простой вид.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В силу масштабного свойства процесса Боголюбова (см. лемму 19 в работе [2]) для любых значений $p > 0$, $u > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right]^u = \left(\frac{\beta}{m} \right)^{up/2} \beta^u \mathbf{E} \left[\int_0^1 |\eta(t)|^p dt \right]^u, \quad (3.1)$$

где $\eta(t) = (\sqrt{m}/\sqrt{\beta})\xi(\beta t)$, $t \in [0, 1]$, – гауссовский процесс Боголюбова на отрезке $[0, 1]$ с параметрами $(1, 1, \omega_1)$, $\omega_1 = \beta\omega$. Таким образом, в силу формулы (3.1) нам достаточно доказать вариант теоремы 1 для процесса Боголюбова $\eta(t)$ с большим параметром $u \rightarrow \infty$. Доказательство этого варианта теоремы 1 мы проведем при помощи теоремы 3. Обозначим через μ_η распределение процесса $\eta(t)$ в пространстве $C^0[0, 1] \subset C[0, 1]$.

Мы будем рассматривать гауссовскую меру μ_η , полагая ее заданной в пространстве $L^2[0, 1]$, имея при этом в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, 1]$. Как известно, в этом случае мера μ_η имеет нулевое среднее и ковариационный оператор $A_\eta: L^2 \rightarrow L^2$ интегрального типа:

$$A_\eta x(t) = \int_0^1 [\mathbf{E}\eta(t)\eta(s)]x(s) ds = \frac{1}{2\omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1/2)} \int_0^1 \operatorname{ch}\left(\omega_1|t-s| - \frac{\omega_1}{2}\right)x(s) ds \quad (3.2)$$

для $x \in L^2$. Пусть $C^2[0, 1]$ – множество дважды дифференцируемых на $[0, 1]$ функций. Как указано в лемме 7 из [2], область значений ковариационного оператора A_η имеет вид

$$\operatorname{Ran}(A_\eta) = \{x \in C^2[0, 1]: x(0) = x(1), x'(0) = x'(1)\}. \quad (3.3)$$

При этом оператор A_η является инъективным и обратный оператор задается формулой

$$[A_\eta^{-1}y](t) = -y''(t) + \omega_1^2 y(t), \quad y \in \operatorname{Ran}(A_\eta), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Мы доказываем теорему 1, применяя теорему 3, где положим $P_A = \mu_\eta$, $A = A_\eta$ и $f \equiv 1$. Возьмем в качестве функционала F из теоремы 3 следующий функционал:

$$F(x) := -p \ln \|x\|_p \equiv -\ln \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right), \quad p \in \mathcal{P}, \quad x \in L^2. \quad (3.5)$$

Используя определение (3.5) и свойство однородности, запишем среднее в правой части формулы (3.1) в виде *модельного интеграла Лапласа*:

$$\mathbf{E} \left[\int_0^1 |\eta(t)|^p dt \right]^u = u^{up/2} \mathbf{E} \exp \left\{ -uF \left(\frac{\eta}{\sqrt{u}} \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Видно, что роль большого параметра из теоремы 3 теперь играет число $\sqrt{u}$.

ЛЕММА 2. Для $p \in \mathcal{P}$, функционала $f \equiv 1$ и функционала F , заданного в (3.5), выполнено условие **A1** с постоянными $d_1 = 1$, $d_2 = 0$, $d_3 = p$, $d_4 = 0$, $\alpha = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение первого неравенства из формулы (2.3) для $f \equiv 1$ с указанными в лемме $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ очевидно. Как известно, для $2 < p < \infty$ справедливо неравенство

$$\|x\|_p \leq \|x\|_\infty, \quad \text{если } x \in C[0, 1]. \quad (3.7)$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\ln y \leq y, \quad \text{если } y \geq 0. \quad (3.8)$$

Для $p \in \mathcal{P}$ из формул (3.5), (3.7), (3.8) вытекают соотношения

$$F(x) = -p \ln \|x\|_p \geq -p \|x\|_p \geq -p \|x\|_\infty, \quad \text{если } x \in C[0, 1]. \quad (3.9)$$

Отсюда вытекает второе неравенство из формулы (2.3) с указанными в лемме $d_3 = p$, $d_4 = 0$, $\alpha = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для $p \in \mathcal{P}$ функционал (3.5) трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in C[0, 1]$, при этом первые две производные задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -p \|x\|_p^{-p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} x(t), \\ F''(x)g &= p(1-p) \|x\|_p^{-p} |x(t)|^{p-2} g + \\ &\quad + p^2 \|x\|_p^{-2p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} x(t) \langle g, |x(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} x(t) \rangle, \quad g \in L^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Оператор $F''(x)$ является ограниченным симметричным линейным оператором в пространстве L^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получаем, применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [16] и известные формулы для первых двух производных функционала $G(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt$. Ограниченность и симметричность оператора $F''(x)$ проверяются непосредственно.

Обратимся к условию **A2** теоремы 3, полагая далее, что $p \in \mathcal{P}$. Несложно убедиться, что в силу формул (1.8), (3.3) функция $x_0(t)$, заданная в (1.6), (1.7), удовлетворяет на $[0, 1]$ периодическим граничным условиям и $x_0(t) \in \operatorname{Ran}(A_\eta)$.

Продолжим периодически функцию $x_0(t)$ на всю ось $\mathbb{R}$, полученную периодическую функцию с периодом единица обозначим через $\hat{x}_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для числа $0 \leq \kappa \leq 1$ определим функцию

$$x_\kappa(t) := \hat{x}_0(t + \kappa), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.11)$$

Очевидно, $x_0(t) \equiv x_1(t)$. Кроме того, в силу определения и периодичности функции мы имеем $x_\kappa(t) \in \operatorname{Ran}(A_\eta)$ и $\|x_\kappa\|_p = 1$ при всех $0 \leq \kappa \leq 1$. Введем следующее множество функций, заданных на $[0, 1]$:

$$\mathcal{M}_0 := \{x_\kappa(t) : 0 \leq \kappa \leq 1\}. \quad (3.12)$$

Отметим, что в этом множестве элементы x_0 и x_1 отождествлены, следовательно, многообразие $\mathcal{M}_0$ является замкнутой компактной кривой, лежащей в $\operatorname{Ran}(A_\eta)$. Зададим также множество, которое центрально-симметрично $\mathcal{M}_0$:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 := -\mathcal{M}_0 = \{-x(t) : x(t) \in \mathcal{M}_0\}. \quad (3.13)$$

Положим

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_0 \cup \widetilde{\mathcal{M}}_0 \subset \operatorname{Ran}(A_\eta). \quad (3.14)$$

Напомним, что число $\lambda_0 > 0$ задано в формуле (1.5).

ЛЕММА 4. Пусть фиксировано число $p \in \mathcal{P}$, а функционал F задан в (3.5). Тогда минимум в экстремальной задаче

$$F(x) + \frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}),$$

равен $(1 + \ln \lambda_0)p/2$ и достигается на одномерном компактном двухсвязном многообразии

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cup \tilde{\mathcal{V}}_0 \subset \text{Ran}(A_\eta), \quad \text{где} \quad \mathcal{V}_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \mathcal{M}_0, \quad \tilde{\mathcal{V}}_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \tilde{\mathcal{M}}_0. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится при помощи метода, использованного при доказательстве п. 2 леммы 22 в [2], с учетом леммы 3 настоящей работы, а также п. 2 леммы 1 и замечания 1 из раздела 1.

Более подробно замкнутые многообразия (3.12), (3.13) охарактеризованы в лемме 6 из работы [3]. Здесь мы только укажем, что все функции, принадлежащие $\mathcal{M}_0$, являются строго положительными и имеют место равенства

$$\text{mes}(\mathcal{M}_0) = \text{mes}(\tilde{\mathcal{M}}_0) = \|x'_0\|_2, \quad (3.16)$$

где $\text{mes}(\mathcal{M}_0)$ – лебегова длина замкнутой компактной кривой $\mathcal{M}_0$. Очевидно, в силу формул (3.14)–(3.16) справедливо равенство

$$\text{mes}(\mathcal{V}) = \frac{2\|x'_0\|_2}{\sqrt{\lambda_0}}. \quad (3.17)$$

Итак, в силу леммы 4 для гауссовской меры μ_η и функционала (3.5) при $p \in \mathcal{P}$ выполнено условие **A2** с многообразием $\mathcal{V}$, заданным в (3.15), и $\Lambda_0 = (1 + \ln \lambda_0)p/2$. Кроме того, из леммы 3 следует, что для многообразия (3.15) выполнена первая часть условия **A3** о существовании окрестности U_0 ; справедливость условия невырожденности (2.4) доказана ниже. Выполнение условия **A4** для $f \equiv 1$ очевидно. Положим

$$y_0(t) = \frac{x_0(t)}{\sqrt{\lambda_0}}, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.18)$$

Поскольку $x_0 \in \mathcal{M}_0$, из (3.15), (3.18) следует, что $y_0 \in \mathcal{V}_0$. Поскольку $\|x_0\|_p = 1$, в силу (3.18) имеет место равенство

$$\|y_0\|_p = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}. \quad (3.19)$$

Напомним, что ядром линейного оператора $K: L^2 \rightarrow L^2$ называется множество $\text{Ker}(K) = \{x \in L^2: Kx = 0\}$.

ЛЕММА 5. Пусть фиксировано число $p \in \mathcal{P}$, а функционал F задан в (3.5). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Оператор $F''(y_0): L^2 \rightarrow L^2$ является ограниченным симметричным линейным оператором и действует по правилу

$$F''(y_0)g = \lambda_0 p(1-p)x_0^{p-2}(t)g + \lambda_0 p^2 x_0^{p-1}(t) \langle x_0^{p-1}, g \rangle, \quad g \in L^2. \quad (3.20)$$

Оператор $A_\eta F''(y_0): L^2 \rightarrow L^2$ является ядерным линейным оператором и имеет нулевое ядро.

2. Ядерный оператор $A_\eta F''(y_0): L^2 \rightarrow L^2$ имеет множество собственных чисел $\tilde{\nu}_0 \cup \{\nu_n\}_{n=1}^\infty$, где $\tilde{\nu}_0 = 1$ и $-1 = \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \leq \nu_4 < \dots < 0$ – те же числа, что и в формуле (1.11). Собственному числу $\tilde{\nu}_0 = 1$ соответствует L^2 -нормированная положительная собственная функция $f_0(t)$, собственному числу $\nu_1 = -1$ соответствует L^2 -нормированная собственная функция $f_1(t)$ из (1.9), собственным числам ν_k , $k = 2, 3, \dots$, соответствуют L^2 -нормированные собственные функции $f_k(t)$, и при этом система $\{f_k(t)\}_{k=0}^\infty$, образующая ортонормированный базис в L^2 , та же, что и в предложении 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Формула (3.20) вытекает из соотношений (3.10) и (3.19). Согласно лемме 3 оператор $F''(y_0): L^2 \rightarrow L^2$ является ограниченным и симметричным. Напомним, что ковариационный оператор $A_\eta: L^2 \rightarrow L^2$ ядерный. В силу известного результата [19] результирующий оператор $A_\eta F''(y_0)$ представляет собой ядерный оператор. Используя формулу (3.20), несложно показать, что уравнение

$$A_\eta F''(y_0)z = 0, \quad z \in \text{Ran}(A_\eta) \subset L^2,$$

имеет единственное решение $z = 0$. Таким образом, ядро оператора $A_\eta F''(y_0)$ состоит только из нуля. Первое утверждение леммы доказано.

2. Докажем второе утверждение леммы. В силу соотношений (3.3), (3.4), (3.20) задача на собственные числа

$$A_\eta F''(y_0)z = \nu z, \quad z \in \text{Ran}(A_\eta) \subset L^2, \quad (3.21)$$

эквивалентна следующей граничной задаче на собственные числа на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} z''(t) + \beta^2 \omega^2 z(t) &= \frac{p(1-p)\lambda_0}{\nu} x_0^{p-2}(t) z(t) + \frac{p^2 \lambda_0}{\nu} x_0^{p-1}(t) \int_0^1 x_0^{p-1}(s) z(s) ds, \\ z(0) &= z(1), \quad z'(0) = z'(1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Согласно (1.8) для минимизирующей функции $x_0(t)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} x_0''(t) &= \beta^2 \omega^2 x_0(t) - \lambda_0 p x_0^{p-1}(t), \quad t \in [0, 1], \\ x_0(0) &= x_0(1), \quad x_0'(0) = x_0'(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Используя формулу (3.23) и равенство $\|x_0\|_p = 1$, несложно убедиться, что $\tilde{\nu}_0 = 1$ является собственным числом задачи (3.22) с соответствующей L^2 -нормированной положительной собственной функцией $f_0(t)$, которая задана в (1.9).

3. Далее, в силу формул (1.7), (1.8) выполнены равенства

$$x_0'(0) = x_0'(1) = 0, \quad x_0''(0) = x_0''(1). \quad (3.24)$$

Отсюда и из формул (1.9), (3.3) следует, что $x_0' \in \text{Ran}(A_\eta)$ и $f_1 \in \text{Ran}(A_\eta)$. Интегрируя по частям и используя равенства (3.24), получаем соотношения ортогональности

$$\langle x_0, x_0' \rangle = \int_0^1 x_0(t) x_0'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 d[x_0^2(t)] = \frac{1}{2} [x_0^2(1) - x_0^2(0)] = 0, \quad (3.25)$$

$$\langle x_0', x_0'' \rangle = \int_0^1 x_0'(t) x_0''(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 d[x_0'(t)]^2 = \frac{1}{2} [(x_0'(1))^2 - (x_0'(0))^2] = 0. \quad (3.26)$$

В силу (3.23) справедливо равенство

$$\langle x_0'', x_0' \rangle = \beta^2 \omega^2 \langle x_0, x_0' \rangle - \lambda_0 p \langle x_0^{p-1}, x_0' \rangle. \quad (3.27)$$

Из соотношений (3.25)–(3.27) мы имеем

$$\langle x_0^{p-1}, x_0' \rangle = \int_0^1 x_0^{p-1}(t) x_0'(t) dt = 0. \quad (3.28)$$

Дифференцируя почленно уравнение задачи (3.23) и учитывая (3.24), (3.28), несложно показать, что $\nu_1 = -1$ является собственным числом задачи (3.22) с соответствующей L^2 -нормированной собственной функцией $f_1(t)$, заданной в (1.9). При этом согласно формулам (1.9), (3.25) выполнено соотношение ортогональности: $\langle f_0, f_1 \rangle = 0$.

4. В силу доказанных выше утверждений оператор $A_\eta F''(y_0)$ является компактным (несимметричным) линейным оператором в гильбертовом пространстве L^2 с нулевым ядром. Следовательно, этот оператор имеет счетное множество собственных чисел $\{\hat{\nu}_k\}_{k=0}^\infty$, которому соответствует система собственных функций $\{z_k\}_{k=0}^\infty$.

Докажем, что множество собственных чисел $\{\hat{\nu}_k\}_{k=0}^\infty$ совпадает с множеством $\tilde{\nu}_0 \cup \{\nu_k\}_{k=1}^\infty$, а множество собственных функций $\{z_k\}_{k=0}^\infty$ – с множеством $\{f_k\}_{k=0}^\infty$. Для этого наряду с задачей (3.22), эквивалентной (3.21), рассмотрим задачу (1.10) на собственные числа. Согласно предложению 1 и п. 2 доказательства данной леммы обе задачи, (1.10) и (3.22), имеют в качестве собственной функцию x_0 , при этом в задаче (1.10) ей соответствует собственное число $\nu_0 = 1 - p$, а в задаче (3.22) – собственное число $\hat{\nu}_0 = \tilde{\nu}_0 = 1$. Таким образом,

$$z_0 = f_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|_2}. \quad (3.29)$$

Пусть $L_0 = \{z \in L^2: \langle z, x_0 \rangle = 0\}$ – подпространство в L^2 , ортогональное вектору x_0 . Очевидно, в силу ортогональности мы имеем $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset L_0$ и

$$\langle z_k, x_0 \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.30)$$

Используя формулы (3.23) и (3.30), получаем равенства

$$\langle x_0'', z_k \rangle = -\lambda_0 p \int_0^1 x_0^{p-1}(t) z_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.31)$$

Полагая в (3.22) $z = z_k$, $\nu = \hat{\nu}_k$ и учитывая равенства (3.30) и $\|x_0\|_p = 1$, получаем соотношения

$$\langle z_k'', x_0 \rangle = -\frac{\lambda_0 p}{\hat{\nu}_k} \int_0^1 x_0^{p-1}(t) z_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.32)$$

Используя тот факт, что функции z_k , x_0 удовлетворяют периодическим граничным условиям задач (3.22), (3.23) соответственно, несложно убедиться, дважды интегрируя по частям, что справедливы равенства

$$\langle z_k'', x_0 \rangle = \langle x_0'', z_k \rangle, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.33)$$

Из формул (3.31)–(3.33) мы получаем, что

$$\left(1 - \frac{1}{\hat{\nu}_k}\right) \int_0^1 x_0^{p-1}(t) z_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.34)$$

Для множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел справедливо равенство $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, где $\mathbb{N}_1 = \{k \in \mathbb{N}: \hat{\nu}_k \neq 1\}$, $\mathbb{N}_2 = \{k \in \mathbb{N}: \hat{\nu}_k = 1\}$. Пусть фиксировано произвольное число $k \in \mathbb{N}_1$. Тогда в силу формулы (3.34) выполнено равенство $\int_0^1 x_0^{p-1}(s) z_k(s) ds = 0$, а согласно (3.22) собственная функция z_k удовлетворяет задаче (1.10) с собственным числом $\hat{\nu}_k$.

Таким образом, учитывая предложение 1, мы вправе полагать, что $\hat{\nu}_k = \nu_k$, $z_k = f_k$. Кроме того, из утверждения о базисе в предложении 1 вытекает, что $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_2 = \emptyset$, следовательно,

$$\hat{\nu}_k = \nu_k, \quad z_k = f_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Учитывая формулы (3.29), (3.35) и равенство $\hat{\nu}_0 = \tilde{\nu}_0 = 1$, заключаем, что утверждение, сформулированное в начале п. 4, доказано. Отсюда и из предложения 1 следуют все утверждения п. 2 леммы. Отметим, что в п. 3 нашего доказательства независимо от п. 4 и предложения 1 показано, что $\hat{\nu}_1 = \nu_1 = -1$, $z_1 = f_1$. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1, а именно к выводу формул (1.12)–(1.14). Согласно определению из книги [17] (см. гл. 3, § 3, п. 2) и формулам (3.12), (3.15) касательный вектор к кривой $\mathcal{V}_0$ в точке y_0 имеет вид $\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{dx_\kappa}{d\kappa} |_{\kappa=0}$. Используя тот факт, что κ в формулах (3.11), (3.12) является параметром сдвига, находим $\frac{dx_\kappa}{d\kappa} |_{\kappa=0} = x'_0(t)$, $t \in [0, 1]$. Таким образом, единичный касательный вектор к кривой $\mathcal{V}_0$ в точке y_0 имеет вид (см. (1.9))

$$n_{y_0}(t) \equiv n_0(t) = \frac{x'_0(t)}{\|x'_0\|_2} = f_1(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.36)$$

Следовательно, n_0 – это собственный вектор из предложения 1 и леммы 5, которому соответствует одно и то же собственное число $\nu_1 = -1$.

Итак, для значений $p \in \mathcal{P}$ мы применяем к гауссовскому процессу $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$, теорему 3 с функционалом F , заданным в (3.5), и

$$P_A = \mu_\eta, \quad A = A_\eta, \quad f \equiv 1, \quad M = \mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cup \tilde{\mathcal{V}}_0, \quad \Lambda_0 = (1 + \ln \lambda_0) \frac{p}{2}. \quad (3.37)$$

Учитывая свойство периодичности в определении многообразий $\mathcal{V}_0$, $\tilde{\mathcal{V}}_0$, лемму 6 из работы [3] и формулы (2.6), (2.8), можно показать, что в условиях теоремы 1 выполнены равенства

$$c(x) = c(y_0) = |\det L(y_0)|^{-1/2}, \quad x \in \mathcal{V}. \quad (3.38)$$

Вычислим $|\det L(y_0)|$, при этом мы докажем, что $\det L(y_0) \neq 0$, откуда в силу (2.7) будет следовать выполнение неравенства (2.4) из условия А3. Используя п. 2 леммы 5, для точки $y_0 \in \mathcal{V}$ в качестве ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ в L^2 возьмем систему функций $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ из предложения 1, при этом в соответствии с (2.5) и (3.36) положим

$$e_0 = f_1 = n_0 = \frac{x'_0}{\|x'_0\|_2}, \quad e_1 = f_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|_2}, \quad e_k = f_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Обозначим координаты вектора $A_\eta n_0$ в базисе $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ через $a_k := \langle A_\eta n_0, e_k \rangle$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда матрица $L(y_0)$ из формулы (2.6) с учетом леммы 5 имеет

следующий вид:

$$L(y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & 0 & 0 & 1 + \nu_2 & 0 & \ddots \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Разлагая по первой строке определитель k -мерной матрицы, аппроксимирующей матрицу (3.39), получаем диагональную матрицу, определитель которой легко считается, таким образом,

$$|\det L(y_0)| = 2\langle A_\eta n_0, n_0 \rangle \prod_{k=2}^{\infty} (1 + \nu_k) > 0, \quad (3.40)$$

поскольку $a_0 = \langle A_\eta n_0, n_0 \rangle > 0$ в силу инъективности оператора A_η . Учитывая формулы (3.17), (3.38), (3.40), получаем равенства

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{V}} c(x) dV_{\mathcal{V}}(x) = \frac{\sqrt{2} c(y_0)}{\sqrt{\pi}} \text{mes}(\mathcal{V}_0) = \frac{\|x'_0\|_2}{\sqrt{\pi \lambda_0 \langle A_\eta n_0, n_0 \rangle}} \left[\prod_{k=2}^{\infty} (1 + \nu_k) \right]^{-1/2}. \quad (3.41)$$

Далее, в силу формулы (3.2) выполнено равенство

$$\langle A_\eta n_0, n_0 \rangle = \frac{1}{2\beta\omega \text{sh}(\beta\omega/2) \|x'_0\|_2} \int_0^1 \int_0^1 \text{ch}\left(\beta\omega|t-s| - \frac{\beta\omega}{2}\right) x'_0(t)x'_0(s) dt ds. \quad (3.42)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{V}} c(x) dV_{\mathcal{V}}(x) = C_1, \quad (3.43)$$

где постоянная C_1 задана в (1.13), (1.14). Теперь в силу формул (2.9), (3.6), (3.37) и (3.43) мы убеждаемся, что при $u \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\mathbf{E} \left[\int_0^1 |\eta(t)|^p dt \right]^u = \exp \left\{ -\frac{up}{2} (1 + \ln \lambda_0) \right\} \sqrt{u} C_1 (1 + o(1)). \quad (3.44)$$

Отсюда с учетом равенства (3.1) вытекает соотношение (1.12). Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Это доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1. В силу масштабного свойства процесса Боголюбова (см. лемму 15 в [2]) для любых $p > 0$, $0 < \alpha < 2$, $u > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} = \mathbf{E} \exp \left\{ r \left(\int_0^1 |\eta(s)|^p ds \right)^{\alpha/p} \right\}, \quad (4.1)$$

где

$$r = u \frac{\beta^{\alpha(2+p)/2p}}{m^{\alpha/2}},$$

а $\eta(t)$ – введенный в разделе 3 гауссовский процесс Боголюбова на отрезке $[0, 1]$. Таким образом, нам достаточно доказать вариант теоремы 2 для процесса Боголюбова $\eta(t)$ с параметрами $(1, 1, \omega_1)$ и большим параметром $r \rightarrow \infty$.

Доказательство этого варианта теоремы 2 проведем при помощи теоремы 3. Мы будем использовать некоторые обозначения и формулы, приведенные в разделе 3. Применяя теорему 3, мы будем полагать, как и в разделе 3, $P_A = \mu_\eta$, $A = A_\eta$ и $f \equiv 1$. Возьмем в качестве функционала F из теоремы 3 следующий функционал:

$$\Psi(x) := -\|x\|_p^\alpha \equiv -\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\alpha/p}, \quad x \in L^2. \quad (4.2)$$

Наша цель – применить теорему 3 к функционалу (4.2) и гауссовской мере Боголюбова μ_η . Положим

$$v = r^{1/(2-\alpha)} = u^{1/(2-\alpha)} \frac{\beta^{\alpha(2+p)/(2p(2-\alpha))}}{m^{\alpha/(2(2-\alpha))}}. \quad (4.3)$$

Тогда $r = v^{2-\alpha}$, кроме того, $v \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Функционал (4.2) обладает свойством однородности порядка α : $\Psi(cx) = c^\alpha \Psi(x)$, $c > 0$. Используя это свойство и равенство (4.3), запишем среднее из правой части формулы (4.1) в виде модельного интеграла Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp\left\{r \left(\int_0^1 |\eta(t)|^p dt\right)^{\alpha/p}\right\} = \mathbf{E} \exp\{-r\Psi(\eta)\} = \int_{L^2} e^{-v^2\Psi(x)} d\mu_\eta(vx). \quad (4.4)$$

Видно, что роль большого параметра из теоремы 3 теперь играет число v , заданное в формуле (4.3).

ЛЕММА 6. Для $p \in \mathcal{P}$ и функционалов $f \equiv 1$, $F = \Psi$ выполнено условие **A1** с постоянными $d_1 = 1$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$, $d_4 = 0$, при этом значение α из условия **A1** совпадает со значением α из формулировки теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы легко проводится при помощи неравенства (3.7).

ЛЕММА 7. Для $p \in \mathcal{P}$, $0 < \alpha < 2$ функционал Ψ трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in C[0, 1]$, при этом первые две производные задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= -\alpha \left(\int_0^1 |x(s)|^p ds\right)^{(\alpha-p)/p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} x(t), \\ \Psi''(x)g &= \alpha(1-p)\|x\|_p^{\alpha-p} |x(t)|^{p-2} g + \\ &\quad + \alpha(p-\alpha)\|x\|_p^{\alpha-2p} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} x(t) \langle g, |x(t)|^{p-1} \operatorname{sgn} x(t) \rangle, \quad g \in L^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Оператор $\Psi''(x)$ является ограниченным симметричным линейным оператором в пространстве L^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получаем, применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [16] и известные формулы для первых двух производных функционала $G(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt$. Ограниченность и симметричность оператора $\Psi''(x)$ проверяется непосредственно.

ЛЕММА 8. Пусть фиксированы числа $p \in \mathcal{P}$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда минимум в экстремальной задаче

$$\Psi(x) + \frac{1}{2} \langle x, A_\eta^{-1} x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in \text{Dom}(A_\eta^{-1}),$$

равен

$$-\tilde{q}_1 = -\tilde{q}_1(p, \alpha) = -\frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{\lambda_0 p} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} < 0$$

и достигается на одномерном компактном двухсвязном многообразии

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \tilde{\mathcal{S}}_0 \subset \text{Ran}(A_\eta), \quad \text{где} \quad \mathcal{S}_0 = c_0 \mathcal{M}_0, \quad \tilde{\mathcal{S}}_0 = c_0 \tilde{\mathcal{M}}_0, \quad (4.6)$$

$$c_0 = c_0(p, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\lambda_0 p} \right)^{1/(2-\alpha)},$$

а множество $\mathcal{M}$ задано в формуле (3.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится при помощи метода, использованного при доказательстве п. 2 леммы 18 в [2], с учетом леммы 7 настоящей работы, а также п. 2 леммы 1 и замечания 1 из раздела 1.

Итак, в силу леммы 8 для гауссовской меры μ_η и функционала (4.2) при $p \in \mathcal{P}$ выполнено условие **A2** с многообразием $\mathcal{S}$, заданным в (4.6), и $\Lambda_0 = -\tilde{q}_1$. Кроме того, из леммы 7 следует, что для многообразия (4.6) выполнена первая часть условия **A3** о существовании окрестности U_0 ; выполнение условия невырожденности (2.4) доказывается путем вычисления детерминанта $|\det L(y_0)| \neq 0$. Выполнение условия **A4** для $f \equiv 1$ очевидно. Положим

$$y_0(t) = c_0 x_0(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.7)$$

Поскольку $x_0 \in \mathcal{M}_0$, из (4.6), (4.7) следует, что $y_0 \in \mathcal{S}_0$. Поскольку $\|x_0\|_p = 1$, в силу (4.7) выполнено равенство

$$\|y_0\|_p = c_0. \quad (4.8)$$

ЛЕММА 9. Пусть фиксированы числа $p \in \mathcal{P}$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Оператор $\Psi''(y_0): L^2 \rightarrow L^2$ является ограниченным симметричным линейным оператором и действует по правилу

$$\Psi''(y_0)g = \lambda_0 p(1-p)x_0^{p-2}(t)g + \lambda_0 p(p-\alpha)x_0^{p-1}(t)\langle x_0^{p-1}, g \rangle, \quad g \in L^2. \quad (4.9)$$

При $\alpha = 1$ ядро оператора $\Psi''(y_0)$ представляет собой одномерное подпространство $H_1 = \{cx_0(t), c \in \mathbb{R}\}$ в L^2 . При $1 \neq \alpha \in (0, 2)$ ядро оператора $\Psi''(y_0)$ состоит только из нуля. Оператор $A_\eta \Psi''(y_0): L^2 \rightarrow L^2$ является ядерным линейным оператором.

2. Ядерный оператор $A_\eta \Psi''(y_0): L^2 \rightarrow L^2$ имеет множество собственных чисел $\bar{\nu}_0 \cup \{\nu_n\}_{n=1}^\infty$, где $\bar{\nu}_0 = 1 - \alpha$ и $-1 = \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \leq \nu_4 < \dots < 0$ — те же числа, что в формуле (1.11). Собственному числу $\bar{\nu}_0 = 1 - \alpha$ соответствует L^2 -нормированная положительная собственная функция $f_0(t)$, собственному числу $\nu_1 = -1$ соответствует L^2 -нормированная собственная функция $f_1(t)$ из (1.9), собственным числам $\nu_k, k = 2, 3, \dots$, соответствуют L^2 -нормированные собственные функции $f_k(t)$, и при этом система $\{f_k(t)\}_{k=0}^\infty$, образующая ортонормированный базис в L^2 , та же, что и в предложении 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Ради общности изложения при $\alpha = 1$ мы полагаем, что $\bar{\nu}_0 = 0$ является (нулевым) собственным числом оператора $A_\eta \Psi''(y_0)$, которому соответствует L^2 -нормированная собственная функция $f_0(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9. Формула (4.9) вытекает из (4.5) и (4.8). Согласно лемме 7 оператор $\Psi''(y_0): L^2 \rightarrow L^2$ является ограниченным и симметричным. Используя формулу (4.9), легко показать, что уравнение $\Psi''(y_0)z = 0$, $z \in L^2$, эквивалентно уравнению

$$(1-p)z(t) + (p-\alpha)x_0(t) \int_0^1 x_0^{p-1}(s)z(s) ds = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.10)$$

При $\alpha = 1$ уравнение (4.10) имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $z = x_0$, при $1 \neq \alpha \in (0, 2)$ уравнение (4.10) не имеет решений в L^2 . Отсюда вытекает утверждение п. 1 леммы о ядре оператора $\Psi''(y_0)$. Результирующий оператор $A_\eta \Psi''(y_0)$, как композиция ядерного и ограниченного операторов, представляет собой ядерный оператор, что доказывает п. 1 леммы.

Докажем утверждения из п. 2 леммы. При $p \in \mathcal{P}$, $0 < \alpha < 2$ в силу соотношений (3.3), (3.4), (4.9) задача на собственные числа

$$A_\eta \Psi''(y_0)z = \nu z, \quad z \in \text{Ran}(A_\eta) \subset L^2,$$

эквивалентна следующей граничной задаче на собственные числа на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} -z''(t) + \beta^2 \omega^2 z(t) &= \frac{p(1-p)\lambda_0}{\nu} x_0^{p-2}(t) z(t) + \\ &+ \frac{p(p-\alpha)\lambda_0}{\nu} x_0^{p-1}(t) \int_0^1 x_0^{p-1}(s) z(s) ds, \\ z(0) &= z(1), \quad z'(0) = z'(1). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Если формально положить в этой задаче $\alpha = 0$, то мы получим задачу (3.22), поэтому дальнейшее исследование задачи (4.11) проводится совершенно аналогично исследованию задачи (3.22) в разделе 3. Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 2, а именно вывод формул (1.15), (1.16), проводится аналогично доказательству теоремы 1 и здесь опущено.

Список литературы

- [1] Д. П. Санкович, “О некоторых свойствах функциональных интегралов по мере Боголюбова”, *ТМФ*, **126**:1 (2001), 149–163.
- [2] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики типа Лапласа для гауссовской меры Боголюбова”, *ТМФ*, **168**:2 (2011), 299–340.
- [3] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики типа Лапласа для гауссовской меры Боголюбова: многообразие точек минимума функционала действия”, *ТМФ*, **191**:3 (2017), 456–472.
- [4] Д. П. Санкович, “Функциональный интеграл Боголюбова”, *Тр. МИАН*, **251** (2005), 223–256.
- [5] Р. С. Пусев, “Асимптотика малых уклонений процессов Боголюбова в квадратичной норме”, *ТМФ*, **165**:1 (2010), 134–144.

- [6] В. Р. Фаталов, “Гауссовские процессы Орнштейна–Уленбека и Боголюбова: асимптотики малых уклонений для L^p -функционалов, $0 < p < \infty$ ”, *Пробл. передачи информ.*, **50**:4 (2014), 79–99.
- [7] В. Р. Фаталов, “Ряды теории возмущений в квантовой механике: фазовые переходы и точные асимптотики для коэффициентов разложения”, *ТМФ*, **174**:3 (2013), 416–443.
- [8] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Pure and Applied Mathematics, **86**, Acad. Press, New York, 1979.
- [9] R. S. Ellis, J. S. Rosen, “Asymptotic analysis of Gaussian integrals. I. Isolated minimum points”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273**:2 (1982), 447–481.
- [10] R. S. Ellis, J. S. Rosen, “Asymptotic analysis of Gaussian integrals. II. Manifold of minimum points”, *Commun. Math. Phys.*, **82**:2 (1981), 153–181.
- [11] В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах”, *УМН*, **50**:6(306) (1995), 57–150.
- [12] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979.
- [13] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985.
- [14] М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, Киев, ТВиМС, 1995.
- [15] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Физматлит, М., 1997.
- [16] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.
- [17] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1980.
- [18] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [19] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 24.05.2017,
после доработки 24.08.2017