Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бордаг, Вакуумная и тепловая энергии для двух осцилляторов, взаимодействующих посредством поля, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 3, 391–421

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:34:16

© 2018 г.

М. Бордаг*

ВАКУУМНАЯ И ТЕПЛОВАЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛЯ

Рассматривается простая $(1 + 1)$ -модель взаимодействия Казимира–Полдера, которая включает в себя два осциллятора, связанных скалярным полем. Рассматривается диссипация в рамках подхода, основанного на первых принципах, при допущении, что осцилляторы взаимодействуют с термостатами. Для данной системы выведено уравнение для свободной энергии в терминах вещественных частот. На основе данного представления получено представление Мацубары для случая диссипации. Рассмотрен случай нулевых собственных частот осцилляторов. Показано, что в данном случае вклад от нулевой частоты Мацубары становится модифицированным и не возникает проблем, связанных с законами термодинамики.

Ключевые слова: сила Казимира–Полдера, температура, диссипация, резервуар.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9407>

1. ВВЕДЕНИЕ

Сила Казимира–Полдера описывает базовое электромагнитное взаимодействие между молекулами или между молекулой и стенкой, а формула Лифшица описывает взаимодействие между макроскопическими телами. Теоретически данный подход обычно основан на стохастической термодинамике и включает в себя рассмотрение свойств вещества с точки зрения проницаемости или поляризуемости. Таким образом, возможны учет реальной структуры взаимодействующих объектов и предсказание результатов измерений высокой точности, которые представляют собой весьма актуальную и важную проблему.

Наряду с очевидными достижениями в данной области существуют определенные неясности, связанные с диссипацией. В простейшем случае показано, что при введении проницаемости Друде в формулу Лифшица происходит нарушение термодинамического принципа [1], в другом случае при учете удельной электропроводности по постоянному току при рассмотрении взаимодействия между атомом и стенкой наблюдается расхождение с экспериментальными результатами [2]. Современное

---

*Institute of Theoretical Physics, Leipzig University, Leipzig, Germany.
E-mail: bordag@uni-leipzig.de

состояние исследований в данном направлении представлено в работе [3]. Следует также отметить проблему, связанную с тем, что только при использовании предписания Швингера фиксированная проницаемость при стремлении к бесконечности воспроизводит предел идеального проводника [4].

Следует отметить, что введение некоторой модели проницаемости или поляризуемости в случае сил Казимира–Полдера в формулу Лифшица представляет собой чисто феноменологический подход, а следовательно, требуется разработка более фундаментальной модели. Для решения данной проблемы обычно вводят связь осцилляторов, описывающих молекулы, с термостатом (резервуаром). Такой подход позволяет сформулировать основные принципы, начиная, например, с гамильтониана. Затем остается проблема разработки подхода для данной конфигурации. Для сил Казимира–Полдера и сил Казимира такого рода система состоит из диполей, взаимодействующих с электромагнитным полем и взаимодействующих с соответствующими термостатами. Следовательно, диссипация является результатом взаимодействия с термостатами и связана с силами Ланжевена.

В настоящее время разработке такого рода идей посвящено большое количество работ (см., например, [5]–[10]), включая работы, в которых рассматриваются силы Казимира–Полдера и силы Казимира. Более того, подход с учетом термостатов позволяет рассматривать неравновесные случаи, радиационный перенос тепла, а также широкий круг явлений, обычно встречающийся в открытых квантовых системах [11]. Однако в данных работах, в которых рассматривается случай однородной среды, авторы ограничиваются осцилляторами с ненулевой собственной частотой или осцилляторами, разнесенными на большое расстояние, и в основном воспроизводят известные результаты, касающиеся сил Казимира–Полдера, или формулы Лифшица.

Данная проблема может быть сформулирована в несколько ином ключе при рассмотрении частот. Известно, что в случае отсутствия диссипации рассматриваемая задача имеет вещественные собственные частоты, и термодинамические величины, такие как свободная энергия, могут быть представлены как сумма или интеграл по всем такого рода частотам. Эквивалентное представление в рамках мнимых частот Мацубары связано с поворотом Вика. В случае диссипации собственные частоты не являются действительными, а свободная энергия не может быть представлена в терминах собственных частот, но только в терминах частот Мацубары. Попытка наивно осуществить обратный поворот Вика не осуществима [12]. Показано [13], что представление в рамках комплексных частот (резонансов) возможно, но не считается особенно вдохновляющим.

В настоящей работе разработан фундаментальный подход для описания диссипации посредством связи термостатов для простейшей системы, имитирующей взаимодействие Казимира–Полдера. Рассмотрены два одномерных осциллятора, каждый из которых связан с термостатом, а оба осциллятора связаны с $(1 + 1)$ -размерным скалярным полем. В данной работе не проведено разнесение на большое расстояние с самого начала, и, таким образом, рассмотрение включает непертурбативные эффекты, которые модифицируют представление Мацубары. Осцилляторы имеют собственную частоту Ω , которая может быть сведена к нулю во время или по окончании вычислений. Свободная энергия системы выражена как сумма или интеграл по действительным частотам. Исследованы свойства данного представления, например показана связь с представлением Мацубары и рассмотрены границы низких температур, нулевая диссипация, а также нулевая собственная частота Ω .

Базовые идеи, касающиеся термостатов, которые использовались в настоящей статье, не являются новыми. Они в основном аналогичны идеям, представленным в знаменитой публикации Фано [14], в подходе Хаттнера–Барнетта [15], а также в подходе открытых квантовых систем [8]. Однако в контексте взаимодействий Казимира и Казимира–Полдера с диссипацией данные идеи широко используются лишь с недавнего времени. По этой причине в настоящей статье приведено самое простое решение, которое может быть легко использовано и которое является достаточным для описания всех характерных особенностей, которые представляют интерес. Более того, следует отметить, что подход с учетом термостатов может быть переформулирован для равновесного случая в рамках флуктуационно-диссипационной теоремы, предложенной в работе [16].

В разделе 2 рассматривается случай взаимодействия одиночного осциллятора с термостатом, в разделе 3 изучается случай взаимодействия двух осцилляторов со скалярным полем. В разделе 4 исследуется полная система в ящике конечного размера и выведено представление в рамках действительных частот. В разделе 5 рассмотрены особые случаи и переход к частотам Мацубары. В разделе 6 изучаются системы в неограниченном пространстве, заключительные выводы представлены в разделе 7.

В данной статье использованы единицы с $c = k_B = 1$.

2. ОДИНОЧНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ С ТЕРМОСТАТОМ

В данном разделе рассмотрим одиночный гармонический осциллятор, взаимодействующий с термостатом. Этот случай представляет собой простейшую термодинамическую систему, которая описана во многих учебниках. Приведем основные формулы для их дальнейшего использования при решении наших задач.

2.1. Основные формулы. Рассмотрим гармонический осциллятор $\xi(t)$, связанный с бесконечным набором осцилляторов термостатов $q_\omega(t)$. Данная система описывается следующим лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\xi}(t)^2 + \Omega^2 \xi(t)^2) + \int_0^\infty d\omega \frac{\mu}{2} [\dot{q}_\omega(t)^2 + \omega^2 (q_\omega(t) - \xi(t))^2], \quad (1)$$

где μ – плотность массы термостатных осцилляторов. Выбор связи между осцилляторами, который следует работе [17], позволяет избежать искусственных расходимостей. В лагранжиане (1) все переменные имеют зависимость от времени, которую в дальнейшем для простоты изложения мы писать не будем. В соответствии с формулой (1) гамильтониан записывается следующим образом:

$$H = H_{\text{osc}} + H_{\text{bath}} + H_{\text{int}}, \quad (2)$$

где

$$H_{\text{osc}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2} \xi^2, \quad (3)$$

$$H_{\text{bath}} = \int_0^\infty d\omega \left(\frac{p_\omega^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2} q_\omega^2 \right), \quad (4)$$

$$H_{\text{int}} = \int_0^\infty d\omega \frac{\mu\omega^2}{2} (-2q_\omega + \xi)\xi, \quad (5)$$

сопряженные моменты записываются как

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}}, \quad p_\omega = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\omega}. \quad (6)$$

Из лагранжиана (1) следуют уравнения движения

$$m(\ddot{\xi} + \Omega^2 \xi) = \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 (q_\omega - \xi) \quad (7)$$

для осциллятора и

$$\mu(\ddot{q}_\omega + \omega^2 q_\omega) = \mu \omega^2 \xi \quad (8)$$

для переменных термостата.

Теперь произведем квантование системы (1), (2). Введем операторы рождения и уничтожения $\hat{b}_\omega^\dagger$ и $\hat{b}_\omega$ термостата с коммутационным соотношением

$$[\hat{b}_\omega, \hat{b}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega') \quad (9)$$

и используем формулы

$$\hat{q}_\omega = \frac{l_0}{\sqrt{2}}(\hat{b}_\omega + \hat{b}_\omega^\dagger), \quad \hat{p}_\omega = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}l_0}(\hat{b}_\omega - \hat{b}_\omega^\dagger) \quad (10)$$

для соответствующих операторов координат и импульса. В данном случае величина

$$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} \quad (11)$$

представляет собой характеристическую длину, связанную с осцилляторами термостата.

Оператор Гамильтона в соответствии с (4) представлен как

$$\hat{H}_{\text{bath}} = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega + \hat{b}_\omega \hat{b}_\omega^\dagger). \quad (12)$$

Далее рассмотрим уравнения движения Гейзенберга для операторов $\hat{b}_\omega^\dagger(t)$ и $\hat{b}_\omega(t)$ (в данном случае мы снова пишем зависимость от времени)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}}_\omega(t) &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{b}_\omega(t)] = -i\omega \hat{b}_\omega(t) - i\frac{\omega}{\sqrt{2}l_0} \hat{\xi}(t), \\ \dot{\hat{b}}_\omega^\dagger(t) &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{b}_\omega^\dagger(t)] = i\omega \hat{b}_\omega^\dagger(t) + i\frac{\omega}{\sqrt{2}l_0} \hat{\xi}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где используется (11), и в соответствии с (10) получаем следующее уравнение для осциллятора:

$$m(\ddot{\xi} + \Omega^2 \xi) = \int_0^\infty d\omega \frac{\mu\omega^2 l_0}{\sqrt{2}} (\hat{b}_\omega(t) + \hat{b}_\omega^\dagger(t)) - \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 \hat{\xi}(t). \quad (14)$$

Решения уравнений (13) представляют собой операторы Гейзенберга,

$$\begin{aligned} \hat{b}_\omega(t) &= e^{-i\omega t} \hat{b}_\omega(0) + \frac{i\omega}{\sqrt{2}l_0} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \hat{\xi}(t'), \\ \hat{b}_\omega^\dagger(t) &= e^{i\omega t} \hat{b}_\omega^\dagger(0) - \frac{i\omega}{\sqrt{2}l_0} \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega(t-t')} \hat{\xi}(t'), \end{aligned} \quad (15)$$

в предположении, что поле $\hat{\xi}(t)$ отсутствует при $t = -\infty$, а решение является за-
паздывающим. Операторы $\hat{b}_\omega^\dagger(0)$ и $\hat{b}_\omega(0)$ представляют собой начальные операторы,
удовлетворяющие коммутационному соотношению (9).

Данные операторы позволяют записать оператор координаты для осцилляторов
термостата также в представлении Гейзенберга, из (10) имеем

$$\hat{q}_\omega(t) = \hat{q}_\omega^h(t) + \int_{-\infty}^t dt' \omega \sin(\omega(t-t')) \hat{\xi}(t'), \quad (16)$$

где однородное решение

$$\hat{q}_\omega^h(t) = \frac{l_0}{\sqrt{2}} (e^{-i\omega t} \hat{b}_\omega(0) + e^{i\omega t} \hat{b}_\omega^\dagger(0)). \quad (17)$$

Подставив решение (15) в правую часть уравнения (14) для осциллятора и исполь-
зуя (17), получаем

$$m(\partial_t^2 + \Omega^2) \hat{\xi}(t) = F_L(t) - \hat{\Gamma} \hat{\xi}(t), \quad (18)$$

где

$$F_L(t) = \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 \hat{q}_\omega^h(t) \quad (19)$$

представляет собой хорошо известную силу Ланжевена. С учетом (17) это выраже-
ние также может быть записано в следующем виде:

$$F_L(t) = \int_0^\infty d\omega \frac{\mu \omega^2 l_0}{\sqrt{2}} (e^{-i\omega t} \hat{b}_\omega(0) + e^{i\omega t} \hat{b}_\omega^\dagger(0)). \quad (20)$$

Второй член в правой части (18) может быть представлен как

$$- \hat{\Gamma} \hat{\xi}(t) \equiv \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 \left[\int_{-\infty}^t dt' \omega \sin(\omega(t-t')) \hat{\xi}(t') - \hat{\xi}(t) \right]. \quad (21)$$

Здесь $\hat{\Gamma}$ обозначает линейный положительный оператор [17]. Обычно рассмотрение
начинают с использования общих свойств, но в данном случае более конструктив-
ным нам представляется подход с ограничением рассмотрения случаев линейного
затухания при параметризации плотности массы μ термостата в виде

$$\mu = \frac{2\gamma m}{\pi \omega^2} \frac{1}{1 + (\delta \omega)^2}, \quad (22)$$

где γ – параметр диссипации, а δ – параметр регуляризации типа Друде с $\delta \rightarrow 0$
в конце вычислений.

Используя параметризацию (22), мы получаем

$$- \hat{\Gamma} \hat{\xi}(t) = -\gamma m \dot{\hat{\xi}}(t) \quad (23)$$

для линейного затухания. Подставляя этот член в левую часть уравнения (18),
получаем уравнение

$$m(\partial_t^2 + \gamma \partial_t + \Omega^2) \hat{\xi}(t) = F_L(t) \quad (24)$$

для гармонического осциллятора $\hat{\xi}(t)$, который демпфируется параметром γ и возбуждается силой Ланжевена $F_L(t)$. Такого рода сценарий представляет собой хорошо известный подход к рассмотрению термостата, связанного с осциллятором. Термостат обеспечивает диссипацию γ и в равновесии обеспечивает возмущения, которые поддерживают осциллятор в стационарном состоянии.

Уравнение (24) может быть решено самым простым способом, с использованием преобразования Фурье. В данном случае и далее для всех зависящих от времени величин мы примем следующие соглашения относительно преобразования Фурье:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{\xi}_{\omega}, \quad \tilde{\xi}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \xi(t). \quad (25)$$

Тогда уравнение (24) преобразуется следующим образом:

$$mN(\omega)\tilde{\xi}_{\omega} = \tilde{F}_{\omega}, \quad (26)$$

где

$$N(\omega) \equiv -\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2, \quad (27)$$

а

$$\tilde{F}_{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma m}{\pi}}\hbar\omega (\Theta(-\omega)\hat{b}_{-\omega}(0) + \Theta(\omega)\hat{b}_{\omega}^{\dagger}(0)) \quad (28)$$

представляет собой преобразование Фурье силы Ланжевена (20).

Итак, решение уравнения (26) записывается следующим образом:

$$\tilde{\xi}_{\omega} = \tilde{\xi}_{\omega}^h + \frac{1}{mN(\omega)}\tilde{F}_{\omega}, \quad (29)$$

где $\tilde{\xi}_{\omega}^h$ представляет собой однородное решение. Обратное преобразование Фурье по времени приводит к выражению

$$\hat{\xi}(t) = \hat{\xi}^h(t) + \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\gamma}{\pi m}}\hbar\omega \left(\frac{e^{-i\omega t}}{N(-\omega)}\hat{b}_{\omega} + \frac{e^{i\omega t}}{N(\omega)}\hat{b}_{\omega}^{\dagger} \right) \quad (30)$$

с однородным решением

$$\hat{\xi}^h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} (e^{-i\omega_1 t}\hat{a} + e^{i\omega_1 t}\hat{a}^{\dagger})e^{-(\gamma/2)t}, \quad (31)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\Omega^2 - (\gamma/2)^2}$ и $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$. В данном случае очевиден физический смысл: однородное решение исчезает во времени вследствие затухания, а неоднородное решение осциллятора поддерживается силой Ланжевена.

2.2. Средние значения при тепловом равновесии, свободная энергия и потоки энергии. В термодинамической системе базовые потенциалы представляют собой внутреннюю энергию E и свободную энергию F , которые связаны как

$$E = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta F). \quad (32)$$

Далее для рассматриваемой системы необходимо определить средние значения при тепловом равновесии операторов термостата. Хорошо известно, что они следуют из гамильтониана (12) и записываются следующим образом:

$$\langle \hat{b}_\omega \hat{b}_{\omega'}^\dagger + \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_{\omega'} \rangle = \delta(\omega - \omega') \mathcal{N}_T(\omega), \quad (33)$$

где

$$\mathcal{N}_T(\omega) \equiv \frac{2}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} + 1 = \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2}. \quad (34)$$

При наличии наряду с формулами (16) и (30) зависящих от времени решений уравнений движения Гейзенберга (13) и (14) можно исследовать гамильтонианы (3)–(5). Прежде всего обратимся к уравнению (8) и умножим его на $\dot{q}_\omega(t)$, так что его можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\mu}{2} (\dot{q}_\omega(t)^2 + \omega^2 \hat{q}_\omega(t)^2) = \mu \omega^2 \dot{q}_\omega(t) \hat{\xi}(t). \quad (35)$$

Проведя интегрирование по ω и используя (4) и (6), получаем

$$\frac{d}{dt} H_{\text{bath}} = \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 \dot{q}_\omega(t) \hat{\xi}(t). \quad (36)$$

Аналогичным образом из уравнения (7), путем умножения на $\dot{\xi}(t)$ и используя (3) и (6), получаем

$$\frac{d}{dt} H_{\text{osc}} = \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 (\dot{q}_\omega(t) - \hat{\xi}(t)) \dot{\xi}(t). \quad (37)$$

Затем подставляем решения (16) в (36):

$$\frac{d}{dt} H_{\text{bath}} = \int_0^\infty d\omega \left[\dot{q}_\omega^{\text{h}}(t) + \int_{-\infty}^t dt' \omega^2 \cos(\omega(t-t')) \hat{\xi}(t') \right] \hat{\xi}(t). \quad (38)$$

Используем (19) и проведем интегрирование по частям:

$$\frac{d}{dt} H_{\text{bath}} = \dot{F}_L(t) \hat{\xi}(t) + \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 \int_{-\infty}^t dt' \omega \sin(\omega(t-t')) \dot{\xi}(t') \hat{\xi}(t). \quad (39)$$

Далее аналогичным образом, как при выводе (23), получаем

$$\frac{d}{dt} H_{\text{bath}} = (\dot{F}_L(t) - \gamma m \ddot{\xi}(t)) \hat{\xi}(t) + \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 \dot{\xi}(t) \hat{\xi}(t). \quad (40)$$

Затем подставляем решение (16) в (37), используем (23) и получаем осциллятор

$$\frac{d}{dt} H_{\text{osc}} = (F_L(t) - \gamma m \dot{\xi}(t)) \dot{\xi}(t). \quad (41)$$

Наконец, при подстановке (16) в (5) и с учетом (19) получаем

$$H_{\text{int}} = -(F_L(t) - m \gamma \dot{\xi}(t)) \hat{\xi}(t) - \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \mu \omega^2 \dot{\xi}(t)^2. \quad (42)$$

Продолжая, из (40), (41) и (42) видим, что полная энергия сохраняется во времени,

$$\frac{d}{dt} H = \frac{d}{dt} H_{\text{bath}} + \frac{d}{dt} H_{\text{osc}} + \frac{d}{dt} H_{\text{int}} = 0. \quad (43)$$

Поскольку отдельные вклады в (43) являются ненулевыми, потоки энергии между ними компенсируют друг друга в любой момент времени.

2.3. Внутренняя и свободная энергии осциллятора. Используя определения, данные в п. 2.1, вычислим тепловые средние величины гамильтонианов (3)–(5). Поскольку интерес представляет состояние равновесия, введем только неоднородную часть решения (30),

$$\hat{\xi}(t) = \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\gamma}{\pi m}} \hbar \omega \left(\frac{e^{-i\omega t}}{N(-\omega)} \hat{b}_\omega + \frac{e^{i\omega t}}{N(\omega)} \hat{b}_\omega^\dagger \right). \quad (44)$$

Из (43) имеем

$$\frac{d}{dt} H_{\text{bath}} + \frac{d}{dt} H_{\text{int}} = -\frac{d}{dt} H_{\text{osc}}. \quad (45)$$

Далее покажем, что соблюдается условие $d\langle H_{\text{osc}} \rangle / dt = 0$. Таким образом, энергия $\langle H_{\text{bath}} + H_{\text{int}} \rangle = \text{const}$, иными словами, данный параметр не зависит от времени и может быть определен при $t \rightarrow -\infty$, где согласно начальным условиям мы имеем только энергию термостата. Как следствие, интересующая нас внутренняя энергия определяется как

$$E = \langle H_{\text{osc}} \rangle, \quad (46)$$

при этом H_{osc} приведена в (3), а определение средних величин дано в (33).

Подставляем решение (44) в (46) и получаем двойное интегрирование по ω , которое при использовании средних величин (33) сводится к однократному интегрированию. Таким образом,

$$E = \langle H_{\text{osc}} \rangle = \gamma \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar \omega}{2} \mathcal{N}_T(\omega) \frac{\omega^2 + \Omega^2}{|N(\omega)|^2}, \quad (47)$$

где использовалось равенство $N(\omega) = N(-\omega)^*$. Выражение (47) можно упростить, если использовать следующее тождество:

$$\gamma \frac{\omega^2 + \Omega^2}{|N(\omega)|^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{2i} \ln \frac{N(\omega)}{N(-\omega)}. \quad (48)$$

Структура данного выражения позволяет определить фазу:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2i} \ln \frac{N(\omega)}{N(-\omega)}, \quad (49)$$

это позволяет записать энергию в виде

$$E = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \hbar \omega \mathcal{N}_T(\omega) \frac{\partial}{\partial \omega} \delta(\omega), \quad (50)$$

что представляет собой базовую среднюю величину энергии, которая будет использована в дальнейшем. Следует отметить, что средняя величина (47), а также все ей подобные не зависят от времени.

Свободная энергия осциллятора и термостата может быть получена из (50) с использованием (32):

$$F = T \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} + \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right) \frac{\partial}{\partial \omega} \delta(\omega). \quad (51)$$

Интегрирование по частям приводит к иному представлению:

$$F = -\hbar \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{N}_T(\omega) \delta(\omega), \quad (52)$$

и, принимая во внимание (34), становится возможным разделить величину свободной энергии на части с нулевой температурой и части, зависящие от температуры:

$$F = F_0 + \Delta_T F, \quad (53)$$

где

$$F_0 = -\hbar \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \delta(\omega), \quad \Delta_T F = -\hbar \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \delta(\omega). \quad (54)$$

Следует отметить, что внутренняя (50) и свободная (51) или (52) энергии выражены через действительные частоты даже в случае диссипации, $\gamma > 0$. В целом данные представления не являются новыми. Например, соотношение (47) аналогично выражению (64) из работы [6], а соотношение (50) аналогично выражению (5) из работы [18], где оно названо “замечательной формулой”. Функция $\delta(\omega)$ (49), которую мы называем “фазой”, представляет собой мнимую часть функции Грина в вышеупомянутых работах.

2.4. Частные случаи. Обсудим некоторые частные случаи. Прежде всего, выключим диссипацию, $\gamma \rightarrow 0$. Для этого обратимся к формуле (48) и используем соотношение

$$\frac{\gamma}{|N(\omega)|^2} = \frac{1}{2i\omega} \left(\frac{1}{N(-\omega)} - \frac{1}{N(\omega)} \right) \underset{\gamma \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{\omega} \delta(\omega^2 - \Omega^2), \quad (55)$$

в котором используется теорема Сохоцкого–Племеля, так что формула (48) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{2i} \ln \frac{N(\omega)}{N(-\omega)} \right) \underset{\gamma \rightarrow 0}{=} \pi \delta(\omega - \Omega). \quad (56)$$

В данном случае учитывается условие $\omega \geq 0$ при интегрировании (51).

Таким образом, в отсутствие диссипации свободная энергия может быть записана следующим образом:

$$F|_{\gamma=0} = \frac{\hbar\Omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\Omega}), \quad (57)$$

что представляет собой хорошо известное выражение для одиночного осциллятора в тепловом состоянии.

Далее рассмотрим предел $T \rightarrow 0$ и используем представление (51) для зависящей от температуры части. Таким образом, проведем разложение

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{N(\omega)}{N(-\omega)} = \gamma \frac{\omega}{\Omega^2} + \dots \quad (58)$$

для малых ω , что дает в (54) первый член в разложении для $T \rightarrow 0$,

$$\Delta_T F \underset{T \rightarrow 0}{=} -\frac{T^2 \gamma}{\hbar \Omega^2} \frac{\zeta(2)}{\pi} + \dots, \quad (59)$$

где $\zeta(2) = \pi^2/6$ – дзета-функция Римана. Аналогичная процедура может быть проведена для $\Omega = 0$. Используя соотношение

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{N(\omega)}{N(-\omega)} \Big|_{\Omega=0} = \frac{\omega}{\gamma} + \dots, \quad (60)$$

получаем

$$\Delta_T F|_{\Omega=0} \stackrel{T \rightarrow 0}{=} -\frac{T^2}{\hbar\gamma} \frac{\zeta(2)}{\pi} + \dots. \quad (61)$$

В обоих случаях для энтропии $S = -\partial F/\partial T$ при $T \rightarrow 0$ имеем

$$S = \frac{T\gamma}{\hbar\Omega^2} \frac{\zeta(2)}{\pi} + \dots, \quad S|_{\Omega=0} = \frac{T}{\hbar\gamma} \frac{\zeta(2)}{\pi} + \dots. \quad (62)$$

Следует отметить, что в данном случае не имеет смысла рассматривать предел $\gamma \rightarrow 0$, поскольку это вновь возвращает нас к случаю одиночного осциллятора, как в соотношении (57).

3. ДВА ОСЦИЛЛЯТОРА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛЯ

Рассмотрим систему, состоящую из двух осцилляторов, взаимодействующих посредством поля. Лагранжиан записывается как

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int dx \frac{1}{2} (\dot{\phi}(t, x)^2 - \phi'(t, x)^2) + \\ + \sum_{i=1}^2 \frac{m}{2} (\dot{\xi}_i(t)^2 - \Omega^2 \xi_i(t)^2) - e \sum_{i=1}^2 \xi_i(t) \phi(t, a_i), \end{aligned} \quad (63)$$

где $\phi(t, x)$ – поле, $\dot{\phi}$ и ϕ' – его временная и пространственная производные. Осцилляторы описываются их смещениями $\xi_i(t)$, собственной частотой Ω и расположением a_i . Сила взаимодействия обозначается e . Уравнения движения, вытекающие из (63), имеют вид

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) &= -e \sum_{i=1}^2 \xi_i(t) \delta(x - a_i), \\ m(\partial_t^2 + \Omega^2) \xi_i(t) &= -e \phi(t, a_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (64)$$

Данная система напоминает модель плазмы в электродинамике, где диполи (осцилляторы) подчиняются уравнениям движения, аналогичным (64).

В целом система (64) может быть решена двумя способами. В первом случае решаем второе уравнение (64) для $\xi_i(t)$ и подставляем результат в первое уравнение, что приводит к эффективному уравнению для поля $\phi(t, x)$. Во втором случае сначала решаем уравнение для $\phi(t, x)$ и подставляем результат во второе уравнение, которое дает эффективное уравнение для $\xi_i(t)$.

Первый подход соответствует обычному подходу для рассмотрения сил Казимира–Полдера, а второй подход соответствует некоторому атомистическому подходу. Особенность второго подхода, как мы увидим ниже, в том, что он требует для непротиворечивости поместить поле в конечный ящик.

Прежде чем обсуждать детали обоих методов, перепишем уравнения (64) в представлении Фурье, используя соглашения (25):

$$(-\omega^2 - \partial_x^2)\tilde{\phi}_\omega(x) = -e \sum_{i=1}^2 \tilde{\xi}_{i\omega} \delta(x - a_i), \quad (65)$$

$$m(-\omega^2 + \Omega^2)\tilde{\xi}_{i\omega} = -e\tilde{\phi}_\omega(a_i), \quad i = 1, 2. \quad (66)$$

Именно эти формулы мы будем использовать в дальнейшем.

3.1. Первый подход. Решим уравнение (66). Его неоднородное решение записывается как

$$\tilde{\xi}_{i\omega} = -\frac{e}{mN(\omega)} \tilde{\phi}_\omega(a_i), \quad (67)$$

где

$$N(\omega) = -\omega^2 + \Omega^2. \quad (68)$$

Следует отметить, что его однородное решение определяет вклад в энергию, который не зависит от расстояния $b = a_2 - a_1$ между осцилляторами и который не представляет интерес для нашего дальнейшего рассмотрения. Подстановка (68) в (65) дает

$$\left(-\omega^2 - \partial_x^2 - \alpha(\omega) \sum_{i=1}^2 \delta(x - a_i)\right) \tilde{\phi}_\omega(x) = 0 \quad (69)$$

– эффективное уравнение для поля, ответственное за взаимодействие с осцилляторами. В данном случае используем представление

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{mN(\omega)}, \quad (70)$$

которое часто рассматривается как динамическая поляризуемость осцилляторов. Это уравнение подобно приводимому в учебниках уравнению Шредингера с двумя дельта-образными потенциалами. Решение уравнения (69) может быть представлено как

$$\tilde{\phi}_\omega(x) = e^{i\omega x} + \frac{e^2}{m} \sum_{r,s=1}^2 G_0^{(\infty)}(x - a_r) \Phi_{rs}^{-1}(\omega) e^{i\omega a_s}, \quad (71)$$

где

$$G_0^{(\infty)}(x) = \frac{e^{i\omega|x|}}{-2i\omega} \quad (72)$$

– свободная функция Грина, удовлетворяющая условию

$$(-\omega^2 - \partial_x^2)G_0^{(\infty)}(x) = \delta(x) \quad (73)$$

для $x \in (-\infty, \infty)$, т.е. на всей оси x , и предполагается, что $\text{Im } \omega > 0$. Введем представление

$$\Phi_{rs}(\omega) = N(\omega)\delta_{rs} - \frac{e^2}{m} G_0^{(\infty)}(a_r - a_s), \quad (74)$$

подставим решение (71) в уравнение (69), и, используя (73), можно легко проверить, что $\Phi_{rs}^{-1}(\omega)$ является обратной матрицей $\Phi_{rs}(\omega)$ (74).

Решение (71) представляет собой решение рассеяния. Его асимптотические разложения имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_\omega(x) &\underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^{i\omega x} + r(\omega) e^{-i\omega x}, \\ \tilde{\phi}_\omega(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} t(\omega) e^{i\omega x},\end{aligned}\tag{75}$$

где $r(\omega)$ и $t(\omega)$ – коэффициенты отражения и пропускания. Используя эти формулы, запишем коэффициент пропускания

$$t(\omega) = 1 + \frac{e^2}{m} \sum_{r,s=1}^2 \frac{e^{i\omega(a_s - a_r)}}{-2i\omega} \Phi_{rs}^{-1}(\omega).\tag{76}$$

Далее, с учетом (74), после проведения алгебраических преобразований выражение (76) может быть переписано в следующем виде:

$$t(\omega) = \frac{1}{(1 + \alpha(\omega)/2i\omega)^2 - ((\alpha(\omega)/2i\omega)e^{i\omega b})^2},\tag{77}$$

где $\alpha(\omega)$ задано в (70), а $b = a_2 - a_1$ – расстояние между осцилляторами.

Теперь, имея выражение для коэффициента пропускания (77), мы располагаем полной информацией, требуемой для получения вакуумной энергии поля $\phi(t, x)$, которая подчиняется уравнению (69). Процедура получения выражения для вакуумной энергии в случае заданного коэффициента пропускания описана во многих публикациях, мы следуем статье [19] (уравнения (14), (15), с представлением $s_{11}(k) \rightarrow t(\omega)$). Определяя фазу рассеяния как

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2i} \ln \frac{t(\omega)}{t(-\omega)},\tag{78}$$

получаем формулу для вакуумной энергии

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \omega^{1-2\varepsilon} \partial_\omega \delta(\omega),\tag{79}$$

где $\varepsilon > 0$ представляет собой ультрафиолетовую регуляризацию, при $\varepsilon \rightarrow 0$ в результате.

Следует отметить, что уравнение (69), помимо решения рассеяния (71), имеет связанные решения, которые задаются полюсами $t(\omega)$ (77) на мнимой оси, скажем при $\omega = i\kappa_b$. Показано, что уравнение

$$t(i\kappa)^{-1} = 0\tag{80}$$

имеет по крайней мере одно решение для всех значений параметров, входящих в (77). Данные связанные решения имеют отрицательную энергию и заселены ϕ -частицами в основном состоянии системы, образующей некий тип моря Дирака. Следовательно, в данном случае нет необходимости их включения в вакуумную энергию (79).

Представляется удобным провести интегрирование в (79) по мнимым частотам. С этой целью используем (78) и запишем $\delta(\omega)$ как разность двух логарифмов. В первом интеграле поворачиваем интегрирование в положительном направлении, $\omega \rightarrow i\xi$, а во втором интеграле – в отрицательном направлении, $\omega \rightarrow -i\xi$. Эти направления

заранее заданы выбором $\text{Im } \omega > 0$ в (72) и соответствуют повороту Вика. Следуя шагам, описанным в [19], получаем

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \cos(\pi\varepsilon) \int_0^\infty \frac{d\xi}{\pi} \xi \partial_\xi \ln |t(i\xi)| + \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{2\pi} \kappa_b^{1-2\varepsilon}, \quad (81)$$

где κ_b – решение уравнения (80).

Далее можно переписать энергию (81), опуская вклад, который не зависит от расстояния b между осцилляторами, записывая $t(\omega)$ в виде

$$t(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\alpha(\omega)}{2i\omega + \alpha(\omega)} e^{i\omega b} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (82)$$

Далее, вследствие убывания $\ln |t(i\xi)|$ с $t(\omega)$, заданным уравнением (82) для $\xi \rightarrow \infty$, можно избавиться от регуляризации и положить $\varepsilon = 0$. Более того, проведем интегрирование по частям и представим вакуумную энергию в следующем виде:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\pi} \ln |t(i\xi)^{-1}|, \quad (83)$$

что в силу (70) записывается в явном виде:

$$t(i\xi)^{-1} = 1 - \left(\frac{e^2/m}{2\xi(\xi^2 + \Omega^2) - e^2/m} e^{-\xi b} \right)^2. \quad (84)$$

Соотношения (83), (84) являются формой записи вакуумной энергии, которая известна из силы Казимира–Полдера между осцилляторами. Следует отметить частный случай

$$E_0 = -\frac{\pi^2 \hbar}{24b}, \quad (85)$$

который получают из (83) при $b \rightarrow \infty$ или $e^2 \rightarrow \infty$ в том случае, когда задача сводится к задаче на интервале длиной b с граничными условиями Дирихле.

3.2. Второй подход. Начнем с того, что рассмотрим проблему на всей оси. Решение уравнения (65) имеет вид

$$\tilde{\phi}_\omega(x) = -e \sum_{i=1}^2 G_0^{(\infty)}(x - a_i) \tilde{\xi}_{i\omega}, \quad (86)$$

где $G_0^{(\infty)}(x)$ определено в (72). Подстановка в (64) дает

$$\sum_{j=1}^2 \left((-\omega^2 + \Omega^2) \delta_{ij} - \frac{e^2}{m} G_0^{(\infty)}(a_i - a_j) \right) \tilde{\xi}_{j\omega} = 0, \quad (87)$$

что является совокупностью алгебраических уравнений. В действительности множитель перед $\tilde{\xi}_{j\omega}$ в (87) представляет собой всего лишь $\Phi_{ij}(\omega)$ (74). Таким образом, собственные частоты (87) заданы нулями ω_s детерминанта:

$$\det \Phi_{ij}(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_s, \quad (88)$$

и соответствующая вакуумная энергия просто записывается как

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_s \omega_s^{1-2\varepsilon}, \quad (89)$$

где ε – ультрафиолетовая регуляризация.

Однако уравнение (88) с $G_0^{(\infty)}(x)$ из (72) не имеет действительных нулей, что легко проверить. Таким образом, выражение (89) не дает действительную вакуумную энергию. Данное обстоятельство уже было описано в работе [20]. Как было отмечено, это происходит потому, что осцилляторы при взаимодействии посредством поля излучают при помещении в бесконечный объем. Для того чтобы избежать этого, помещаем всю систему в конечную клетку (ящик). В данном случае собственные частоты ω_s , а вместе с ними и вакуумная энергия (89), становятся действительными. Далее, можно устремить размер клетки (ящика) к бесконечности и рассмотреть зависимость вакуумной энергии от расстояния. Проведем соответствующие вычисления. Реализуем конечный ящик как интервал $x \in [-L/2, L/2]$ и поместим осцилляторы в точки $x = a_{1,2}$ с

$$a_{1,2} = \mp \frac{b}{2}, \quad (90)$$

где $b = a_2 - a_1$ представляет собой расстояние между осцилляторами. На границах поставим условие, что поле $\phi(t, x)$ удовлетворяет граничным условиям Дирихле

$$\phi\left(t, \pm \frac{L}{2}\right) = 0. \quad (91)$$

Необходимо найти функцию Грина $G_0(x)$, которая удовлетворяет уравнению (73), как и $G_0^{(\infty)}(x)$, и граничным условиям (91). Ее можно построить из базисных функций

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(k_n\left(x - \frac{L}{2}\right)\right), \quad (92)$$

где $k_n = \pi n/L$. Они образует базис, который удовлетворяет условию

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \varphi_n(x) \varphi_{n'}(x) = \delta_{nn'}, \quad (93)$$

и функция Грина записывается как

$$G_0(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(x')}{-\omega^2 + k_n^2}. \quad (94)$$

Можно провести суммирование в (94). Для $|x| < L$ и $|x'| < L$ получаем

$$G_0(x, x') = \frac{e^{i\omega|x-x'|} - e^{-i\omega|x+x'|}}{-2i\omega} - \frac{\sin \omega x \sin \omega x'}{\omega \sin \omega L} e^{i\omega L}. \quad (95)$$

Однако нам не требуются соответствующие формулы в общем виде. Отметим два особых случая для формулы (95). Благодаря симметричному расположению осцилляторов (90) эти случаи имеют вид

$$\begin{aligned} G_0\left(\pm \frac{b}{2}, \pm \frac{b}{2}\right) &\equiv G_1(\omega) = \frac{\cos \omega b - \cos \omega L}{2\omega \sin \omega L}, \\ G_0\left(\mp \frac{b}{2}, \pm \frac{b}{2}\right) &\equiv G_2(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega(L - |b|))}{2\omega \sin \omega L}, \end{aligned} \quad (96)$$

где мы вводим специальные обозначения $G_{1,2}(\omega)$ для этих величин. Отметим, что формулы (96) справедливы для $|b| < L$.

Используя функцию Грина (94), получаем решение уравнения (65), которое подчиняется граничным условиям (91), в следующем виде:

$$\tilde{\phi}_\omega(x) = -e \sum_{i=1}^2 G_0(x, a_i) \tilde{\xi}_{i\omega}. \quad (97)$$

Подставляем решение в уравнение (66) и вместо (87) получаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^2 \left((-\omega^2 + \Omega^2) \delta_{ij} - \frac{e^2}{m} G_0(a_i, a_j) \right) \tilde{\xi}_{j\omega} = 0. \quad (98)$$

Снова коэффициенты перед $\tilde{\xi}_{j\omega}$ могут быть записаны в виде (74) как

$$\Phi_{rs}(\omega) = N(\omega) \delta_{rs} - \frac{e^2}{m} G_0(a_r, a_s). \quad (99)$$

Дальнейшая процедура представляется достаточно простой. Определим частоты ω_s как нули

$$\det \Phi_{ij}(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_s \quad (100)$$

детерминанта системы (98) и определим вакуумную энергию, как в (89), но в данном случае частоты ω_s являются действительными и, следовательно, энергия E_0 действительна. Следует отметить, что действительность ω_s следует из того факта, что мы имеем эрмитов оператор на конечном отрезке.

На следующем этапе рассмотрим вакуумную энергию E_0 (89) и предел $L \rightarrow \infty$. Для этого перепишем сумму по s в (89) как контурный интеграл, используя утверждение (100) в качестве инструмента, генерирующего моды,

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \int_{\gamma} \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^{1-2\varepsilon} \partial_{\omega} \ln \det \Phi_{ij}(\omega), \quad (101)$$

где путь γ охватывает положительную часть действительной частотной оси. Переписываем логарифм, используя тот факт, что $\Phi_{ij}(\omega)$ (99) представляет собой (2×2) -матрицу, как

$$\begin{aligned} \ln \det \Phi_{ij}(\omega) &= \text{Tr} \ln \Phi_{ij}(\omega) = \\ &= \ln \left[\left(N(\omega) - \frac{e^2}{m} G_0(a_1, a_1) \right)^2 - \left(\frac{e^2}{m} G_0(a_1, a_2) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (102)$$

В соотношении (101) разделим путь интегрирования γ на часть γ_1 в верхней полуплоскости (с $\text{Im } \omega > 0$) и часть γ_2 в нижней полуплоскости (с $\text{Im } \omega < 0$) и рассмотрим предел $L \rightarrow \infty$, используя (96). Получаем

$$\ln \det \Phi_{ij}(\omega) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \left(N(\omega) - \frac{e^2}{m} \frac{1}{-2i\omega} \right)^2 - \left(\frac{e^2}{m} \frac{e^{i\omega b}}{-2i\omega} \right)^2 \quad (103)$$

на γ_1 и комплексно-сопряженную величину на γ_2 . Наконец, повернем путь интегрирования в направлении мнимой оси, $\omega \rightarrow i\xi$ на γ_1 и $\omega \rightarrow -i\xi$ на γ_2 , и из (101) получаем

$$E_0 = -\frac{\hbar}{2} \cos \pi \varepsilon \int_0^\infty \frac{d\xi}{\pi} \xi^{1-2\varepsilon} \partial_\xi \ln \left[\left(N(i\xi) - \frac{e^2/m}{2\xi} \right)^2 - \left(\frac{e^2/m}{2\xi} e^{-\xi b} \right)^2 \right], \quad (104)$$

что после проведения преобразований оказывается аналогично соответствующему представлению в п. 3.1. Данное уравнение представляет собой конечную формулу для вакуумной энергии двух диполей, взаимодействующих посредством поля $\phi(t, x)$, для x на всей оси. Напомним, что мы были вынуждены сначала поместить поле $\phi(t, x)$ в конечный ящик, $x \in [-L/2, L/2]$. Таким образом, мы получаем действительную вакуумную энергию (101), которая зависит от размера L ящика.

Следует отметить, что для достаточно малого ящика $L < L_*$ при

$$L_* = b + \frac{2m}{e^2} \Omega^2 \quad (105)$$

не существует действительного решения уравнения (80) и вклад от связанного решения в (81) отсутствует. С увеличением размеров ящика L за пределы L_* появляется одно или, в зависимости от параметров Ω и b , два связанных решения. Как уже было отмечено, рассмотрим основное состояние, где они уже заняты. Как будет показано в разделе 4, в данном случае в (104) следует взять модуль выражения в квадратных скобках.

Наконец, сравним (104) и (83). Используя (68), можно показать, что, выделяя из логарифма (104) вклад $\ln(N(i\xi) - (e^2/m)/2\xi)$, который не зависит от расстояния b , и затем выкидывая его, мы можем положить $\varepsilon = 0$ в (104), поскольку в данном случае логарифм убывает при $\xi \rightarrow \infty$. С учетом модуля и при интегрировании по частям получаем из (104) выражение, аналогичное (83), для вакуумной энергии из п. 3.1.

Таким образом, мы показали, что первый и второй методы, рассмотренные в данном разделе, являются эквивалентными для компоненты вакуумной энергии, зависящей от расстояния. Данная эквивалентность также обсуждается в работе [21] в случае атомистического подхода при выводе взаимодействия ван-дер-Ваальса, а обобщение для запаздывающего случая приведено в работе [20].

4. ДВА ОСЦИЛЛЯТОРА, СОПРЯЖЕННЫЕ С ТЕРМОСТАТОМ И ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛЯ

Рассмотрим полную систему, состоящую из двух осцилляторов, каждый из которых взаимодействует с термостатом и с полем. Такая система, но без термостата, была рассмотрена в разделе 3. Взаимодействие одного осциллятора с термостатом было рассмотрено в разделе 2. В разделе 3 мы были вынуждены рассматривать случай конечного ящика, поскольку иначе не было бы вещественных собственных частот осцилляторов. В настоящем разделе, строго говоря, такого рода мотивация отсутствует, поскольку в состоянии равновесия все возбуждения обеспечиваются силами Ланжевена. Тем не менее мы продолжим рассмотрение системы в конечном ящике. Как будет показано в настоящем и в следующем разделах, переход к ящику большого размера не является тривиальным. Также следует отметить, что на формальном уровне, пока мы работаем в терминах функции Грина $G_0(x, x')$, формулы не меняются.

Для полной системы лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \int dx \frac{1}{2} (\dot{\phi}(t, x)^2 - \phi'(t, x)^2) + \sum_{i=1}^2 \frac{m}{2} (\dot{\xi}_i(t)^2 - \Omega^2 \xi_i(t)^2) - e \sum_{i=1}^2 \xi_i(t) \phi(t, a_i) + \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty d\omega \frac{\mu}{2} (\dot{q}_{i\omega}(t)^2 + \omega^2 (q_{i\omega}(t) - \xi_i(t))^2), \quad (106)$$

где $\phi(t, x)$ представляет собой поле, а $\dot{\phi}$ и ϕ' – его временная и пространственные производные. Два осциллятора описываются их смещениями $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, а $q_{i\omega}(t)$ – соответствующие переменные термостата. Введем соответствующие канонические импульсы, как это было сделано в разделе 2, и выразим соответствующие части гамильтониана непосредственно через частоты,

$$H_{\text{field}} = \int dx \frac{1}{2} (\dot{\phi}(t, x)^2 + \phi'(t, x)^2), \quad (107)$$

$$H_{\text{osc}} = \sum_{i=1}^2 \frac{m}{2} (\dot{\xi}_i(t)^2 + \Omega^2 \xi_i(t)^2), \quad (108)$$

$$H_{\text{int}} = e \sum_{i=1}^2 \xi_i(t) \phi(t, a_i). \quad (109)$$

Кроме того, имеется гамильтониан для полей термостата и их взаимодействия с осцилляторами. Как и в разделе 2, покажем, что данный подход дает только вклад термостата в полную энергию, что не представляет интереса для данного рассмотрения. Таким образом, средние значения при тепловом равновесии величин (107)–(109) дают полную энергию

$$E = E_{\text{field}} + E_{\text{osc}} + E_{\text{int}}, \quad (110)$$

где

$$E_{\text{field}} = \langle H_{\text{field}} \rangle, \quad E_{\text{osc}} = \langle H_{\text{osc}} \rangle, \quad E_{\text{int}} = \langle H_{\text{int}} \rangle. \quad (111)$$

Рассмотрим уравнения движения, которые следуют из лагранжиана (107). Как и в разделе 2, после устранения полей термостата эти уравнения включают затухание и силы Ланжевена и записывается как

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) &= -e \sum_{i=1}^2 \xi_i(t) \delta(x - a_i), \\ m(\partial_t^2 + \gamma \partial_t + \Omega^2) \xi_i(t) &= -e \phi(t, a_i) + F_{iL}(t), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (112)$$

В данном случае

$$F_{iL}(t) = \int_0^\infty d\omega \frac{\mu \omega^2 l_0}{\sqrt{2}} (e^{-i\omega t} \hat{b}_{i\omega}(0) + e^{i\omega t} \hat{b}_{i\omega}^\dagger(0)) \quad (113)$$

представляет собой силу Ланжевена для i -го осциллятора, а $\hat{b}_{i\omega}(0)$ и $\hat{b}_{i\omega}^\dagger(0)$ – операторы уничтожения и рождения для термостата, привязанного к i -му осциллятору, которые подчиняются условию

$$[\hat{b}_{i\omega}(0), \hat{b}_{j\omega'}^\dagger(0)] = \delta_{ij} \delta(\omega - \omega'), \quad (114)$$

а средние значения при тепловом равновесии определяются обобщающим (33) выражением

$$\langle \hat{b}_{i\omega}^\dagger(0) \hat{b}_{j\omega'}(0) + \hat{b}_{i\omega}(0) \hat{b}_{j\omega'}^\dagger(0) \rangle = \delta_{ij} \delta(\omega - \omega') \mathcal{N}_T(\omega), \quad (115)$$

где $\mathcal{N}_T(\omega)$ задано в (27).

Запишем уравнения (112) после преобразования Фурье (25):

$$\begin{aligned} (-\omega^2 - \partial_x^2) \tilde{\phi}_\omega(x) &= -e \sum_{i=1}^2 \tilde{\xi}_{i\omega} \delta(x - a_i), \\ m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2) \tilde{\xi}_{i\omega} &= -e \tilde{\phi}_\omega(a_i) + \tilde{F}_{i\omega}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (116)$$

они представляют собой обобщения уравнений (26) и (65), а также (66).

Как и в разделе 3, воспользуемся двумя методами. Следовательно, с самого начала рассмотрим поле $\phi(t, x)$ на конечном отрезке, $x \in [-L/2, L/2]$, которое подчиняется граничным условиям Дирихле (91).

4.1. Первый метод. В данном случае решим второе уравнение (116),

$$\tilde{\xi}_{i\omega} = -\frac{e}{mN(\omega)} \tilde{\phi}_\omega(a_i) + \frac{\tilde{F}_{i\omega}}{mN(\omega)}, \quad (117)$$

получим неоднородное решение в соответствии с процедурой, описанной в разделе 2, и установим, что в присутствии термостата однородное решение исчезает во времени, а возбуждения поддерживаются силами Ланжевена. Затем подставим решение (117) в первое уравнение (116) и получим уравнение

$$\left(-\omega^2 - \partial_x^2 - \frac{e^2}{mN(\omega)} \sum_{i=1}^2 \delta(x - a_i) \right) \tilde{\phi}_\omega(x) = -\frac{e}{mN(\omega)} \sum_{i=1}^2 \delta(x - a_i) \tilde{F}_{i\omega}. \quad (118)$$

Это уравнение представляет собой неоднородное обобщение уравнения (69). Для решения данного уравнения вводим функцию Грина $G(x, x')$, которая подчиняется уравнению

$$\left(-\omega^2 - \partial_x^2 - \frac{e^2}{mN(\omega)} \sum_{i=1}^2 \delta(x - a_i) \right) G(x, x') = \delta(x - x') \quad (119)$$

и граничным условиям (91). Данная функция Грина может быть представлена в следующем виде:

$$G(x, x') = G_0(x, x') + \sum_{r,s=1}^2 \frac{e^2}{m} G_0(x, a_r) \Phi_{rs}^{-1}(\omega) G_0(a_s, x'). \quad (120)$$

Здесь свободная функция Грина $G_0(x, x')$ задана в (94) и определено обобщение (99)

$$\Phi_{rs}(\omega) = N(\omega) \delta_{rs} - \frac{e^2}{m} G_0(a_r, a_s), \quad (121)$$

где $N(\omega)$ определено в (27) и, как ранее, мы имеем $\sum_s \Phi_{rs} \Phi_{st}^{-1} = \delta_{rt}$.

Отметим следующий особый случай:

$$G(x, a_i) = G_0(x, a_r) \left(\delta_{ri} + \frac{e^2}{m} \Phi_{rs}^{-1}(\omega) G_0(a_s, a_i) \right) = N(\omega) G_0(x, a_r) \Phi_{rs}^{-1}(\omega), \quad (122)$$

где использовано (121). Для упрощения обозначений в данных формулах и ниже мы используем соглашение о суммировании.

Теперь, используя полученные формулы, мы можем записать решение уравнения (118) как

$$\tilde{\phi}_\omega(x) = -\frac{e}{mN(\omega)} G(x, a_i) \tilde{F}_{i\omega}, \quad (123)$$

и, используя (122) в более простом виде (при выражении через свободную функцию Грина), получаем

$$\tilde{\phi}_\omega(x) = -\frac{e}{m} G_0(x, a_r) \Phi_{ri}^{-1}(\omega) \tilde{F}_{i\omega}. \quad (124)$$

Далее подставим (124) в (117),

$$\tilde{\xi}_{i\omega} = \left(\frac{e^2}{m^2 N(\omega)} G_0(a_i, a_r) \Phi_{rj}^{-1}(\omega) + \frac{1}{mN(\omega)} \right) \tilde{F}_{i\omega}, \quad (125)$$

и проведем упрощение с использованием (121),

$$\tilde{\xi}_{i\omega} = \frac{1}{m} \Phi_{ij}^{-1}(\omega) \tilde{F}_{j\omega}. \quad (126)$$

Таким образом, формулы (124) и (126) представляют собой решения уравнений движения, полученные первым способом. Оба решения пропорциональны силам Ланжевена.

4.2. Второй метод. В данном случае сначала решим уравнения (116),

$$\tilde{\phi}_\omega(x) = -e \sum_{i=1}^2 G_0(x, a_i) \tilde{\xi}_{i\omega}, \quad (127)$$

где $G_0(x, x')$ задано в (94). Подставим данное решение в уравнения (116) и получим

$$\left((-\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2) \delta_{ij} - \frac{e^2}{m} G_0(a_i, a_j) \right) \tilde{\xi}_{j\omega} = \frac{1}{m} \tilde{F}_{i\omega}, \quad (128)$$

где вновь проводим суммирование и с помощью (121), (27) запишем

$$\Phi_{ij}(\omega) \tilde{\xi}_{j\omega} = \frac{1}{m} \tilde{F}_{i\omega}. \quad (129)$$

Это алгебраическая система, и ее решение имеет вид

$$\tilde{\xi}_{i\omega} = \frac{1}{m} \Phi_{ij}^{-1}(\omega) \tilde{F}_{j\omega}. \quad (130)$$

Наконец, подставим это решение в уравнения (116), что дает

$$\tilde{\phi}_\omega(x) = -\frac{e}{m} G_0(x, a_i) \Phi_{ij}^{-1}(\omega) \tilde{F}_{j\omega}. \quad (131)$$

Таким образом, формулы (130) и (131) представляют собой решения уравнений движения, полученных вторым способом. Оба решения пропорциональны силам Ланжевена.

Сравнение решений (130) и (131) с решениями (124) и (126) показывает, что оба метода дают одинаковые выражения для решений. Следует отметить, что те же выражения появляются в неоднородных решениях, которые рассматриваются в данном пункте. Уравнения (69) и (87) для однородных решений оказываются различными.

4.3. Средние значения при тепловом равновесии и свободная энергия.

Для расчетов свободной энергии последуем процедуре, описанной в разделе 2. Прежде всего рассчитаем средние значения при тепловом равновесии для гамильтонианов (107)–(109) и, следовательно, свободной энергии. Подставляем решения (130) и (131), или аналогично (124) и (126), и получаем средние значения при тепловом равновесии (115). Подстановка решений дает двойные интегралы по ω , и вычисление средних значений при тепловом равновесии устраняет одно из интегрирований. Более того, для осцилляторов появляются двойные суммы, которые аналогичным образом могут быть сведены к однократным суммам. Прежде чем начать данную процедуру, следует отметить, что, используя формулы (25), мы возвращаемся к зависящим от времени решениям.

Процедура вычисления средних значений при тепловом равновесии может быть унифицирована для различных полей. Пусть

$$\hat{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} a(\omega) \tilde{F}_{\omega}, \quad \hat{B}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} b(\omega) \tilde{F}_{\omega} \quad (132)$$

являются двумя операторами подобно решениям (130) и (131). Используя (28), получаем

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\gamma m \hbar \omega}{\pi}} (a(-\omega) e^{-i\omega t} \hat{b}_{-\omega}(0) + a(\omega) e^{-i\omega t} \hat{b}_{-\omega}(0)), \\ \hat{B}(t) &= \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\gamma m \hbar \omega}{\pi}} (b(-\omega) e^{-i\omega t} \hat{b}_{-\omega}(0) + b(\omega) e^{-i\omega t} \hat{b}_{-\omega}(0)). \end{aligned} \quad (133)$$

Далее вычислим средние значения при тепловом равновесии симметризуемого произведения данных операторов и, используя (113) и (115), получим

$$\langle \hat{A}(t) \hat{B}(t) + \hat{B}(t) \hat{A}(t) \rangle = \int_0^{\infty} d\omega \frac{\gamma m \hbar \omega}{\pi} \mathcal{N}_T(\omega) (a(\omega) b(-\omega) + a(-\omega) b(\omega)). \quad (134)$$

Следует отметить, что все операторы в любом случае появляются в соответствующих частях гамильтониана в симметризуемом виде. Как следствие, все средние значения при тепловом равновесии являются действительными. В случае равенства операторов это утверждение является тривиальным.

Более подробно, подставим (124) в (107), используя (111), что дает

$$E_{\text{field}} = \int_0^{\infty} d\omega \frac{\gamma m \hbar \omega}{\pi} \mathcal{N}_T(\omega) \frac{e^2}{2m^2} \Phi_{ij}^{-1}(\omega) m_{jk} \Phi_{ki}^{-1}(-\omega) \quad (135)$$

при

$$m_{jk} = \int_{-L/2}^{L/2} dx (\omega^2 G_0(x, a_j) G_0(x, a_k) + (\partial_x G_0(x, a_j)) (\partial_x G_0(x, a_k))). \quad (136)$$

Далее при подстановке (126) в (108), используя (111), получим

$$E_{\text{osc}} = \int_0^\infty d\omega \frac{\gamma m \hbar \omega}{\pi} \mathcal{N}_T(\omega) \frac{1}{2m} (\omega^2 + \Omega^2) \Phi_{ij}^{-1}(\omega) \Phi_{ji}^{-1}(-\omega) \quad (137)$$

и, наконец, при подстановке (124) и (126) в (108) получаем

$$E_{\text{int}} = \int_0^\infty d\omega \frac{\gamma m \hbar \omega}{\pi} \mathcal{N}_T(\omega) \frac{-e^2}{m^2} \Phi_{ij}^{-1}(\omega) G_0(a_j, a_k) \Phi_{ki}^{-1}(-\omega). \quad (138)$$

Отметим, что в данных формулах используется условие суммирования.

Рассмотрим более детально структуру полученных интегралов. Прежде всего имеем равенство

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz G_0(x, z) G_0(y, z) = \frac{1}{2\omega} \partial_\omega G_0(x, y), \quad (139)$$

которое следует из (94) и (93). Далее, имеет место

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz (\partial_z G_0(x, z)) (\partial_z G_0(z, y)) = \left(1 + \frac{\omega}{2} \partial_\omega\right) G_0(x, y), \quad (140)$$

так что

$$m_{jk} = (1 + \omega \partial_\omega) G_0(a_j, a_k). \quad (141)$$

Просуммируем соответствующие множители в (135), (137), (138):

$$\begin{aligned} M &\equiv \frac{e^2}{2m^2} \Phi_{ij}^{-1}(\omega) m_{jk} \Phi_{ki}^{-1}(-\omega) + \frac{1}{2m} (\omega^2 + \Omega^2) \Phi_{ij}^{-1}(\omega) \Phi_{ji}^{-1}(-\omega) + \\ &\quad + \frac{-e^2}{m^2} \Phi_{ij}^{-1}(\omega) G_0(a_j, a_k) \Phi_{ki}^{-1}(-\omega) = \\ &= \frac{1}{2m} \Phi_{ki}^{-1}(\omega) \left((\omega^2 + \Omega^2) \delta_{ij} + \frac{e^2}{m} (-1 + \omega \partial_\omega) G_0(a_i, a_j) \right) \Phi_{jk}^{-1}(-\omega). \end{aligned} \quad (142)$$

Принимая во внимание (121), получим функцию

$$\Phi_{rs}(\omega) = (-\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2) \delta_{rs} - \frac{e^2}{m} G_0(a_r, a_s) \quad (143)$$

и ее производную

$$\omega \partial_\omega \Phi_{rs}(\omega) = (-2\omega^2 + i\gamma\omega) \delta_{rs} - \frac{e^2}{m} \omega \partial_\omega G_0(a_r, a_s). \quad (144)$$

Далее составим следующее выражение и упростим его:

$$(\partial_\omega \Phi_{ij}(\omega)) \Phi_{jk}(-\omega) + (\omega \leftrightarrow -\omega) = 2i\gamma \left((\omega^2 + \Omega^2) \delta_{ik} + \frac{e^2}{m} (-1 + \omega \partial_\omega) G_0(a_i, a_k) \right). \quad (145)$$

Данные формулы позволяют представить (142) в виде

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2m} \frac{1}{2i\gamma} \Phi_{ki}^{-1}(\omega) [(\partial_\omega \Phi_{ij}(\omega)) \Phi_{jk}(-\omega) + (\omega \leftrightarrow -\omega)] \Phi_{ki}^{-1}(-\omega) = \\ &= \frac{1}{2m} \frac{1}{2i\gamma} [\partial_\omega \text{Tr} \ln \hat{\Phi}(\omega) - \partial_\omega \text{Tr} \ln \hat{\Phi}(-\omega)], \end{aligned} \quad (146)$$

где $\hat{\Phi}(\omega)$ – (2×2) -матрица с элементами $\Phi_{ij}(\omega)$. Также используем симметрию, следующую из (90) и (96). Правая часть соотношения (146) придает смысл определению

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2i} \text{Tr} \ln \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\hat{\Phi}(-\omega)}, \quad (147)$$

которое рассматривается вместе с (49) и (78) как некий вид фазы. Следует отметить, что все три выражения различны, а общей является их структура как фаза в комплексном выражении. В данном случае отсутствует неясность, связанная с использованием одного и того же обозначения, поскольку каждое из них применяется только в соответствующем разделе настоящей статьи.

Используя (147), запишем M в окончательном виде:

$$M = \frac{1}{2\gamma m} \partial_\omega \delta(\omega). \quad (148)$$

Добавляя энергию (110), получаем из (135), (137), (138) и (142)

$$E = \int_0^\infty d\omega \frac{\gamma m \hbar \omega}{\pi} \mathcal{N}_T(\omega) M, \quad (149)$$

и с учетом (148)

$$E = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \hbar \omega \mathcal{N}_T(\omega) \partial_\omega \delta(\omega), \quad (150)$$

что представляет собой окончательное выражение для тепловой энергии в системе двух осцилляторов, взаимодействующих с их термостатами и между собой посредством поля. В действительности это выражение похоже на энергию (50) для одиночного осциллятора, взаимодействующего с термостатом, однако смысл фазы $\delta(\omega)$ иной. Более того, формула (150) выглядит как вакуумная энергия (79) поля, взаимодействующего с осцилляторами, где $\delta(\omega)$ имеет смысл сдвига рассеивающей фазы.

Из (150) и (32) получаем соответствующую свободную энергию

$$F = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \left(\frac{\hbar \omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right) \partial_\omega \delta(\omega), \quad (151)$$

где очевидно разделение на член с нулевой температурой и часть, зависящую от температуры. Данная формула аналогична формуле (51) в разделе 2. Если выполняется равенство $\delta(0) = 0$, проведем интегрирование по частям и получим следующие формулы:

$$F_0 = -\frac{\hbar}{2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \delta(\omega), \quad \Delta_T F = -\hbar \int_0^\infty d\omega \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \delta(\omega), \quad (152)$$

которые также аналогичны соответствующим формулам (54) в разделе 2. Также следует повторить, что при использовании уравнений (150), (151), (152) внутренняя и свободная энергии полной системы, включая диссипацию, выражаются через действительные частоты.

Данный пункт завершим расчетом следа в $\delta(\omega)$ (147). Это возможно, поскольку мы рассматриваем два осциллятора при симметричном расположении (90) внутри

конечного ящика согласно п. 3.2 и при равной константе связи ϵ . В этом случае матрица $\hat{\Phi}(\omega)$ с элементами $\Phi_{rs}(\omega)$ (143) имеет особый вид:

$$\hat{\Phi} = \left(-\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2 - \frac{\epsilon^2}{m}G_1(\omega) \right) \mathbb{1} - \frac{\epsilon^2}{m}G_2(\omega)\sigma_1, \quad (153)$$

где $\mathbb{1}$ представляет собой единичную матрицу и $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а функции $G_{1,2}(\omega)$ определены в (96). Используя данные формулы, получаем

$$\text{Tr} \ln \hat{\Phi}(\omega) = \sum_{\sigma=\pm 1} \ln(\Phi_{\sigma}(\omega)), \quad (154)$$

где

$$\Phi_{\sigma}(\omega) \equiv -\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2 - \frac{\epsilon^2}{m}G_{\sigma}(\omega) \quad (155)$$

и

$$G_{\sigma}(\omega) \equiv G_1(\omega) + \sigma G_2(\omega). \quad (156)$$

Соотношение (154) справедливо, поскольку в данном случае матрицы имеют размер 2×2 . Интерпретация такова: значение $\sigma = 1$ соответствует симметричной функции $\phi(t, x)$, а $\sigma = -1$ – антисимметричной. Очевидно, что вследствие симметрии энергия представляет собой сумму двух случаев.

Таким образом, вследствие данных формул для $\delta(\omega)$ (147) справедливо представление

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2i} \sum_{\sigma=\pm 1} \ln \frac{\Phi_{\sigma}(\omega)}{\Phi_{\sigma}(-\omega)}, \quad (157)$$

что мы и будем использовать в дальнейшем.

Выражение (151) – основной результат данного раздела. Для рассматриваемой системы (106) оно представляет собой свободную энергию в случае диссипации в терминах действительных частот. В следующем разделе мы исследуем некоторые свойства такого представления.

5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАЦУВАРЫ ДЛЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ В ЯЩИКЕ

В данном разделе рассмотрим более подробно свойства представления (151) для свободной энергии полной системы (106). Напомним, что данная система помещена в конечный ящик размером L .

5.1. Предел $\gamma \rightarrow 0$. Сначала рассмотрим случай $\gamma \rightarrow 0$, иными словами, предел исчезающей диссипации. В выражении для энергии E (150) при $\delta(\omega)$, заданной в (157), нельзя непосредственно положить $\gamma = 0$, поскольку нули функций $\phi_{\sigma}(\omega)$ и $\phi_{\sigma}(-\omega)$ оказываются на действительной оси ω и являются препятствиями на пути интегрирования. Вместо этого применим формулу Сохоцкого–Племеля. Для этого определим

$$\Phi_{\sigma}^{(0)}(\omega) = \Phi_{\sigma}(\omega)|_{\gamma=0} = -\omega^2 + \Omega^2 - \frac{\epsilon^2}{m}G_{\sigma}(\omega). \quad (158)$$

Далее отметим, что

$$\partial_{\omega} \ln \Phi_{\sigma}(\omega) = \frac{\partial_{\omega} \Phi_{\sigma}(\omega)}{\Phi_{\sigma}(\omega)}. \quad (159)$$

Используя указанную формулу, имеем

$$\frac{1}{\Phi_\sigma(\omega)} \underset{\gamma \rightarrow 0}{=} -i\pi\delta(\Phi_\sigma^{(0)}(\omega)) \quad (160)$$

(главные части сокращаются) и справедливо равенство

$$\partial_\omega \ln \Phi_\sigma(\omega) = -i\pi\delta(\Phi_\sigma^{(0)}(\omega))\partial_\omega \Phi_\sigma^{(0)}(\omega), \quad (161)$$

что дает

$$\partial_\omega \delta(\omega) = -\pi\delta(\Phi_\sigma^{(0)}(\omega))\partial_\omega \Phi_\sigma^{(0)}(\omega). \quad (162)$$

Подставляя данное выражение в (150), получаем следующее выражение для энергии:

$$E \underset{\gamma \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \hbar \omega \mathcal{N}_T(\omega) \delta(\Phi_\sigma^{(0)}(\omega)) \partial_\omega \Phi_\sigma^{(0)}(\omega). \quad (163)$$

Функция $\Phi_\sigma^{(0)}(\omega)$ (108) описывает систему двух осцилляторов, взаимодействующих посредством поля в отсутствие термостата или при нулевой температуре. Ее нули ω_s ,

$$\Phi_\sigma^{(0)}(\omega_s) = 0, \quad (164)$$

представляют собой собственные частоты согласно (100), где однако нет разделения на симметричные и антисимметричные решения. Нули уравнения (164) могут быть использованы для представления дельта-функции в (163), в итоге получаем

$$E = \frac{1}{2} \sum_s \hbar \omega_s \mathcal{N}_T(\omega) \operatorname{sgn}(-\partial_\omega \Phi_\sigma^{(0)}(\omega)|_{\omega=\omega_s}), \quad (165)$$

что с точностью до знака аналогично (89) (без регуляризации). Появление знаковой функции оказывается немного неожиданным. Однако в данном случае используем простую обходную процедуру. Из (158) получаем

$$\partial_\omega \Phi_\sigma^{(0)}(\omega) = -2\omega - \frac{e^2}{m} \partial_\omega G_\sigma(\omega), \quad (166)$$

что в точках $\omega = \omega_s$ отрицательно, по крайней мере, для малой константы связи, это обеспечивает ожидаемый знак в (165). Таким образом, воспроизводим для $\gamma \rightarrow 0$ представление E_0 (89), обобщение которого для конечной температуры получено путем выбора $Z = \sum_s e^{-\beta\omega_s}$. Сходное утверждение справедливо для свободной энергии.

5.2. Предел $T \rightarrow 0$. Рассмотрим предел $T \rightarrow 0$ в зависящей от температуры части $\Delta_T F$ (152) свободной энергии. Для этого необходимо получить $\delta(\omega)$ (157) для $\omega \rightarrow 0$. Используя (155), получим

$$\delta(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{=} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\gamma\omega}{\Omega^2 - e^2 G_\sigma(0)}, \quad (167)$$

что можно использовать вместо (58) и действует аналогично тому, как описано в п. 2.4, тогда имеем

$$\Delta_T F \underset{T \rightarrow 0}{=} - \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\gamma T^2}{\hbar(\Omega^2 - (e^2/m)G_\sigma(0))} \frac{\zeta(2)}{\pi}, \quad (168)$$

откуда следует знакомый результат для энтропии.

Из (96) мы получаем

$$G_{-}(0) = \frac{b(L-b)}{2L}, \quad G_{+}(0) = \frac{L-b}{2} \quad (169)$$

и в (167) предполагаем, что $b < L < L_*$, $L_* = b + (2m/b)\Omega^2$, т.е. находимся в диапазоне, где знаменатель не меняет свой знак. Более высокие значения L обсудим ниже.

5.3. Переход к представлению Мацубары. Переход к частотам Мацубары для свободной энергии (151) может быть осуществлен при повороте частотного интегрирования по направлению к мнимой оси. Для этого разобьем логарифм в (157) на две части:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2i} \sum_{\sigma=\pm 1} (\ln \Phi_{\sigma}(\omega) - \ln \Phi_{\sigma}(-\omega)). \quad (170)$$

Поскольку нули функций $\Phi_{\sigma}(\omega)$ (155) находятся в верхней полуплоскости, повернем путь интегрирования вниз, $\omega \rightarrow -i\xi$. Соответственно второй член направим вверх, $\omega \rightarrow i\xi$. Данный выбор направлений диктуется знаком γ . Определим функции Грина (96), входящие в $\Phi_{\sigma}(\omega)$, в ящике и продолжим путь интегрирования к обеим сторонам действительной оси ω . Только после перехода к пределу $L \rightarrow \infty$ мы можем определить знак для $\text{Im } \omega$ (в разделе 3 $\text{Im } \omega > 0$). В некотором смысле это можно назвать процедурой “двойного поворота Вика”, поскольку поворот только в одном направлении невозможен, и мы должны разбить свободную энергию на две части и осуществить различные повороты.

Далее используем (151),

$$\frac{\hbar\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) = T \ln\left(2 \text{sh} \frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \quad (171)$$

и его продолжение

$$\ln\left(2 \text{sh} \frac{\beta\hbar(-i\xi)}{2}\right) = \ln\left|2 \sin \frac{\beta\hbar\xi}{2}\right| - i\pi \sum_{l=0}^{\infty} \Theta(\xi - \xi_l),$$

где $\xi_l = 2\pi T l$ представляет собой частоты Мацубары. Это соотношение вытекает из того, что логарифм имеет разрезы, начиная с $\xi = \xi_l$.

Таким образом, получаем

$$F = T \int_0^{\infty} d\xi \sum_{l=0}^{\infty} \Theta(\xi - \xi_l) \partial_{\xi} \ln \Phi_{\sigma}(-i\xi_l), \quad (172)$$

где мы использовали $\Phi_{\sigma}(\omega)|_{\omega=-i\xi} = \Phi_{\sigma}(-\omega)|_{\omega=i\xi}$. Таким образом, после поворотов два выражения под знаком суммы в (170) становятся равными.

Наконец, проводим интегрирование по частям и получаем выражение

$$F = T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \ln \Phi_{\sigma}(-i\xi_l) \quad (173)$$

для свободной энергии в терминах частот Мацубары. Явные формулы для элементов могут быть записаны следующим образом:

$$\Phi_{\sigma}(-i\xi_l) = \xi_l^2 + \xi_l\gamma + \Omega^2 - \frac{e^2}{m}G_{\sigma}(-i\xi_l), \quad (174)$$

и из (96) и (158) получаем

$$G_{\sigma}(-i\xi) = \frac{\operatorname{ch} \xi L - \operatorname{ch} \xi b + \sigma[1 - \operatorname{ch}(\xi(L - b))]}{2\xi \operatorname{sh} \xi L}. \quad (175)$$

Следует отметить, что все приведенные выражения являются действительными, пока размер L ящика невелик, $L < L_*$. Также нет сложностей с нулевой частотой Мацубары, как следует из (155) и (169).

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАЦУБАРЫ ДЛЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ $L \rightarrow \infty$

Рассмотрим систему, состоящую из двух осцилляторов, взаимодействующих с полем и с их термостатами на всей оси, иными словами, принимаем предел $L \rightarrow \infty$ в заключительных формулах раздела 4. По-существу ящик учитывается в формулах для свободной энергии (151) свободными функциями Грина $G_{1,2}(\omega)$ (96).

Прежде чем переходить к пределу $L \rightarrow \infty$, отметим, что данные функции Грина включены в выражения для свободной энергии через $\Phi_{\sigma}(\omega)$ (155) и что мы переходим к аналитическому продолжению в нижнюю полуплоскость. Как было показано в п. 5.3, это направление определяется тем обстоятельством, что нули $\Phi_{\sigma}(\omega)$ находятся в верхней полуплоскости. Следовательно, необходимо установить предел в (96) для $\operatorname{Im}(\omega) < 0$, что дает

$$\begin{aligned} G_1^{(\infty)}(\omega) &\equiv \lim_{L \rightarrow \infty} G_1(\omega) = \frac{1}{2i\omega}, \\ G_2^{(\infty)}(\omega) &\equiv \lim_{L \rightarrow \infty} G_2(\omega) = \frac{e^{-i\omega b}}{2i\omega}. \end{aligned} \quad (176)$$

Подставляя данные выражения в (155), получаем функцию

$$\Phi_{\sigma}^{(\infty)}(\omega) = -\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2 - \frac{e^2}{m} \frac{1 + \sigma e^{-i\omega b}}{2i\omega}, \quad (177)$$

которую следует подставить в фазу (157) вместо $\Phi_{\sigma}(\omega)$, а затем в выражение для свободной энергии (151).

Далее представляет интерес только та часть свободной энергии, которая зависит от расстояния. Это можно получить при записи $\Phi_{\sigma}^{(\infty)}(\omega)$ в виде

$$\Phi_{\sigma}^{(\infty)}(\omega) = \left(-\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2 - \frac{e^2}{2i\omega m} \right) L_{\sigma}(\omega), \quad (178)$$

где

$$L_{\sigma}(\omega) = 1 - \sigma \frac{(e^2/m) e^{-i\omega b}}{2i\omega(-\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2) - e^2/m}. \quad (179)$$

Первый множитель дает (в виде логарифма) вклад компоненты, которая не зависит от расстояния, и мы опустим его. Второй множитель определяет новую фазу

$$\delta_L(\omega) = \frac{1}{2i} \ln \frac{L(\omega)}{L(-\omega)} \quad (180)$$

при

$$L(\omega) \equiv L_+(\omega)L_-(\omega) = 1 - \left(\frac{(e^2/m)e^{-i\omega b}}{2i\omega(-\omega^2 + i\gamma\omega + \Omega^2) - e^2/m} \right)^2, \quad (181)$$

где проводится суммирование по σ . Таким образом, часть свободной энергии, которая не зависит от расстояния, записывается как

$$F = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \right) \partial_\omega \delta_L(\omega), \quad (182)$$

что представляет собой вполне явное выражение.

6.1. Предел $T \rightarrow 0$. Применим подход, как в п. 2.4 или в п. 5.2, и рассмотрим производную фазы для $\omega \rightarrow 0$

$$\partial_\omega \delta_L(\omega) = c_2 + O(\omega^2), \quad (183)$$

где

$$c_2 = \frac{b^2(e^2/m)^2 + 2(\gamma - 2b\Omega^2)(e^2/m) + 6\Omega^4}{(2\Omega^2 - b(e^2/m))(e^2/m)}. \quad (184)$$

Свободная энергия при $T \rightarrow 0$ записывается как

$$\Delta_T F \underset{T \rightarrow 0}{=} -\frac{T^2 \zeta(2)}{\pi \hbar} c_2 + \dots \quad (185)$$

Следует отметить, что для $\Omega = 0$

$$c_2|_{\Omega=0} = -b - \frac{2\gamma}{b(e^2/m)} \quad (186)$$

и низкотемпературное поведение $\Delta_T F$ не меняется.

6.2. Переход к представлению Мацубары. Переход к частотам Мацубары осуществляется по аналогии с п. 5.3. Разобьем фазу на две части:

$$\delta_L(\omega) = \frac{1}{2i} (\ln L(\omega) - \ln L(-\omega)), \quad (187)$$

и повернем контур вниз ($\omega = -i\xi$) в первой части и вверх ($\omega = i\xi$) во второй части. Как отмечалось выше, данный подход может рассматриваться как некий вид двойного поворота Вика. Однако, поступая так, мы записываем интеграл по ω для свободной энергии (182), который является интегралом от разности (187), как разность интегралов. Это нельзя осуществить напрямую, поскольку при $\omega \rightarrow 0$ справедливо

$$L(\omega) = 2i\omega \left(b - \frac{2\Omega^2}{e^2/m} \right) + O(\omega^2), \quad (188)$$

что следует из (181). Как следствие, каждый из интегралов будет расходиться при $\omega = 0$. Очевидное решение – провести интегрирование по ω сначала с некоторого $\varepsilon > 0$ и рассмотреть предел $\varepsilon \rightarrow 0$ после поворотов,

$$F = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \left(\frac{\hbar\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \right) \partial_{\omega} \ln L(\omega) - \int_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \left(\frac{\hbar\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \right) \partial_{\omega} \ln L(-\omega) \right]. \quad (189)$$

Далее разобьем пути интегрирования на две части. Первая часть представляет собой полукруг радиусом ε , заданный $\omega = \varepsilon e^{-i\varphi}$ в первом интеграле и $\omega = \varepsilon e^{i\varphi}$ во втором интеграле, при этом в обоих случаях $\varphi \in [0, \pi/2]$. Вторая часть представляет собой прямую линию вдоль мнимой оси при $\omega = -i\xi$ для первого интеграла и $\omega = i\xi$ для второго интеграла, при этом в обоих случаях $\xi \in [\varepsilon, \infty)$. Из интегралов вдоль прямых линий, используя (171), получаем

$$F_{\text{lin}} = \frac{T}{2\pi i} \times \times \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} d\xi \left(\ln \left| 2 \sin \frac{\beta\xi}{2} \right| - i\pi \sum_{l=0}^{\infty} \Theta(\xi - \xi_l) \right) \partial_{\xi} \left(\ln |L(-i\xi)| + i\pi \Theta(\xi_* - \xi) \right) - \int_{\varepsilon}^{\infty} d\xi \left(\ln \left| 2 \sin \frac{\beta\xi}{2} \right| + i\pi \sum_{l=0}^{\infty} \Theta(\xi - \xi_l) \right) \partial_{\xi} \left(\ln |L(-i\xi)| - i\pi \Theta(\xi_* - \xi) \right) \right]. \quad (190)$$

В данном случае мы имеем дело с еще одной особенностью, поскольку функция $L(-i\xi)$ имеет ноль, т. е. является действительной при $\xi_* > 0$ так, что справедливо равенство $L(-i\xi_*) = 0$. По этой причине логарифмы L приобретают мнимые части, как показано в приведенных выше формулах. Знаки определяются условием $L(-i\xi) > 0$ при достаточно больших ξ и зависят от того, с какой стороны находится точка ветвления логарифма.

Причина появления нулей – связанные состояния, которые обсуждались выше. Также следует отметить, что данная особенность появляется и для конечного ящика при $L > L_*$.

Проводим упрощение и интегрирование для вклада при $l = 0$ с учетом $\Theta(\xi - \xi_0) = 1$ для $\xi > 0$; в результате получаем

$$F_{\text{lin}} = \frac{T}{2} \ln |L(-i\varepsilon)| + T \sum_{l=1}^{\infty} \ln |L(-i\xi_l)| - T \left| 2 \sin \frac{\beta\hbar\xi_*}{2} \right|. \quad (191)$$

В действительности данное выражение расходится при $\varepsilon \rightarrow 0$. При использовании (188) справедливо

$$\frac{T}{2} \ln |L(-i\varepsilon)| = \frac{T}{2} \ln \varepsilon + \frac{T}{2} \ln \left| 2 \left(b - \frac{2\Omega^2}{e^2/m} \right) \right| + O(\varepsilon), \quad (192)$$

и расходимость является логарифмической.

Остается рассчитать вклад от полукругов. Ограничивая наше рассмотрение для вкладов, не исчезающих при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{\hbar\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sim \ln(\beta\hbar\varepsilon e^{-i\varphi})$$

для первого вклада и комплексно-сопряженное выражение для второго вклада. Учитывая (188), мы имеем $\partial_\xi \ln L(-i\xi) = 1/\xi + O(1)$. Подстановка в (182) дает

$$\begin{aligned} F_{\text{h.circ.}} &= -\frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi (\ln(\beta\hbar\varepsilon e^{-i\varphi}) + \ln(\beta\hbar\varepsilon e^{i\varphi})) = \\ &= -\frac{T}{2} \ln(\beta\varepsilon) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (193)$$

Мы видим, что расходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$, как и следовало ожидать, компенсируется точно такой же расходимостью из (191), и мы получаем сумму выражений (191) и (193) в виде

$$F = \frac{T}{2} \ln \left| 2 \left(b - \frac{2\Omega^2}{e^2/m} \right) T \right| + T \sum_{l=1}^{\infty} \ln |L(-i\xi_l)| - T \left| 2 \sin \frac{\beta\hbar\xi_*}{2} \right|. \quad (194)$$

Данное выражение и формула

$$L(-i\xi) = 1 - \left(\frac{(e^2/m) e^{-\xi b}}{2\xi(\xi^2 + \gamma\xi + \Omega^2) - e^2/m} \right)^2 \quad (195)$$

представляют собой окончательные выражения для свободной энергии в случае диссипации в представлении Мацубары. Разница с формулой (173) может быть сформулирована как формальная замена

$$L(-i\xi|_{l=0}) \rightarrow 2 \left(b - \frac{2\Omega^2}{e^2/m} \right) T \quad (196)$$

для вклада от нулевой частоты Мацубары. Следует отметить, что данная модификация не зависит от диссипации (γ отсутствует в (196)), но скорее является свойством модели.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена простая система, состоящая из двух гармонических осцилляторов, которые взаимодействуют со скалярным полем размерности $1+1$ и с термостатами, как модель силы Казимира–Полдера в электродинамике. Взаимодействие с термостатами обеспечивает диссипацию, следующую из базовых принципов в том смысле, что данная система имеет гамильтониан. Сначала рассмотрена система без термостата и сделан вывод о том, что в данном случае необходимо сначала использовать конечный ящик для правильного описания. Далее в рассмотрение включен термостат. Выведено относительно простое представление свободной энергии в терминах действительных частот (формулы (151), (157) и (155)), которое отсутствует в литературе, и предложен простой и прямой метод. Заметим, что это еще один пример “замечательной формулы”, описанной в работе [18]. Следует подчеркнуть, что данные действительные частоты не являются собственными частотами (резонансами) диссипативной системы. Исследованы частные случаи, такие как исчезающая диссипация, и показано, что результаты воспроизводят случай первоначального отсутствия диссипации.

Более того, рассмотрено низкотемпературное поведение и показано, что термодинамическая проблема отсутствует. Это утверждение также справедливо для случая

исчезающей собственной частоты Ω осцилляторов. Рассмотрение проведено для системы в конечном ящике. Далее описан случай $L \rightarrow \infty$, иными словами, случай устранения ящика. Предложена формула для свободной энергии (182) с (180) и (181). В данном случае система всегда обнаруживает особое поведение, что закономерно следует из присутствия дельта-функций в уравнении (69), которые являются притягивающими и приводят к связанным состояниям поля ϕ и соответственно к нулям функции $L(-i\xi)$ в формуле (195).

Подобные функции не возникают лишь при большом расстоянии между осцилляторами, что делает разложение асимптотическим. Следует отметить, что особое поведение реализуется и в конечном ящике при условии его достаточно больших размеров.

Интересно отметить, что при увеличении размеров ящика свыше некоторой критической величины в рассматриваемой системе появляются одно или два связанных состояния для поля ϕ . Мы предполагаем, что соответствующие состояния заселены. В результате в представлении Мацубары появляется дополнительный вклад (последний член в (194)).

Наконец, рассмотрено представление Мацубары для свободной энергии на всей оси. Рассмотрение представления мы начали с представления через действительные частоты и провели некоторый двойной поворот Вика. Получены ожидаемые вклады от частот Мацубары ξ_l с $l \geq 1$ и, как новый особый случай, проведена модификация вклада от нулевой частоты Мацубары. Показано, что возможна формулировка в рамках формального правила (196). Наряду с представлением свободной энергии в терминах фазы это составляет основной результат настоящей статьи.

Следует отметить, что переход к исчезающей диссипации ($\gamma \rightarrow 0$) является гладким даже для представления Мацубары. Это следует из соотношения для $L(-i\xi)$ (195), что приводит к аналогичному результату для свободной энергии при $\gamma \rightarrow 0$ при включении $\gamma = 0$ с самого начала, как в модели плазмы (уравнение (84) для $t(i\xi)^{-1}$). Причиной такого поведения является присутствие члена $(-e^2/m)$ в знаменателе (195), что может быть связано с присутствием G_1 в (176) и в (153), это является результатом действия собственного поля осциллятора, конечного в размерности $1 + 1$. При устранении вклада от собственного поля, что необходимо при переходе к более высоким размерностям [22], предел $\gamma \rightarrow 0$ не воспроизводит свободную энергию в модели плазмы.

Очевидным продолжением настоящей работы является применение методов, предложенных в работе, для силы Казимира–Полдера в электродинамике.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение работы.

Список литературы

- [1] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, “Thermodynamical aspects of the Casimir force between real metals at nonzero temperature”, *Phys. Rev. A*, **65**:5 (2002), 052113, 7 pp.
- [2] G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, “Conductivity of dielectric and thermal atom-wall interaction”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:31 (2008), 312002, 9 pp.
- [3] G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, “Casimir free energy and pressure for magnetic metal films”, *Phys. Rev. B*, **94**:4 (2016), 045404, 13 pp.

- [4] J. Schwinger, L. L. DeRaad, Jr., K. A. Milton, “Casimir effect in dielectrics”, *Ann. Phys.*, **115**:1 (1978), 1–23.
- [5] D. Kupiszewska, “Casimir effect in absorbing media”, *Phys. Rev. A*, **46**:5 (1992), 2286–2294.
- [6] F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, P. W. Milonni, “Electromagnetic energy, absorption, and Casimir forces: uniform dielectric media in thermal equilibrium”, *Phys. Rev. A*, **81**:3 (2010), 033812, 12 pp.
- [7] F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, P. W. Milonni, “Electromagnetic energy, absorption, and Casimir forces. II. Inhomogeneous dielectric media”, *Phys. Rev. A*, **84**:5 (2011), 053813, 13 pp.
- [8] F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, A. E. Rubio López, “Casimir force for absorbing media in an open quantum system framework: scalar model”, *Phys. Rev. A*, **84**:5 (2011), 052517, 12 pp.
- [9] P. R. Berman, G. W. Ford, P. W. Milonni, “Nonperturbative calculation of the London–van der Waals interaction potential”, *Phys. Rev. A*, **89**:2 (2014), 022127, 4 pp.
- [10] М. А. Браун, “Об энергии Казимира в среде с дисперсией и поглощением в рамках подхода диагонализации Фано”, *ТМФ*, **190**:2 (2017), 277–292.
- [11] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford Univ. Press, New York, 2002.
- [12] M. Bordag, “Drude model and Lifshitz formula”, *Eur. Phys. J. C*, **71** (2011), 1788, 12 pp.
- [13] F. Intravaia, R. Behunin, “Casimir effect as a sum over modes in dissipative systems”, *Phys. Rev. A*, **86**:6 (2012), 18 pp.
- [14] U. Fano, “Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts”, *Phys. Rev.*, **124**:6 (1961), 1866–1878.
- [15] B. Huttner, S. M. Barnett, “Quantization of the electromagnetic field in dielectrics”, *Phys. Rev. A*, **46**:7 (1992), 4306–4322.
- [16] H. B. Callen, T. A. Welton, “Irreversibility and generalized noise”, *Phys. Rev.*, **83**:1 (1951), 34–40.
- [17] G. W. Ford, J. T. Lewis, R. F. O’Connell, “Quantum Langevin equation”, *Phys. Rev. A*, **37**:11 (1988), 4419–4428.
- [18] G. W. Ford, J. T. Lewis, R. F. O’Connell, “Quantum oscillator in a blackbody radiation field”, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:21 (1985), 2273–2276.
- [19] M. Bordag, “Vacuum energy in smooth background fields”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**:3 (1995), 755–765.
- [20] M. J. Renne, “Retarded Van der Waals interaction in a system of harmonic oscillators”, *Physica*, **53**:2 (1971), 193–209.
- [21] M. J. Renne, B. R. A. Nijboer, “Microscopic derivation of macroscopic Van der Waals forces”, *Chem. Phys. Lett.*, **1**:8 (1967), 317–320.
- [22] M. Bordag, J. M. Muñoz-Castañeda, “Dirac lattices, zero-range potentials and self-adjoint extension”, *Phys. Rev. D*, **91**:6 (2015), 065027, 19 pp.

Поступила в редакцию 31.05.2017,
после доработки 16.07.2017