Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, Интегрируемые семиточечные дискретные уравнения и эволюционные цепочки второго порядка, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 1, 27–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:33:52

© 2018 г.

В. Э. Адлер*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЕМИТОЧЕЧНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЦЕПОЧКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрены дифференциально-разностные уравнения, определяющие непрерывные симметрии дискретных уравнений на треугольной решетке. Показано, что определенная комбинация непрерывных потоков может быть представлена как скалярная эволюционная цепочка второго порядка. Общая конструкция иллюстрируется рядом примеров, включая аналог эллиптической цепочки Ямилова.

Ключевые слова: интегрируемость, дискретное уравнение, дифференциально-разностное уравнение, решетка, симметрия.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9409>

1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из характерных свойств дискретных интегрируемых уравнений заключается в существовании непрерывных симметрий, т. е. для данного уравнения $E[u] = 0$ на решетке определены векторные поля ∂_x такие, что $\partial_x(E)|_{E=0} = 0$. В частности, хорошо известно, что дифференциально-разностные уравнения определяют непрерывные симметрии для квад-уравнений и их обобщений старшего порядка [1]–[4]. В настоящей работе мы изучаем связь эволюционных цепочек второго порядка

$$u_{,t} = f(u_{-2}, u_{-1}, u, u_1, u_2), \quad u_j = u(t, n + j), \quad u_{,t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

с дискретными уравнениями другого типа, а именно с семиточечными уравнениями на треугольной решетке

$$f(q, q_{1,0}) - \tilde{f}(q, q_{-1,0}) + g(q, q_{0,1}) - \tilde{g}(q, q_{0,-1}) + h(q, q_{-1,-1}) - \tilde{h}(q, q_{1,1}) = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-01-00289_а).

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: adler@itp.ac.ru

Непрерывные симметрии для уравнений (2) определяются векторными полями вида

$$q_{,x} = a(q, f(q, q_{1,0}) - \tilde{g}(q, q_{0,-1}) - \tilde{h}(q, q_{1,1})) \quad (3)$$

и аналогичными уравнениями, возникающими при отражениях решетки. Здесь мы не ставим задачу описания всех совместных пар уравнений (2), (3) и ограничиваемся лишь теми примерами, которые можно получить, отталкиваясь от уже известных интегрируемых уравнений вида (2). Такие уравнения изучались, например, в работах [5]–[11], где для них были построены представления нулевой кривизны и преобразования Бэклунда, а также исследован непрерывный предел дифференциально-разностных уравнений типа цепочки Руджинарса–Тоды. Непрерывные симметрии уравнения (3) ранее не рассматривались, за исключением одного примера [8].

Основной результат настоящей статьи связан с наблюдением, что при выполнении некоторых дополнительных условий симметризованная линейная комбинация потоков типа (3) описывается цепочкой вида (1). Прямой перебор показывает, что такие цепочки существуют для всех примеров из цитированных работ. Почти все они являются новыми, если различать уравнения с точностью до точечных замен.

В случае $h = \tilde{h} = 0$, отвечающем пятиточечным уравнениям на квадратной решетке, непрерывные симметрии типа (3) изучались в работах [10], [12]. В этом случае вместо (1) возникают цепочки первого порядка, как было показано в [10] на примере, связанном с эллиптической цепочкой Ямилова (разностный аналог уравнения Кричевера–Новикова)

$$u_{,t} = \frac{H(u, u_1)}{u_1 - u_{-1}} - \frac{1}{2} \partial_1(H(u, u_1)),$$

где $H(u, u_1)$ – симметричный биквадратичный многочлен, $\partial_i := \partial/\partial u_i$. Напомним, что это уравнение является основным в классификации интегрируемых цепочек первого порядка [13], [14]. Классификационная задача для цепочек второго порядка (1) значительно сложнее, и в ней пока получены лишь некоторые частные результаты [15]–[17]. Новые уравнения, найденные в настоящей статье, существенно расширяют список примеров и дают некоторое представление о сложности ответов в этой задаче (хотя они заведомо не покрывают все интегрируемые случаи; в частности, все найденные цепочки, по-видимому, должны допускать представление нулевой кривизны в матрицах размера 2×2 , так же как и ассоциированные уравнения (2); с другой стороны, такие примеры, как цепочка Богоявленского и некоторые ее обобщения, связаны с матрицами размера 3×3).

Раздел 2 содержит общее определение совместности семиточечных уравнений (2) и потоков типа (3), а также схему вывода ассоциированных цепочек (1). Важным промежуточным этапом здесь служат двухкомпонентные эволюционные цепочки, отвечающие выбору динамических переменных на паре соседних прямых решетки. Такие системы являются самостоятельным классом уравнений, заслуживающим отдельного изучения.

Примеры из раздела 3 связаны со списком семиточечных лагранжевых уравнений, инвариантных относительно сдвига $q \rightarrow q + \varepsilon$ (см. работы [8], [9], [11]). Мы показываем, что цепочки (1) можно сопоставить всем уравнениям из списка; в тех случаях, когда исходное уравнение (2) не симметрично относительно отражений

решетки, для этого приходится применять дополнительное точечное преобразование. Две из полученных цепочек рассматривались ранее [4], [16], [18], остальные, по-видимому, являются новыми. Оказывается, однако, что все они допускают разностные подстановки $w = \phi[u]$, приводящие к одному и тому же уравнению [16]

$$w_{,t} = (w + 1) \left(w_2 \left(\frac{1}{w_1} + 1 \right) w - w \left(\frac{1}{w_{-1}} + 1 \right) w_{-2} + w_1 - w_{-1} \right), \quad (4)$$

которое играет роль своего рода универсального объекта в данной теории.

В разделе 4 рассматриваются семиточечные уравнения из работы [10], связанные с квад-уравнением Q_4 и его вырождениями (симметричные примеры из раздела 3 также можно получить из них в результате предельных переходов). Это приводит к наиболее общему семейству интегрируемых цепочек, рассматриваемых в настоящей статье:

$$u_{,t} = \frac{H(u_{-1}, u)H(u, u_1)(u_2 - u_{-2})}{P(u_{-2}, u_{-1}, u, u_1)P(u_{-1}, u, u_1, u_2)}, \quad (5)$$

где $P(u_{-1}, u, u_1, u_2)$ – аффинно-линейный многочлен с группой симметрии квадрата

$$P(u_{-1}, u, u_1, u_2) = P(u_2, u_1, u, u_{-1}) = P(u_1, u, u_{-1}, u_2)$$

и $H(u, u_1) = H(u_1, u)$ – симметричный биквадратичный многочлен, связанный с P соотношением

$$\text{const} \cdot H(u, u_1) = \partial_{-1}(P)\partial_2(P) - \partial_{-1}\partial_2(P)P.$$

Уравнение (5) общего вида, отвечающее невырожденной эллиптической кривой, по-видимому, не сводится подстановками к другим цепочкам, как и в случае цепочки Ямилова. В случаях тригонометрического и рационального вырождений уравнение (5) по-прежнему допускает подстановку в (4).

2. ОБЩАЯ СХЕМА

В этом разделе мы показываем, как цепочки (1) возникают в теории дискретных уравнений на треугольной решетке. Представленная конструкция включает следующие элементы:

- непрерывные симметрии для дискретных уравнений;
- эквивалентную форму этих потоков в виде двухкомпонентных цепочек;
- переход к скалярным цепочкам, возможный в симметричном случае.

Итак, рассмотрим дискретные уравнения вида

$$f(q, q_{1,0}) - \tilde{f}(q, q_{-1,0}) + g(q, q_{0,1}) - \tilde{g}(q, q_{0,-1}) + h(q, q_{-1,-1}) - \tilde{h}(q, q_{1,1}) = 0, \quad (6)$$

где функция $q = q(n_1, n_2)$ зависит от двух целочисленных переменных, индексы обозначают относительные смещения: $q_{i,j} = q(n_1 + i, n_2 + j)$. В дальнейшем используются также следующие обозначения для операторов сдвига, порождающих треугольную решетку:

$$T_1: q \rightarrow q_{1,0}, \quad T_2: q \rightarrow q_{0,1}, \quad T_3 = T_1^{-1}T_2^{-1}.$$

В качестве базисных непрерывных симметрий для уравнений (6) рассматриваются дифференциально-разностные уравнения вида

$$q_{,x} = a(q, F), \quad F = f(q, q_{1,0}) - \tilde{g}(q, q_{0,-1}) - \tilde{h}(q, q_{1,1}). \quad (7)$$

Используя исходное уравнение, дифференцирование ∂_x можно записать также в эквивалентном виде

$$q_{,x} = a(q, \tilde{F}), \quad \tilde{F} = \tilde{f}(q, q_{-1,0}) - g(q, q_{0,1}) - h(q, q_{-1,-1}). \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дискретное уравнение (6) и непрерывное уравнение (7) совместны, если на решетке выполнено равенство $\partial_x(F - \tilde{F})|_{F=\tilde{F}} = 0$.

С вычислительной точки зрения проверка условия совместности сводится к проверке равенства

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q_{1,0}} T_1 + \frac{\partial F}{\partial q_{0,-1}} T_2^{-1} + \frac{\partial F}{\partial q_{1,1}} T_3^{-1} \right) (a(q, \tilde{F})) - \\ & - \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial q} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_{-1,0}} T_1^{-1} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_{0,1}} T_2 + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_{-1,-1}} T_3 \right) (a(q, F)) = \phi[q](F - \tilde{F}) \end{aligned} \quad (9)$$

с неопределенным множителем ϕ , который может зависеть, как нетрудно показать, только от тех же переменных, что входят в уравнение (6).

Подчеркнем, что, хотя уравнения (7), (8) содержат три независимые переменные n_1 , n_2 и x , они не являются трехмерными, так как одно уравнение отдельно не рассматривается, а пара уравнений определена только на двумерном уравнении (6). Такая ситуация весьма типична для дискретных и полудискретных уравнений, но, к сожалению, неправильная трактовка подобных систем появляется в литературе с досадной регулярностью. Размерность системы на единицу больше размерности подмногообразия, на котором задаются начальные условия для общего решения, и может не совпадать с числом независимых переменных.

Уравнения (7), (8) можно переписать в виде дифференциально-разностного уравнения с двумя компонентами, отвечающими двум соседним прямым решеткам, параллельным оси T_2 или оси T_3 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть j – постоянное целое число. Переменные $q(k) = q(j, k)$, $p(k) = q(j+1, k)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} q_{,x} &= a(q, f(q, p) - \tilde{g}(q, q_{-1}) - \tilde{h}(q, p_1)), \\ p_{,x} &= a(p, \tilde{f}(p, q) - g(p, p_1) - h(p, q_{-1})); \end{aligned} \quad (10)$$

переменные $q(k) = q(-k, j-k)$, $p(k) = q(-k, j+1-k)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} q_{,x} &= a(q, f(q, p) - \tilde{g}(q, p_1) - \tilde{h}(q, q_{-1})), \\ p_{,x} &= a(p, \tilde{f}(p, q) - g(p, q_{-1}) - h(p, p_1)). \end{aligned} \quad (11)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать ситуацию, когда уравнение (6) допускает наряду с ∂_x два совместных потока аналогичного типа, отвечающие $\mathbb{Z}_3$ -симметрии решетки (см. рис. 1а).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что дискретное уравнение (6) допускает полный набор базисных симметрий, если оно совместно, в смысле определения 1, с каждым из трех уравнений

$$\begin{aligned} q_{,x} &= a(q, f - \tilde{g} - \tilde{h}) = a(q, \tilde{f} - g - h), \\ q_{,y} &= b(q, -\tilde{f} + g - \tilde{h}) = b(q, -f + \tilde{g} - h), \\ q_{,z} &= c(q, -\tilde{f} - \tilde{g} + h) = c(q, -f - g + \tilde{h}), \end{aligned} \quad (12)$$

Рис. 1. Семиточечное уравнение и дифференцирования $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ (а) и вложение в треугольную решетку цепочки второго порядка, отвечающей дифференцированию $\partial_t = \partial_y + \partial_z$ (б).

причем векторные поля $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ коммутируют на уравнении (6).

Из утверждения 1 и $\mathbb{Z}_3$ -симметрии решетки следует, что для любых двух из трех уравнений (12) имеется общее направление, одно из трех на решетке, вдоль которого эти два уравнения представляются в виде двухкомпонентных цепочек. Для определенности рассмотрим базисные симметрии ∂_y и ∂_z , тогда переменные $q(k) = q(k, j)$ и $p(k) = q(k, j + 1)$, $j = \text{const}$, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} q_{,y} &= b(q, -\tilde{f}(q, q_{-1}) + g(q, p) - \tilde{h}(q, p_1)), \\ p_{,y} &= b(p, -f(p, p_1) + \tilde{g}(p, q) - h(p, q_{-1})), \\ q_{,z} &= c(q, -f(q, q_1) - g(q, p) + \tilde{h}(q, p_1)), \\ p_{,z} &= c(p, -\tilde{f}(p, p_{-1}) - \tilde{g}(p, q) + h(p, q_{-1})). \end{aligned} \quad (13)$$

Коммутативность потоков ∂_y и ∂_z удобно проверять именно в этих переменных, поскольку в этом случае уже не требуется учитывать дискретное уравнение (6).

Следующим шагом нашей конструкции служит замена

$$u(2k) = q(k) = q(k, j), \quad u(2k - 1) = p(k) = q(k, j + 1), \quad j = \text{const}, \quad (14)$$

которая соответствует проецированию переменных с двух соседних прямых на одну общую прямую (см. рис. 1б). В результате уравнения (13) превращаются в скалярные цепочки для переменной u , но не автономные, а с разными уравнениями для четных и нечетных узлов:

$$\begin{aligned} u_{,y} &= b(u, -\tilde{f}(u, u_{-2}) + g(u, u_{-1}) - \tilde{h}(u, u_1)), & u &= u(2k), \\ u_{,y} &= b(u, -f(u, u_2) + \tilde{g}(u, u_1) - h(u, u_{-1})), & u &= u(2k - 1); \\ u_{,z} &= c(u, -f(u, u_2) - g(u, u_{-1}) + \tilde{h}(u, u_1)), & u &= u(2k), \\ u_{,z} &= c(u, -\tilde{f}(u, u_{-2}) - \tilde{g}(u, u_1) + h(u, u_{-1})), & u &= u(2k - 1). \end{aligned} \quad (15)$$

Рис. 2. Пятиточечное уравнение (а) и вложение цепочки первого порядка в квадратную решетку (б).

Наконец, остается заметить, что при определенных условиях уравнения для четных и нечетных узлов можно сделать одинаковыми, рассмотрев линейную комбинацию потоков. Это напоминает ситуацию с цепочкой Абловица–Лади́ка [19], которая является симметризованной суммой двух коммутирующих потоков.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть рассматриваемые уравнения таковы, что

$$b(u, v) = c(u, v), \quad g(u, v) = h(u, v), \quad \tilde{g}(u, v) = \tilde{h}(u, v), \quad (16)$$

тогда сумма потоков $\partial_t = \partial_y + \partial_z$ описывается автономной эволюционной цепочкой второго порядка

$$\begin{aligned} u_{,t} = & b(u, -\tilde{f}(u, u_{-2}) + g(u, u_{-1}) - \tilde{g}(u, u_1)) + \\ & + b(u, -f(u, u_2) - g(u, u_{-1}) + \tilde{g}(u, u_1)). \end{aligned} \quad (17)$$

Понятно, что выбор вместо пары базисных симметрий ∂_y, ∂_z пар ∂_z, ∂_x или ∂_x, ∂_y приводит к аналогичным формулам, в которых циклически переставлены a, b, c и f, g, h . В последующих разделах рассмотрен ряд примеров, укладывающихся в представленную схему. Отметим, что в некоторых случаях условие симметрии (16) может быть ослаблено.

Для полноты картины остановимся кратко на случае $h = 0$, при этом базисные симметрии ∂_x, ∂_y совпадают. После переобозначений вместо семиточечного уравнения (6) приходим к пятиточечному уравнению (см. рис. 2)

$$f(q, q_{1,0}) - \tilde{f}(q, q_{-1,0}) + g(q, q_{0,1}) - \tilde{g}(q, q_{0,-1}) = 0 \quad (18)$$

и двум базисным симметриям

$$q_{,x} = a(q, f + g) = a(q, \tilde{f} + \tilde{g}), \quad (19)$$

$$q_{,y} = b(q, f - \tilde{g}) = b(q, \tilde{f} - g). \quad (20)$$

Каждое из уравнений (19), (20) можно записать в виде двухкомпонентной цепочки, выбирая переменные на паре соседних прямых, параллельных любой из координатных осей. Кроме того, для уравнения (19) возможен выбор переменных на паре диагональных прямых $n_1 + n_2 = j$, $n_1 + n_2 = j + 1$, как показано на рис. 26; аналогично, для уравнения (20) можно выбрать диагонали $n_1 - n_2 = \text{const}$. Полагая

$$u(2k) = q(k, j - k), \quad u(2k - 1) = q(k, j + 1 - k), \quad j = \text{const},$$

получим уравнения вида

$$\begin{aligned} u_{,x} &= a(u, f(u, u_1) + g(u, u_{-1})), & u &= u(2k), \\ u_{,x} &= a(u, \tilde{f}(u, u_{-1}) + \tilde{g}(u, u_1)), & u &= u(2k - 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Очевидно, для того чтобы уравнения для четных и нечетных узлов совпадали, достаточно выполнения условий симметрии

$$f(u, v) = \tilde{g}(u, v), \quad \tilde{f}(u, v) = g(u, v). \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие совместности (9) налагает достаточно жесткие ограничения на участвующие в них функции, и в принципе его анализ может быть доведен до конечного списка совместных пар уравнений (6), (7). В настоящее время эта задача остается открытой даже для уравнений специального вида (23), рассматриваемых в следующем разделе. Классификация интегрируемых цепочек из утверждения 1 или, в более общей постановке, цепочек вида

$$q_{,x} = a(q_{-1}, q, p, p_1), \quad p_{,x} = b(q_{-1}, q, p, p_1)$$

также отсутствует, хотя отдельные примеры время от времени появлялись в литературе [20]. В случае квадратной решетки имеются более полные результаты, в частности полностью решена [12] задача классификации пятиточечных уравнений (18), допускающих обе базисные симметрии (19), (20).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В настоящей работе мы рассматриваем только автономные уравнения (6), хотя в более общей постановке интегрируемые уравнения этого типа могут включать переменные параметры на решетке (см., например, статью [10]). Это ограничение вызвано не только соображениями простоты, но и существом дела. На самом деле одна базисная симметрия может существовать и для уравнения с переменными параметрами, но более детальный анализ примеров убеждает, что полный набор базисных симметрий возможен только в автономном случае. Пока неизвестно, допускает ли схема, приведенная в этом разделе, какое-либо обобщение на неавтономный случай.

3. ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА

3.1. Базисные симметрии. Рассмотрим семиточечные уравнения специального вида

$$(T_1 - 1)(f) + (T_2 - 1)(g) + (T_3 - 1)(h) = 0 \quad (23)$$

ТАБЛИЦА 1. Функции, определяющие уравнение (23) и его базисные симметрии. В случаях (А), (В), (С) параметры связаны соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 0$, в случае (I) выполнено равенство $\alpha\beta\gamma = 1$.

$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	
$\frac{\alpha}{x}$	$\frac{\beta}{x}$	$\frac{\gamma}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	(А)
$\alpha \operatorname{cth} x$	$\beta \operatorname{cth} x$	$\gamma \operatorname{cth} x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	(В)
$\ln \frac{x+\alpha}{x-\alpha}$	$\ln \frac{x+\beta}{x-\beta}$	$\ln \frac{x+\gamma}{x-\gamma}$	$\frac{1}{e^x-1}$	$\frac{1}{e^x-1}$	$\frac{1}{e^x-1}$	(С)
$-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$	$\ln x$	$\ln x$	e^{-x}	$\frac{1}{e^x+1}$	$\frac{1}{e^x+1}$	(D)
$\frac{1}{1+e^x}$	$-e^x$	e^{-x}	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+1}$	(E)
$\ln(e^{-x}-1)$	$\ln(e^x-1)$	$\ln(e^x-1)$	$\frac{1}{e^x+1}$	e^{-x}	e^{-x}	(F)
$-x$	$-\ln(e^{-x}-1)$	$\ln(e^x-1)$	$\frac{1}{e^x+1}$	e^{-x}	e^x	(G)
$\ln(e^{-x}-1)$	$\ln \frac{e^x+1}{\gamma e^x+1}$	$\ln(e^x+1)$	$\frac{1}{e^x+1}$	e^{-x}	$\frac{1}{e^x+\gamma}$	(H)
$\ln \frac{\alpha e^x-1}{e^x-\alpha}$	$\ln \frac{\beta e^x-1}{e^x-\beta}$	$\ln \frac{\gamma e^x-1}{e^x-\gamma}$	$\frac{1}{e^x-1}$	$\frac{1}{e^x-1}$	$\frac{1}{e^x-1}$	(I)

(напомним, что $T_3 = T_1^{-1}T_2^{-1}$), где функции f , g , h зависят только от разностей значений q по соответствующему направлению решетки:

$$f = f(q - q_{-1,0}), \quad g = g(q - q_{0,-1}), \quad h = h(q - q_{1,1}).$$

Это класс уравнений, которые являются инвариантными относительно однопараметрической группы сдвигов $q \rightarrow q + \varepsilon$ и лагранжевыми для функционалов вида

$$S = \sum_{i,j} T_1^i T_2^j (\varphi(q - q_{-1,0}) + \psi(q - q_{0,-1}) + \chi(q - q_{1,1})).$$

Имеется список интегрируемых уравнений (23), полученный из предположения о наличии автопреобразования Бэклунда определенного вида [8], [9]. Оказывается, что все уравнения из этого списка допускают также полный набор базисных симметрий (12), причем функции a , b , c в этих уравнениях не зависят явно от q . Базисные симметрии для случая (А) из табл. 1 были найдены в работе [8], для остальных случаев этот результат, по-видимому, является новым. Отметим, что в наших формулах для f , g , h имеются несущественные отличия по сравнению с указанными работами, связанные с выбором более удобной калибровки и, в некоторых случаях, с поворотом решетки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Уравнение (23) для всех наборов функций f, g, h, a, b, c , указанных в табл. 1, совместно с уравнениями

$$\begin{aligned} q_{,x} &= a(T_1(f) - g - h) = a(f - T_2(g) - T_3(h)), \\ q_{,y} &= b(-f + T_2(g) + h) = b(-T_1(f) + g - T_3(h)), \\ q_{,z} &= c(-f - g + T_3(h)) = c(-T_1(f) - T_2(g) + h). \end{aligned}$$

При этом векторные поля $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ попарно коммутируют и определяют вариационные симметрии для функционала S .

Утверждение 3 проверяется прямыми вычислениями. Что касается способа, который позволяет найти функции a, b, c , то он основан на хорошо известной связи уравнений (6) с квад-уравнениями [10], [11]. Напомним, что если рассмотреть совместные квад-уравнения на кубической решетке, то переменные на гиперплоскости $n_1 + n_2 + n_3 = 0$ подчиняются уравнению вида (6). Все три координатных направления трансверсальны к этой гиперплоскости, и базисные симметрии возникают в результате взятия непрерывного предела по одному из этих направлений. В работе [10] аналогичный подход был применен для вывода непрерывных симметрий пятиточечных уравнений.

Уравнениям из табл. 1 отвечают квад-уравнения типа H и их асимметричные обобщения [21], [11]. Рассматривать их вложения в трехмерную решетку довольно утомительно, но фактически достаточно знать, что в результате предельного перехода одна из функций в трехногой форме квад-уравнения переходит в дробно-линейную функцию от $q_{,x}$. Коэффициенты этой функции легко находятся методом неопределенных коэффициентов. Если рассуждать подробнее, то уравнения (23) для указанных наборов функций f, g, h можно переписать в рациональном виде, делая при необходимости замену $e^q \rightarrow q$. Далее функции a, b, c ищутся в дробно-линейном виде $a(x) = \frac{\kappa X + \lambda}{\mu X + \nu}$, где $X = x$ в аддитивных случаях (A), (B), (E) и $X = e^x$ в мультипликативных (все остальные случаи, т. е. такие, когда функции f, g, h содержат логарифмы). Более того, так как симметрии определены с точностью до замены $q_{,t} \rightarrow c_1 \partial_t(q) + c_2$ (растяжение переменной t и классическая симметрия сдвига), достаточно рассмотреть $a = X$ и $a = 1/(X + \nu)$. Этот трюк срабатывает во всех без исключения случаях.

3.2. Цепочки второго порядка в симметричных случаях. Перейдем теперь к построению цепочек типа (17). Их можно сопоставить всем уравнениям из приведенного выше списка при некоторых ограничениях на параметры. Мы начнем с тех случаев, когда выполняются условия (16) дискретной симметрии. Для уравнений вида (23) эти условия сводятся к соотношениям

$$b(x) = c(x), \quad g(x) = h(x). \quad (24)$$

Из табл. 1 видно, что эти равенства можно удовлетворить для всех случаев, кроме (E), (G). В случаях (A), (B), (C) для этого параметры должны быть связаны соотношениями $\beta = \gamma$, $\alpha = -2\gamma$, причем параметр γ можно преобразованием масштаба сделать произвольной ненулевой постоянной. Случай (B) мы исключим из рассмотрения, так как он сводится к (A) точечной заменой $e^{2q} \rightarrow q$ [8]. В случае (H)

следует положить $\gamma = 0$, в случае (I) имеем $\beta = \gamma$, $\alpha = \gamma^{-2}$ с неустраняемым параметром γ . Все рассматриваемые цепочки можно привести к рациональному виду, делая, если требуется, замену $e^u \rightarrow u$. Используя также растяжение переменной t , прямым вычислением получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Уравнения (17), отвечающие случаям (A), (C) при $\beta = \gamma$, $\alpha = -2\gamma$, случаям (D), (F), (H) при $\gamma = 0$ и случаю (I) при $\beta = \gamma$, $\alpha = \gamma^{-2}$, точно эквивалентны соответственно следующим цепочкам:

$$\frac{1}{2}u_{,t} = \frac{1}{\frac{2}{u_2-u} + \frac{1}{u-u_1} + \frac{1}{u-u_{-1}}} - \frac{1}{\frac{2}{u_2-u} + \frac{1}{u-u_1} + \frac{1}{u-u_{-1}}}, \quad (a)$$

$$\frac{1}{4}u_{,t} = \frac{1}{\frac{(u_2-u+2)(u_1-u-1)(u_{-1}-u-1)}{(u_2-u-2)(u_1-u+1)(u_{-1}-u+1)} - 1} + \frac{1}{\frac{(u_2-u-2)(u_1-u+1)(u_{-1}-u+1)}{(u_2-u+2)(u_1-u-1)(u_{-1}-u-1)} - 1}, \quad (c)$$

$$u_{,t} = \frac{u-u_{-1}}{u_1-u_{-1} + \frac{u-u_1}{u-u_2}} - \frac{u-u_1}{u_1-u_{-1} + \frac{u-u_{-1}}{u-u_2}}, \quad (d)$$

$$u_{,t} = u \frac{(1 - \frac{u}{u_2})(1 - \frac{u_{-1}}{u})}{1 - \frac{u}{u_1}} + u \frac{(1 - \frac{u_2}{u})(1 - \frac{u}{u_1})}{1 - \frac{u_{-1}}{u}}, \quad (f)$$

$$u_{,t} = u \frac{(1 - \frac{u}{u_2})(1 + \frac{u_{-1}}{u})}{1 + \frac{u}{u_1}} + u \frac{(1 - \frac{u_2}{u})(1 + \frac{u}{u_{-1}})}{1 + \frac{u_{-1}}{u}}, \quad (h)$$

$$-\frac{1}{1+\gamma^2}u_{,t} = \frac{(u-\gamma u_{-1})(u-\gamma u_1)(u-\gamma^{-2}u_2)}{(\gamma u_{-1}-u)(\gamma u_1-u_2) - (\gamma u-u_1)(u_{-1}-\gamma u_2)} - \frac{(u-\gamma^{-1}u_{-1})(u-\gamma^{-1}u_1)(u-\gamma^2u_2)}{(\gamma u_{-2}-u_{-1})(\gamma u-u_1) - (\gamma u_{-1}-u)(u_{-2}-\gamma u_1)}. \quad (i)$$

Отметим, что уравнения (f), (h) совпадают, если сделать неавтономную замену $u(n) \rightarrow (-1)^n u(n)$.

Видно, что полученные цепочки выглядят довольно громоздко. Приведение правой части к общему знаменателю, вообще говоря, лишь усложняет формулы, но следует учесть возможность добавлять в правую часть члены вида c или cu , отвечающие классическим симметриям сдвига или растяжения. По построению рассматриваемая цепочка допускает хотя бы одну из этих симметрий. Во всех случаях, кроме (f), (h), нетрудно подобрать подходящую линейную комбинацию, приводящую цепочку к факторизованному виду (5):

$$u_{,t} = \frac{H(u_{-1}, u)H(u, u_1)(u_2 - u_{-2})}{P(u_{-2}, u_{-1}, u, u_1)P(u_{-1}, u, u_1, u_2)},$$

где H – биквадратичный многочлен и P – аффинно-линейный многочлен. Это выражение можно считать стандартной формой; в разделе 4 показано, что она имеется и для более общих цепочек. Здесь мы не будем переписывать уравнения в таком виде, ограничимся лишь парой примеров. В случае (a) преобразование правой части не требуется, после факторизации находим

$$H = (u_1 - u)^2, \quad P = \frac{1}{2}(u_2 + u)(u_1 + u_{-1}) - u_{-1}u_1 - uu_2; \quad (25)$$

в случае (i) добавляется член $(\gamma^2 - \gamma^{-2})u$, при этом

$$\begin{aligned} H &= (\gamma + \gamma^{-1})(u_1 - \gamma u)(\gamma u_1 - u), \\ P &= (\gamma u_2 - u_{-1})(u_1 - \gamma u) + (u_2 - \gamma u_1)(\gamma u_{-1} - u). \end{aligned} \quad (26)$$

Замечательным фактом является то, что все выписанные цепочки приводятся разностными подстановками к одному и тому же универсальному уравнению (4). Эти замены приведены в следующем утверждении. Постоянные множители в левых частях цепочек заранее подобраны так, чтобы дополнительное растяжение переменной t не требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Цепочки, перечисленные в утверждении 4, связаны с уравнением (4) следующими подстановками:*

$$\begin{aligned} \text{(a):} \quad w &= \frac{1}{2 \frac{(u_3 - u_2)(u_1 - u)}{(u_3 - u_1)(u_2 - u)} - 1}, \\ \text{(c):} \quad w &= \frac{(u_3 - 2u_2 + u_1)(u_2 - 2u_1 + u)}{2 - 2(u_2 - u_1)^2 - (u_3 - 2u_2 + u_1)(u_2 - 2u_1 + u)}, \\ \text{(d):} \quad w &= -\frac{1}{1 + \frac{u_2 - u_1}{(u_3 - u_1)(u_2 - u)}}, \\ \text{(f):} \quad w &= \frac{u}{u_1} - 1, \\ \text{(h):} \quad w &= -\frac{u}{u_1} - 1, \\ \text{(i):} \quad w &= \frac{\gamma(u - (\gamma^{-1} + \gamma)u_1 + u_2)(u_1 - (\gamma^{-1} + \gamma)u_2 + u_3)}{(\gamma u - u_1)(\gamma u_2 - u_3) - (\gamma u_1 - u_2)(u - \gamma u_3)}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Все подстановки из утверждения 5 имеют вид $w = \phi(\rho[u])$, где $\rho[u]$ является плотностью закона сохранения для соответствующей цепочки $u_t = f[u]$; эта плотность эквивалентна $\ln \partial_2(f)$. Цепочки (4), (a) и связывающая их подстановка рассматривались в статье [16], посвященной интегрируемым цепочкам, инвариантным относительно группы дробно-линейных преобразований $u \rightarrow \frac{\kappa u + \lambda}{\mu u + \nu}$. Нетрудно проверить, что уравнение (a) и замена $u \rightarrow w$ могут быть записаны при помощи инвариантов X и Y/u_t этой группы,

$$X = \frac{(u_1 - u)(u_{-1} - u_{-2})}{(u_1 - u_{-1})(u - u_{-2})}, \quad Y = \frac{(u_1 - u)(u - u_{-1})}{u_1 - u_{-1}},$$

а именно

$$u_{,t} = \frac{4Y(1 - X - X_1)}{(2X - 1)(2X_1 - 1)}, \quad w = \frac{1}{2X - 1}.$$

Интересно отметить, что в этом случае имеются две различные подстановки в уравнение (4); вторая имеет вид $w = H/P - 1$ с многочленами (25).

3.3. Несимметричные случаи. В оставшихся случаях (G), (E) сделаем замену $e^q \rightarrow q$. В случае (G) базисные симметрии ∂_y и ∂_z принимают вид

$$\begin{aligned} q_{,y} &= q_{-1,0} \left(\frac{q}{q_{0,1}} - 1 \right) \left(\frac{q}{q_{1,1}} - 1 \right) = \frac{1}{q_{1,0}} (q - q_{0,-1})(q - q_{-1,-1}), \\ q_{,z} &= q_{1,0} \left(\frac{q}{q_{0,1}} - 1 \right) \left(\frac{q}{q_{1,1}} - 1 \right) = \frac{1}{q_{-1,0}} (q - q_{0,-1})(q - q_{-1,-1}). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что если использовать замену (14), как это делалось в симметричных примерах, то уравнения для четных и нечетных переменных u останутся различными для любой линейной комбинации потоков ∂_y и ∂_z . Однако это легко исправить, рассматривая вместо (14) замену

$$u(2k) = q(k) = q(k, j), \quad u(2k-1) = p(k) = -\frac{1}{q(k, j+1)}, \quad j = \text{const.}$$

В результате базисные симметрии записываются в виде пары двухкомпонентных цепочек [20]

$$\begin{aligned} q_{,y} &= q_{-1}(qp+1)(qp_1+1), & p_{,y} &= -p_1(qp+1)(q_{-1}p+1), \\ q_{,z} &= q_1(qp+1)(qp_1+1), & p_{,z} &= -p_{-1}(qp+1)(q_{-1}p+1), \end{aligned}$$

а разность потоков $\partial_t = \partial_z - \partial_y$ эквивалентна цепочке [18], [4]

$$u_{,t} = (u_1u + 1)(uu_{-1} + 1)(u_2 - u_{-2}). \quad (\text{g})$$

Как и во всех симметричных случаях, это уравнение допускает подстановку $w = uu_1$ в уравнение (4) [16]. Цепочка (g) замечательна тем, что из всех уравнений, возникающих в рассматриваемом подходе, это единственный пример с полиномиальной правой частью.

В случае (E) применим аналогичную замену

$$u(2k) = q(k) = \frac{1}{q(k, j)}, \quad u(2k-1) = p(k) = q(k, j+1), \quad j = \text{const.}$$

В результате потоки ∂_y, ∂_z записываются в виде

$$\begin{aligned} q_{,y} &= \frac{q + q_{-1}}{1 + (q + q_{-1})(p_1 + p)}, & p_{,y} &= -\frac{p_1 + p}{1 + (q + q_{-1})(p_1 + p)}, \\ q_{,z} &= -\frac{q_1 + q}{1 + (q_1 + q)(p_1 + p)}, & p_{,z} &= \frac{p + p_{-1}}{1 + (q + q_{-1})(p + p_{-1})}, \end{aligned}$$

а поток $\partial_t = -\partial_z - \partial_y$ эквивалентен цепочке

$$u_{,t} = \frac{u_2 - u_{-2}}{(1 + (u_2 + u)(u_1 + u_{-1}))(1 + (u_1 + u_{-1})(u + u_{-2}))}. \quad (\text{e})$$

Это уравнение вида (5) с $P(u_{-1}, u, u_1, u_2) = 1 + (u_2 + u)(u_1 + u_{-1})$. Подстановка в уравнение (4) имеет вид

$$w = \frac{1}{1 + (u_3 + u_1)(u_2 + u)} - 1.$$

4. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЦЕПОЧКА

В работе [10] рассматривались уравнения (6) в мультипликативной форме

$$f(q, q_{1,0}; \alpha) f(q, q_{-1,0}; \alpha) f(q, q_{0,1}; \beta) f(q, q_{0,-1}; \beta) f(q, q_{-1,-1}; \gamma) f(q, q_{1,1}; \gamma) = 1, \quad (27)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 0$ и множители f имеют общий вид

$$f(q, p; \alpha) = \frac{s(q + p + \alpha)s(q - p + \alpha)}{s(q + p - \alpha)s(q - p - \alpha)}.$$

Такие уравнения связаны с квад-уравнением Q_4 , ассоциированным с эллиптической кривой, и его тригонометрическим и рациональным вырождениями $Q_3|_{\delta=1}$ и Q_2 (более того, случаи (A), (C), (I) из предыдущего раздела также можно получить при помощи предельных переходов, отвечающих уравнениям $Q_3|_{\delta=0}$ и Q_1). Уравнение (27) эквивалентно уравнению Эйлера–Лагранжа для функционала

$$S = \sum_{i,j} T_1^i T_2^j (\varphi(q, q_{-1,0}; \alpha) + \varphi(q, q_{0,-1}; \beta) + \varphi(q, q_{1,1}; \gamma)), \quad \partial_q \varphi(q, p; \alpha) = \ln f(q, p; \alpha),$$

при условии, что $\varphi(q, p; \alpha) = \varphi(p, q; \alpha)$, для чего достаточно, чтобы функция s была нечетной.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Уравнение (27), отвечающее функциям

$$s(x) = \sigma(x), \quad s(x) = \text{sh}(x), \quad s(x) = x,$$

где $\sigma(x)$ обозначает функцию Вейерштрасса, совместно с уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{q,x+1}{q,x-1} &= f(q, q_{1,0}; \alpha) f(q, q_{0,-1}; \beta) f(q, q_{1,1}; \gamma) \\ &= f(q, q_{-1,0}; -\alpha) f(q, q_{0,1}; -\beta) f(q, q_{-1,-1}; -\gamma), \\ \frac{q,y+1}{q,y-1} &= f(q, q_{-1,0}; \alpha) f(q, q_{0,1}; \beta) f(q, q_{1,1}; \gamma) = \\ &= f(q, q_{1,0}; -\alpha) f(q, q_{0,-1}; -\beta) f(q, q_{-1,-1}; -\gamma), \\ \frac{q,z+1}{q,z-1} &= f(q, q_{-1,0}; \alpha) f(q, q_{0,-1}; \beta) f(q, q_{-1,-1}; \gamma) = \\ &= f(q, q_{1,0}; -\alpha) f(q, q_{0,1}; -\beta) f(q, q_{1,1}; -\gamma). \end{aligned}$$

Базисные потоки ∂_x , ∂_y , ∂_z попарно коммутируют и определяют вариационные симметрии для функционала S .

Как и для утверждения 3, доказательство основано на вложении уравнения (27) в кубическую решетку и предельном переходе в соответствующих квад-уравнениях (ср. с формулой (9.3) из [10], отвечающей пятиточечному случаю).

Условие симметрии (16) для рассматриваемых уравнений сводится к равенству параметров $\beta = \gamma$. В результате приходим к следующей цепочке.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $\alpha = -2\gamma$, $\beta = \gamma$, тогда поток $\partial_t = (\partial_y + \partial_z)/2$ описывается цепочкой

$$\begin{aligned} u_{,t} &= \frac{1}{f(u, u_2; 2\gamma) f(u, u_1; -\gamma) f(u, u_{-1}; -\gamma) - 1} - \\ &\quad - \frac{1}{f(u, u_1; -\gamma) f(u, u_{-1}; -\gamma) f(u, u_{-2}; 2\gamma) - 1} \end{aligned} \quad (28)$$

для переменных $u(2k) = q(k, j)$, $u(2k-1) = q(k, j+1)$.

После подстановки выражений для f через функцию s уравнение (28) становится очень громоздким, но его можно упростить, применяя точечные замены вида

$$\phi(u) = \tilde{u}, \quad \kappa(\gamma) = \tilde{\gamma}, \quad \partial_t = c(\gamma)\partial_{\tilde{t}}.$$

Функция ϕ выбирается так, чтобы соответствующее квад-уравнение приводилось к аффинно-линейной форме [10], при этом уравнение (27), базисные потоки $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ и цепочка (28) приводятся к рациональному виду с минимальными степенями числителя и знаменателя.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (28), отвечающее функциям $s(x) = \sigma(x)$, $s(x) = \text{sh}(x)$ и $s(x) = x$, приводится к виду

$$u_{,t} = \frac{H(u_{-1}, u)H(u, u_1)(u_2 - u_{-2})}{P(u_{-2}, u_{-1}, u, u_1)P(u_{-1}, u, u_1, u_2)}, \quad (29)$$

где P – аффинно-линейный многочлен, обладающий симметрией квадрата с вершинами u_{-1}, u, u_1, u_2 ,

$$P(u_{-1}, u, u_1, u_2) = P(u_2, u_1, u, u_{-1}) = P(u_1, u, u_{-1}, u_2), \quad (30)$$

и $H(u, u_1) = H(u_1, u)$ – симметричный биквадратичный многочлен, связанный с P соотношением

$$\text{const} \cdot H(u, u_1) = \partial_{-1}(P) \partial_2(P) - \partial_{-1} \partial_2(P) P. \quad (31)$$

Семейство уравнений (29) является инвариантным относительно дробно-линейных замен $u \rightarrow \frac{\kappa u + \lambda}{\mu u + \nu}$. Многочлен P , отвечающий случаю $s(x) = \sigma(x)$, относится к орбите общего положения относительно этих замен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $s = \sigma(x)$ применим замену

$$\wp(u) = \tilde{u}, \quad \wp(\gamma) = \tilde{\gamma}, \quad \partial_t = 4\wp'(\gamma)^2 \wp'(2\gamma) \partial_{\tilde{t}}.$$

Чтобы перейти от σ -функций к $\wp$ -функциям Вейерштрасса, используем тождество

$$-\frac{\sigma(a+b)\sigma(a-b)}{\sigma(a)^2\sigma(b)^2} = \wp(a) - \wp(b).$$

Заменяя здесь a на $a+b$ и на $a-b$ и рассматривая отношение получившихся уравнений, получаем в качестве следствия тождество

$$\frac{\sigma(a+2b)\sigma(a-b)^2}{\sigma(a-2b)\sigma(a+b)^2} = \frac{\wp(a+b) - \wp(b)}{\wp(a-b) - \wp(b)}.$$

С учетом первого тождества функция $f(q, p; \alpha)$ переписывается в виде

$$f(q, p; \alpha) = \frac{\sigma(q+\alpha)^2}{\sigma(q-\alpha)^2} \frac{\wp(q+\alpha) - \wp(p)}{\wp(q-\alpha) - \wp(p)},$$

а второе тождество позволяет заменить общий множитель из σ -функций в произведении трех функций f :

$$\begin{aligned} f(u, u_2; 2\gamma) f(u, u_1; -\gamma) f(u, u_{-1}; -\gamma) &= \\ &= \frac{(\wp(u + \gamma) - \wp(\gamma))^2}{(\wp(u - \gamma) - \wp(\gamma))^2} \frac{\wp(u + 2\gamma) - \wp(u_2)}{\wp(u - 2\gamma) - \wp(u_2)} \frac{\wp(u - \gamma) - \wp(u_1)}{\wp(u + \gamma) - \wp(u_1)} \frac{\wp(u - \gamma) - \wp(u_{-1})}{\wp(u + \gamma) - \wp(u_{-1})}. \end{aligned}$$

Это выражение уже рационально относительно переменных $\tilde{u}_2, \tilde{u}_{\pm 1}$. Остается только преобразовать функции вида $\wp(u + \text{const})$, используя соотношения

$$\wp'(a)^2 = 4\wp^3(a) - g_2\wp(a) - g_3, \quad \wp(a + b) + \wp(a) + \wp(b) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(a) - \wp'(b)}{\wp(a) - \wp(b)} \right)^2,$$

и подставить их в уравнение (28). Опуская тильду у новых переменных u, t и параметра γ , приходим после довольно сложных, но прямых вычислений к цепочке вида (29) с многочленами

$$\begin{aligned} H &= \left(uu_1 + \gamma u + \gamma u_1 + \frac{g_2}{4} \right)^2 - (u + u_1 + \gamma)(4\gamma uu_1 - g_3), \\ P &= (12\gamma^2 - g_2) \left(u_{-1} uu_1 u_2 + \frac{g_2^2}{16} \right) - \\ &\quad - (4\gamma^3 + g_2\gamma + 2g_3)(u_{-1} uu_1 + u_{-1} uu_2 + u_{-1} u_1 u_2 + uu_1 u_2 - g_3) + \\ &\quad + 2 \left(\gamma^4 - g_3\gamma - \frac{g_2^2}{16} \right) (u_{-1} + u_1)(u + u_2) - \\ &\quad - \gamma(4\gamma^3 - 3g_2\gamma - 4g_3)(u_{-1} u_1 + uu_2) + \\ &\quad + \gamma \left(g_2\gamma^2 + 6g_3\gamma + \frac{g_2^2}{4} \right) (u_{-1} + u + u_1 + u_2), \end{aligned} \tag{32}$$

которые удовлетворяют соотношениям (30), (31). Этот вид многочленов P, H связан лишь со специальным выбором калибровки, привязанным к форме Вейерштрасса эллиптической кривой (более простые формулы можно получить, используя форму Якоби). Инвариантность уравнения (29) относительно дробно-линейных замен легко проверяется. Общий вид многочленов P с указанным типом симметрии таков:

$$\begin{aligned} P &= a_4 u_{-1} uu_1 u_2 + a_3 (u_{-1} uu_1 + u_{-1} uu_2 + u_{-1} u_1 u_2 + uu_1 u_2) + \\ &\quad + a_2 (u_{-1} + u_1)(u + u_2) + b_2 (u_{-1} u_1 + uu_2) + a_1 (u_{-1} + u + u_1 + u_2) + a_0. \end{aligned}$$

Применяя описанную в работе [21] процедуру построения аффинно-линейного многочлена по биквадратичному, несложно показать, что выписанные многочлены действительно отвечают случаю общего положения.

Аналогично в тригонометрическом случае $s(x) = \text{sh}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \text{ch}(2u) &= \tilde{u}, \quad e^{2\gamma} = \tilde{\gamma}, \quad \partial_t = -\text{sh}(4\gamma) \partial_{\tilde{t}}, \\ H &= (\gamma + \gamma^{-1})(u_1 - \gamma u)(\gamma u_1 - u) + \frac{1}{4}(1 - \gamma^2)^2(1 + \gamma^{-2}), \\ P &= (\gamma u_2 - u_{-1})(u_1 - \gamma u) + (u_2 - \gamma u_1)(\gamma u_{-1} - u) + \frac{1}{4}(1 - \gamma^2)^2(1 + \gamma^{-2}) \end{aligned} \tag{33}$$

(опять-таки в формулах для H , P тильда над u , γ опущена); в рациональном случае $s(x) = x$ замена имеет вид

$$\begin{aligned} u^2 &= \tilde{u}, & \partial_t &= -16\gamma\partial_{\tilde{t}}, \\ H &= (u_1 - u)^2 - 2\gamma^2(u_1 + u) + \gamma^4, \\ P &= \frac{1}{2}(u_2 + u)(u_1 - u_{-1}) - u_2u - u_1u_{-1} - \gamma^2(u_{-1} + u + u_1 + u_2) + 3\gamma^4. \end{aligned} \quad (34)$$

Вычисления в этих случаях не доставляют особых затруднений. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Многочлен P (32) отличается от многочлена Q из соответствующего квад-уравнения Q_4 типом симметрии: P зависит лишь от одного параметра γ , ассоциированного с самим квадратом, тогда как Q зависит от параметров γ , γ' , ассоциированных с парами противоположных ребер квадрата. Связь между этими многочленами описывается предельным переходом

$$\text{const} \cdot P(\gamma) = \lim_{\gamma' \rightarrow \gamma} \frac{Q(\gamma, -\gamma')}{\gamma - \gamma'}.$$

Случаи (33) и (34) связаны аналогичным образом с квад-уравнениями $Q_3|_{\delta=1}$ и Q_2 .

Непосредственной проверкой можно доказать следующее свойство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Уравнение (29) в тригонометрическом случае (33) и рациональном случае (34) связано с цепочкой (4) подстановкой $w = H/P - 1$.

В эллиптическом случае такая подстановка не проходит, и для него пока не удалось найти какую-либо подстановку, приводящую к другой цепочке второго порядка.

В заключение отметим вырождения, приводящие к цепочкам из раздела 3. В предельном случае $\gamma = 0$ многочлены (34) совпадают с многочленами (25), отвечающими цепочке (а) (отметим, что подстановка $\gamma = 0$ непосредственно в (28) не имеет смысла, поскольку $f(q, p; 0) \equiv 1$; предварительно требуется растянуть t). При $\gamma \neq 0$ можно положить, не теряя общности, $\gamma = 1$, применяя растяжение переменных u и t . В случае (33), делая растяжение $u \rightarrow \delta^{-1}u$ и переходя к пределу $\delta \rightarrow 0$, получаем многочлены (26), отвечающие цепочке (i).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы изучили эволюционные цепочки второго порядка, связанные со специальными непрерывными симметриями для дискретных семиточечных уравнений на треугольной решетке. За исключением нескольких наиболее вырожденных случаев (уравнения (f), (g), (h)), все эти цепочки принадлежат к семейству (29). За исключением максимально невырожденного случая, все цепочки допускают разностную подстановку в цепочку (4). Предложенная схема вывода не оставляет сомнения в интегрируемости всех рассматриваемых уравнений, убедительным указанием на это служит то, что сдвиг по двумерной решетке можно интерпретировать, как преобразование Бэклунда. Однако такие аспекты интегрируемости, как высшие симметрии, представления нулевой кривизны, солитонные решения, пока остаются неизученными и нуждаются в дополнительном исследовании, возможно, индивидуальном для каждого из рассмотренных примеров. Вместе с тем представляет интерес исследование более общих двухкомпонентных уравнений, связанных с непрерывными симметриями семиточечных уравнений.

Список литературы

- [1] V. G. Papageorgiou, F. W. Nijhoff, “On some integrable discrete-time systems associated with the Bogoyavlensky lattices”, *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, **228**:1–4 (1996), 172–188.
- [2] D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna, R. Yamilov, “On Miura transformations and Volterra-type equations associated with the Adler–Bobenko–Suris equations”, *SIGMA*, **4** (2008), 077, 14 pp.
- [3] V. E. Adler, V. V. Postnikov, “On discrete 2D integrable equations of higher order”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:4 (2014), 045206, 16 pp.
- [4] Р. Н. Гарифуллин, А. В. Михайлов, Р. И. Ямилов, “Дискретное уравнение на квадратной решетке с нестандартной структурой высших симметрий”, *ТМФ*, **180**:1 (2014), 17–34.
- [5] Yu. B. Suris, “Bi-Hamiltonian structure of the qd algorithm and new discretizations of the Toda lattice”, *Phys. Lett. A*, **206**:3–4 (1995), 153–161.
- [6] Yu. B. Suris, “A discrete-time relativistic Toda lattice”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**:2 (1996), 451–465.
- [7] Yu. B. Suris, “New integrable systems related to the relativistic Toda lattice”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:5 (1997), 1745–1761.
- [8] В. Э. Адлер, “Преобразования Лежандра на треугольной решетке”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:1 (2000), 1–11.
- [9] V. E. Adler, “On the structure of the Bäcklund transformations for the relativistic lattices”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **7**:1 (2000), 34–56.
- [10] V. E. Adler, Yu. B. Suris, “ Q_4 : integrable master equation related to an elliptic curve”, *Int. Math. Res. Not.*, **2004**:47 (2004), 2523–2553.
- [11] R. Boll, Yu. B. Suris, “Non-symmetric discrete Toda systems from quad-graphs”, *Appl. Anal.*, **89**:4 (2010), 547–569.
- [12] V. E. Adler, A. B. Shabat, “On the one class of hyperbolic systems”, *SIGMA*, **2** (2006), 093, 17 pp., arXiv: nlin.SI/0612060.
- [13] Р. И. Ямилов, “О классификации дискретных эволюционных уравнений”, *УМН*, **38**:6(234) (1983), 155–156.
- [14] R. I. Yamilov, “Symmetries as integrability criteria for differential difference equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:45 (2006), R541–R623.
- [15] В. Э. Адлер, “Необходимые условия интегрируемости для эволюционных уравнений на решетке”, *ТМФ*, **181**:2 (2014), 276–295.
- [16] В. Э. Адлер, “Интегрируемые Мёбиус-инвариантные эволюционные цепочки второго порядка”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:4 (2016), 13–25.
- [17] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, D. Levi, “Classification of five-point differential-difference equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:12 (2017), 125201, 27 pp.
- [18] R. N. Garifullin, R. I. Yamilov, “Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:34 (2012), 345205, 23 pp.
- [19] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “Nonlinear differential-difference equations”, *J. Math. Phys.*, **16**:3 (1975), 598–603.
- [20] T. Tsuchida, “Integrable discretizations of derivative nonlinear Schrödinger equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:36 (2002), 7827–7847.
- [21] В. Э. Адлер, А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис, “Дискретные нелинейные гиперболические уравнения. Классификация интегрируемых случаев”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:1 (2009), 3–21.