Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, С. Е. Воробьева, Э. В. Иванова,
М. В. Компаниец, Представление ренормгрупповых
функций несингулярными интегралами в модели крити-
ческой динамики ферромагнетиков: четвертый порядок
 ε -разложения, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 1, 105–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 04:09:13

© 2018 г.

Л. Ц. Аджемян*, С. Е. Воробьева*,
Э. В. Иванова*, М. В. Компаниец*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕНОРМГРУППОВЫХ ФУНКЦИЙ НЕСИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В МОДЕЛИ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ: ЧЕТВЕРТЫЙ ПОРЯДОК ε -РАЗЛОЖЕНИЯ

С использованием представления для ренормгрупповых функций через несингулярные интегралы произведен расчет динамического критического индекса в модели критической динамики ферромагнетиков в четвертом порядке ε -разложения. Вычисления диаграмм Фейнмана проводились с помощью техники *Sector Decomposition*, обобщенной на задачи критической динамики.

Ключевые слова: ренормализационная группа, ε -разложение, многопетлевые диаграммы, критические показатели.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9412>

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] предложен подход, позволяющий сводить вычисление β -функции и аномальных размерностей в моделях критической статистики к расчету интегралов, не содержащих сингулярностей по ε , удобных для численного интегрирования. В статье [3] этот метод обобщен на задачи критической динамики. В настоящей работе данный подход использован для вычисления динамического критического индекса модели критической динамики ферромагнетиков (“модель А” в обзоре [4]) в четвертом порядке ε -разложения. Диаграммы Фейнмана были вычислены с использованием техники *Sector Decomposition* [5].

Статья построена следующим образом. В разделе 2 изложена схема ренормирования, в рамках которой с использованием R -операции ренормгрупповые (РГ-) функции представлены в виде разложений, свободных от ультрафиолетовых (УФ) расходимостей. В разделе 3 получено представление Фейнмана для диаграмм динамической теории, необходимое для их вычисления посредством техники *Sector Decomposition*. В разделе 4 получена формулировка R -операции для диаграмм, проинтегрированных по времени. В разделе 5 приведены результаты четырехпетлевого расчета. В приложении изложены некоторые детали расчета диаграмм.

* Санкт-петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: l.adzhemyan@spbu.ru

2. РЕНОРМИРОВКА МОДЕЛИ

Неренормированное действие модели A критической динамики в пространстве размерности $d = 4 - \varepsilon$ определяется набором ϕ_0 двух полей $\phi_0 \equiv \{\psi_0, \psi'_0\}$ и имеет вид [6]

$$\begin{aligned} S_0(\phi_0) &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 \left[-\partial_t \psi_0 + \frac{\lambda_0 \delta S_0^{\text{st}}}{\delta \psi_0} \right] = \\ &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 \left[\partial_t \psi_0 + \lambda_0 \left(\partial^2 \psi_0 - \tau_0 \psi_0 - \frac{1}{3!} g_0 \psi_0^3 \right) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где неренормированное статическое действие

$$S_0^{\text{st}}(\psi_0) = -\frac{(\partial \psi_0)^2}{2} - \frac{\tau_0 \psi_0^2}{2} - \frac{1}{4!} g_0 \psi_0^4. \quad (2)$$

Ренормированное действие $S_R = S_B + \Delta S$ представляет собой сумму базового действия S_B и контрчленов ΔS , с исходным действием (1) оно связано мультипликативной перенормировкой параметров [6]:

$$S_B = \lambda \psi' \psi' + \psi' \left[-\partial_t \psi + \lambda \left(\partial^2 \psi - \tau \psi - \frac{1}{3!} \mu^\varepsilon g \psi^3 \right) \right], \quad (3)$$

$$S_R = Z_1 \lambda \psi' \psi' + \psi' \left[-Z_2 \partial_t \psi + \lambda \left(Z_3 \partial^2 \psi - Z_4 \tau \psi - \frac{1}{3!} Z_5 \mu^\varepsilon g \psi^3 \right) \right], \quad (4)$$

где

$$\lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad \psi_0 = \psi Z_\psi, \quad \psi'_0 = \psi' Z_{\psi'}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\lambda Z_{\psi'}, & Z_2 &= Z_{\psi'} Z_\psi, & Z_3 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\psi, \\ Z_4 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\tau Z_\psi, & Z_5 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_g Z_\psi^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Из мультипликативной ренормируемости моделей (1), (2) следует, что динамические константы ренормировки Z_ψ , Z_τ , Z_g совпадают со статическими и справедливо соотношение $Z_{\psi'} Z_\lambda = Z_\psi$ [6]. Это означает, что константы ренормировки Z_3 , Z_4 , Z_5 являются чисто статическими и

$$Z_1 = Z_2. \quad (7)$$

Единственной новой константой ренормировки является

$$Z_\lambda = Z_1^{-1} Z_\psi^2 = Z_2^{-1} Z_\psi^2. \quad (8)$$

Как и в статье [2], выберем схему ренормировки, аналогичную схеме вычитаний на нулевых импульсах и частотах, с дополнительным условием $\mu^2 = \tau$. Константы ренормировки определим из требований

$$\bar{\Gamma}_i^R|_{\mu^2=\tau} = 1, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (9)$$

где $\bar{\Gamma}_i^R$ – ренормированные аналоги следующих функций (все на нулевых частотах $\omega = 0$ и импульсах $p = 0$):

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1 &= \frac{\Gamma(0,2)}{2\lambda}, & \bar{\Gamma}_2 &= \partial_{i\omega} \Gamma(1,1), \\ \bar{\Gamma}_3 &= -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma(1,1)}{\lambda}, & \bar{\Gamma}_4 &= -\frac{\Gamma(1,1) - \Gamma(1,1)|_{\tau=0}}{\lambda\tau}, & \bar{\Gamma}_5 &= -\frac{\Gamma(3,1)}{\lambda g \mu^\varepsilon}, \end{aligned} \quad (10)$$

и введено обозначение для 1-неприводимых функции Грина базовой теории (3)

$$\Gamma_{(n_1, n_2)} \equiv \underbrace{\langle \psi \cdots \psi \rangle}_{n_1} \underbrace{\langle \psi' \cdots \psi' \rangle}_{n_2} \big|_{1-\text{irr}}. \quad (11)$$

В используемой схеме ренормировки константы ренормировки Z_i , как и в схеме минимальных вычитаний, зависят лишь от заряда g и размерности пространства, а определяемые этими константами РГ-функции (β -функция и аномальные размерности γ_i) даются выражениями

$$\beta(g) = -\varepsilon \frac{g}{1 + g \partial_g \ln Z_g}, \quad \gamma_i(g) = -\varepsilon \frac{g \partial_g \ln Z_i}{1 + g \partial_g \ln Z_g}. \quad (12)$$

Динамический критический индекс определяется единственной новой по сравнению со статикой РГ-функцией γ_λ , для которой мы будем использовать вытекающие из формул (6)–(8), (12) соотношения

$$\gamma_\lambda = 2\gamma_\psi - \gamma_1, \quad 2\gamma_\psi = \gamma_3. \quad (13)$$

Учет контрчленов можно заменить действием R -операции на диаграммы базовой теории (3) и записать ренормированные функции $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ в виде [6]

$$\Gamma_{(n_1, n_2)}^R = R \Gamma_{(n_1, n_2)} = (1 - K) R' \Gamma_{(n_1, n_2)}, \quad (14)$$

где операция R' устраняет расходимости в существенных подграфах диаграммы, а $(1 - K)$ – остающуюся поверхностную расходимость. Полную R -операцию можно записать в виде [7]

$$R \Gamma = \prod_i (1 - K_i) \Gamma, \quad (15)$$

где произведение берется по всем существенным (имеющим поверхностную расходимость) подграфам диаграмм, входящих в Γ и диаграммам в целом (если у них есть поверхностная расходимость).

Теория ренормировок гарантирует УФ-конечность РГ-функций (12) – сокращение полюсов по ε в правых частях этих соотношений, однако сингулярный характер констант ренормировки весьма затрудняет их определение численными методами. В работе [3] для расчета РГ-функций предложено использовать соотношения

$$\gamma_i = \frac{2f_i}{1 + f_3}, \quad i = 1, 2, 3, 5, \quad (16)$$

где

$$f_i = -R\tau(\partial_\tau \bar{\Gamma}_i) \big|_{\mu^2=\tau} = \tau R\bar{\Gamma}_i^{(1)} \big|_{\mu^2=\tau}. \quad (17)$$

Операция $-\partial_\tau \bar{\Gamma}_i$ соответствует сумме всевозможных вставок составного оператора $\Phi = \psi' \psi$ в линии диаграмм функции $\bar{\Gamma}_i$, поэтому величина $\bar{\Gamma}_i^{(1)}$ имеет смысл соответствующей 1-неприводимой функции со вставкой составного оператора Φ . 1-Неприводимые функции $\bar{\Gamma}_i^{(1)}$ с $i = 1, 2, 3, 5$ не имеют поверхностной расходимости, поэтому для них R -операция в формуле (15) сводится к R' -операции. Все величины f_i не зависят от μ и τ .

При вычислении величин f_i с использованием представления (15) операции вычитания $1 - K_i$ в используемой схеме ренормировки сводятся к вычитанию начального отрезка ряда по импульсу и частоте. Для логарифмических подграфов имеем

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \Gamma(p^2, \omega) - \Gamma|_{p=0, \omega=0}, \quad (18)$$

для квадратичных

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \Gamma(p^2, \omega) - \Gamma|_{p=0, \omega=0} - p^2 \partial_{p^2} \Gamma|_{p=0, \omega=0} - i\omega \partial_{i\omega} \Gamma|_{p=0, \omega=0}. \quad (19)$$

В обоих случаях операцию вычитания можно записать в виде остаточного члена ряда Тейлора в интегральной форме:

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \int_0^1 da \partial_a \Gamma(ap^2, a\omega) \quad (20)$$

для логарифмических подграфов и

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \int_0^1 da (1 - a) \partial_a^2 \Gamma(ap^2, a\omega) \quad (21)$$

– для квадратичных. Действие операции R на диаграмму χ с учетом выражений (20), (21) можно записать в виде [7]

$$R\chi = \prod_i \int_0^1 da_i (1 - a_i)^{n_i} \partial_{a_i}^{n_i+1} \chi(\{a\}), \quad (22)$$

где произведение берется по всем существенным подграфам $\chi^{(i)}$ (включая диаграмму χ как целое), a_i – параметр растяжения внутри i -го подграфа импульсов и частот, втекающих в этот подграф; $n_i = 0$ для логарифмических подграфов и $n_i = 1$ для квадратичных. Преимущество такой записи ренормированных величин заключается в том, что ответ представляется в виде интегралов, конечных при $\varepsilon = 0$, причем в форме, в которой не происходит сокращения больших вкладов в подынтегральном выражении (“теория без расходимостей”). Отметим, что вставка оператора Φ в логарифмический подграф делает его несущественным, а вставка Φ в квадратично-расходящийся подграф делает подграф логарифмическим.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФЕЙНМАНА

В статической модели (2) переход к представлению Фейнмана основан на том, что в импульсном представлении подынтегральные выражения для диаграмм представляют собой произведения пропагаторов вида $1/(k^2 + \tau)$, зависящих от квадратов импульсов интегрирования. Представление для подынтегральных выражений в терминах фейнмановских параметров можно получить в этих случаях непосредственно по виду диаграмм.

Пропагаторы динамической модели (3) в импульсно-временном представлении имеют вид

$$\text{---} \overset{t_1}{\bullet} \text{---} \overset{t_2}{\bullet} = \langle \psi(t_1) \psi(t_2) \rangle = \frac{1}{E_k} e^{-\lambda E_k |t_1 - t_2|}, \quad (23)$$

$$\text{---} \overset{t_1}{\bullet} \text{---} \overset{t_2}{\bullet} = \langle \psi(t_1) \psi'(t_2) \rangle = \theta(t_1 - t_2) e^{-\lambda E_k (t_1 - t_2)}, \quad (24)$$

где $E_k \equiv k^2 + \tau$.

Для расчета РГ-функций требуется вычислять диаграммы на нулевой внешней частоте. Интегрирование по промежуточным частотам (или временам) с пропагаторами (23), (24) легко выполняется и дает совокупность квадратичных по импульсам множителей в знаменателе [6]. После этого возникает возможность перехода к представлению Фейнмана. Отличие от статического случая (модель (2)) состоит в том, что множители в знаменателе являются в данном случае суммой “энергий” E_k , и в то же время в пропагаторе (24) множитель E_k в знаменателе отсутствует. Мы рассмотрим на примере трехпетлевой диаграммы необходимые модификации для построения фейнмановского представления, а затем сформулируем общие правила ее построения прямо по виду диаграммы.

В третьем порядке теории возмущений вклад в величину f_1 определяется единственной диаграммой

(25)

Диаграммы, определяющие вклад в f_1 , вычисляются на нулевой частоте, для диаграммы (25) это соответствует взятию интеграла по всевозможным временам t_1 и t_2 . С учетом Θ -функции $\Theta(t_2 - t_1)$ в линии $\psi\psi'$ в диаграмме (25) имеется три “временные версии”: $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, $t_1 \leq t_0 \leq t_2$ и $t_1 \leq t_2 \leq t_0$. Приведем графические изображения для этих временных версий, а также результат интегрирования по времени экспоненциальных множителей в пропагаторах (23), (24) в каждой из версий:

$$\sim \frac{1}{(E_{k1} + E_{k2} + E_{k5})} \frac{1}{(E_{k3} + E_{k4} + E_{k5})}, \quad (26)$$

$$\sim \frac{1}{(E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} + E_{k4})} \frac{1}{(E_{k3} + E_{k4} + E_{k5})}, \quad (27)$$

$$\sim \frac{1}{(E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} + E_{k4})} \frac{1}{(E_{k1} + E_{k2} + E_{k5})}. \quad (28)$$

Проведенные между каждой парой соседних вершин вертикальные пунктиры (“сечения”) определяют множители в знаменателях, равные сумме “энергий” E_k линий в этом сечении [6].

Зависимость от импульсов интегрирования в диаграммах после проведения интегрирования по временам имеет структуру, позволяющую перейти к фейнмановскому представлению. Рассмотрим такой переход на примере временной версии (26). С учетом множителей $1/E_k$ в пропагаторах (23) диаграмме сопоставляется интеграл

$$J = \int d\mathbf{k}_1 \cdots \int d\mathbf{k}_5 \frac{\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5)}{E_{k1} E_{k2} E_{k3} E_{k5} (E_{k1} + E_{k2} + E_{k5}) (E_{k3} + E_{k4} + E_{k5})}. \quad (29)$$

Используя в выражении (29) формулу Фейнмана, получаем равенство

$$J = \int_0^1 \prod dv_i \delta\left(\sum_i v_i - 1\right) F(\{v\}), \quad (30)$$

где

$$F(\{v\}) = \int d\mathbf{k}_1 \cdots \int d\mathbf{k}_5 \frac{\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5)}{Q^\alpha}, \quad (31)$$

$$Q = v_1 E_{k_1} + v_2 E_{k_2} + v_3 E_{k_3} + v_5 E_{k_5} + \\ + v_6 (E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_5}) + v_7 (E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_5}), \quad (32)$$

$\alpha = 6$ – число сомножителей в знаменателе формулы (29). Записывая Q в виде

$$Q = u_1 E_{k_1} + u_2 E_{k_2} + u_3 E_{k_3} + u_4 E_{k_4} + u_5 E_{k_5}, \quad (33)$$

где

$$u_1 = v_1 + v_6, \quad u_2 = v_2 + v_6, \quad u_3 = v_3 + v_7, \\ u_4 = v_7, \quad u_5 = v_5 + v_6 + v_7, \quad (34)$$

из равенств (31), (33) получаем, что

$$F(\{v\}) = \int d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_5 \frac{\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5)}{(u_1 E_{k_1} + u_2 E_{k_2} + u_3 E_{k_3} + u_4 E_{k_4} + u_5 E_{k_5})^\alpha}. \quad (35)$$

Выбирая в формуле (35) в качестве независимых переменных некоторый набор $\{\mathbf{k}_{i_1}, \mathbf{k}_{i_2}, \mathbf{k}_{i_3}\}$ и выполняя интегрирования с помощью δ -функций, приходим к выражению вида

$$F(\{v\}) = \int d\mathbf{k}_{i_1} \int d\mathbf{k}_{i_2} \int d\mathbf{k}_{i_3} \frac{1}{(C + V_{i_j, i_l} \mathbf{k}_{i_j} \mathbf{k}_{i_l})^\alpha}, \quad C \equiv \tau \sum_{j=1}^5 u_j. \quad (36)$$

Вычисляя интеграл от степени квадратичной формы, получаем равенство

$$F(\{v\}) = \pi^{dn/2} C^{3d/2-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - dn/2)}{\Gamma(\alpha)} (\det V)^{-d/2}, \quad (37)$$

где n – число петель в диаграмме (в рассматриваемом случае $n = 3$).

Значение детерминанта $\det V$ в выражении (37) не зависит от выбора переменных интегрирования $\{\mathbf{k}_{i_1}, \mathbf{k}_{i_2}, \mathbf{k}_{i_3}\}$, и его можно определить прямо по виду диаграммы. По построению $\det V$ представляет собой сумму произведений трех сомножителей u_i . Для любого набора независимых переменных интегрирования $\{\mathbf{k}_{i_1}, \mathbf{k}_{i_2}, \mathbf{k}_{i_3}\}$ диагональные элементы матрицы V равны u_{i_1} , u_{i_2} , u_{i_3} , а их произведение дает вклад в $\det V$ с коэффициентом единица. Недиagonальные элементы матрицы V не содержат величин u_{i_1} , u_{i_2} , u_{i_3} , следовательно, $\det V$ не содержит старших степеней u_i . В качестве независимых переменных нельзя выбирать наборы импульсов, входящих в “законы сохранения” (аргументы δ -функций в (35)). В рассматриваемом случае такими являются наборы $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_5\}$, $\{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5\}$, и соответствующие произведения $u_1 u_2 u_5$ и $u_3 u_4 u_5$ отсутствуют в $\det V$. Таким образом, для диаграммы (25) $\det V$ дается выражением

$$\det V = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_5 + u_1 u_4 u_5 + u_2 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_5 + u_2 u_4 u_5, \quad (38)$$

в котором величины u_i необходимо выразить через v_i согласно формуле (34). Во временных версиях (27) и (28) выражение (38) сохраняется, изменяются соответствующим образом лишь связи переменных u_i и v_i , которые легко можно найти по виду диаграмм.

Заметим, что выражения (33), (38) совпадают по виду с соответствующими выражениями для статической диаграммы (25) (без перечеркнутых линий) теории ϕ^4 .

4. R-ОПЕРАЦИЯ ПОСЛЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ

В принятой схеме ренормировки вычитания из расходящихся подграфов проводятся на нулевой частоте, втекающей в подграф. В формулировке (22) это включает в себя процедуру растяжения втекающей в подграф частоты $\omega \rightarrow a\omega$. Чтобы интерпретировать такое растяжение в импульсно-временном представлении и выполнить интегрирование по временам с использованием временных версий, это растяжение можно заменить соответствующим изменением подынтегрального выражения подграфа. Рассмотрим в качестве примера четыреххвостый подграф, образованный линиями 3 и 4, во временной версии (26). Зависимость подграфа от втекающей частоты ω определяется интегралом

$$\int_0^\infty dt \exp[-t(ia\omega + \lambda E_{k_3} + \lambda E_{k_4})] = \frac{1}{a} \int_0^\infty dt \exp\left[-t\left(i\omega + \lambda \frac{E_{k_3}}{a} + \lambda \frac{E_{k_4}}{a}\right)\right],$$

где a – параметр растяжения, $t = t_1 - t_2$ (см. формулу (25)) и учтена зависимость от времени пропагаторов (23), (24). Правая часть равенства, полученная заменой $ta \rightarrow t$, показывает, что растяжение втекающей в подграф частоты эквивалентно замене $E_k \rightarrow E_k/a$ во всех экспоненциальных множителях пропагаторов линий (23), (24), входящих в подграф, а также деления на a всего подынтегрального выражения. После такого преобразования подынтегрального выражения для подграфа диаграмму можно вычислить в импульсно-временном представлении. Вклад правого сечения во временной версии (26) заменяется на

$$\frac{1}{a} \frac{1}{E_{k_3}/a + E_{k_4}/a + E_{k_5}} = \frac{1}{E_{k_3} + E_{k_4} + aE_{k_5}}. \quad (39)$$

Действуя аналогичным образом для временной версии (27), находим, что меняются оба сомножителя в знаменателе, что дает равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{1}{(E_{k_3}/a + E_{k_4}/a + E_{k_1} + E_{k_2})(E_{k_3}/a + E_{k_4}/a + E_{k_5})} &= \\ &= \frac{1}{(E_{k_3} + E_{k_4} + aE_{k_1} + aE_{k_2})(E_{k_3} + E_{k_4} + aE_{k_5})}. \end{aligned} \quad (40)$$

Учитывая, что рассматриваемый подграф является логарифмическим, действие операции (22) на (40) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \int_0^1 da \partial_a \left(\frac{a}{(E_{k_3} + E_{k_4} + aE_{k_1} + aE_{k_2})(E_{k_3} + E_{k_4} + aE_{k_5})} \right) &= \\ &= \frac{1}{(E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_1} + E_{k_2})E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_5}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Это означает, что контрчлен к этой временной версии не нужен.

Рассмотренные примеры легко обобщаются на многопетлевые подграфы. Учет растяжения в a раз втекающей в подграф частоты в терминах интегрирования по временным версиям заменяется на введение множителя a перед всеми входящими в сечения энергиями $E_{k,j}$, не принадлежащими подграфу. Если число сечений, проходящих через подграф, превышает число сечений уединенного подграфа, то на каждое дополнительное сечение вводится дополнительный множитель a . Для логарифмических подграфов соответствующая временная версия не требует в этом случае введения растяжения. Для квадратично расходящихся подграфов одно дополнительное сечение делает данную временную версию логарифмической и понижает до $n_i = 0$ значение параметра в операции (22). В случае двух и более дополнительных сечений контрчлен к данной временной версии не нужен.

Для окончательного представления R' -операции в форме (22) в импульсном представлении после интегрирования по временным версиям необходимо также провести растяжения втекающих в расходящиеся подграфы импульсов. В фейнмановском представлении этому соответствует следующее правило расстановки множителей a в слагаемых статического детерминанта (38) [8]. Для n' -петлевого подграфа n -петлевой диаграммы множитель $a^{N-n'}$ ставится перед слагаемыми детерминанта, содержащими $N > n'$ параметров u_i , принадлежащих рассматриваемому подграфу. Для диаграммы (26) это дает равенство

$$\det V_a = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + a u_1 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_5 + u_1 u_4 u_5 + a u_2 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_5 + u_2 u_4 u_5. \quad (42)$$

Окончательный вид детерминанта с растяжением для временной версии (26) можно получить, выражая в формуле (42) параметры u_i через v_j с помощью соотношения (34), в которое введено растяжение a в соответствие с изменением сечения (39):

$$u_1 = v_1 + v_6, \quad u_2 = v_2 + v_6, \quad u_3 = v_3 + v_7, \quad u_4 = v_7, \quad u_5 = v_5 + v_6 + a v_7. \quad (43)$$

В итоге в терминах параметров v_i получаем, что

$$\begin{aligned} \det V_a = & v_1 v_2 v_3 + 2 v_1 v_2 v_7 + v_1 v_3 v_5 + 2 v_1 v_3 v_6 + 2 a v_1 v_3 v_7 + 2 v_1 v_5 v_7 + \\ & + 4 v_1 v_6 v_7 + 3 a v_1 v_7^2 + v_2 v_3 v_5 + 2 v_2 v_3 v_6 + 2 a v_2 v_3 v_7 + 2 v_2 v_5 v_7 + \\ & + 4 v_2 v_6 v_7 + 3 a v_2 v_7^2 + 2 v_3 v_5 v_6 + 3 v_3 v_6^2 + \\ & + 4 a v_3 v_6 v_7 + 4 v_5 v_6 v_7 + 6 v_6^2 v_7 + 6 a v_6 v_7^2. \end{aligned} \quad (44)$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты расчетов по теории возмущений мы приводим в терминах заряда $u = (S_d/(2\pi)^d)g$, где $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь d -мерной сферы единичного радиуса. Динамический критический индекс z определяется выражением

$$z = 2 - \gamma_\lambda^*, \quad (45)$$

где $\gamma_\lambda^* \equiv \gamma_\lambda(u_*)$ – значение РГ-функции $\gamma_\lambda(u)$ в неподвижной точке $u = u_*$ (корне уравнения $\beta(u_*) = 0$). Используя формулу (13) и учитывая, что величина $2\gamma_\psi^* = \eta$ определяет известный статический индекс Фишера η , имеем

$$\gamma_\lambda^* = \eta - \gamma_1^*, \quad \eta = \gamma_3^*. \quad (46)$$

Используя для нахождения РГ-функций соотношения (16) находим, что

$$\gamma_1^* = \frac{2f_1^*}{1+f_3^*}, \quad \gamma_3^* = \frac{2f_3^*}{1+f_3^*}. \quad (47)$$

Выражая f_3^* через η с использованием выражений (46), (47), получаем окончательно, что

$$\gamma_\lambda^* = \eta - (2 - \eta)f_1^*. \quad (48)$$

В рассматриваемой схеме ренормировки значение заряда в неподвижной точке u_* рассчитано численно для n -компонентного поля ψ с пятипетлевой точностью в работе [9]. Необходимые для наших целей три члена ε -разложения величины u_* даются аналитическим выражением

$$\begin{aligned} u_* = & \frac{2\varepsilon}{3k_1} + \frac{\varepsilon^2}{81k_1^3}(27k_1^2 - 2k_3 + 36k_4) + \frac{\varepsilon^3}{27k_1^5} \left[\frac{41}{48}k_1^2k_3 + \frac{4}{81}k_3^2 + 16k_4^2 - \right. \\ & - \frac{16}{9}k_3k_4 - \frac{5015}{1728}k_1^4 - 8\zeta(3)k_1k_4 + \frac{75}{32}k_1k_5 - \\ & \left. - \frac{181}{16}k_1k_6 - \left(\frac{25}{96} + \frac{3}{2}\zeta(3) \right) k_1^2k_4 \right], \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{n+8}{9}, \quad k_2 = \frac{n^2+6n+20}{27}, \quad k_3 = \frac{n+2}{3}, \quad k_4 = \frac{5n+22}{27}, \\ k_5 = \frac{3n^2+22n+56}{81}, \quad k_6 = \frac{n^2+20n+60}{81}. \end{aligned} \quad (50)$$

Индекс Фишера в четвертом порядке ε -разложения определяется выражением

$$\begin{aligned} \eta = \frac{\varepsilon^2(n+2)}{2(n+8)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4(n+8)^2}(-n^2+56n+272) + \frac{\varepsilon^2}{16(n+8)^4}(-5n^4-230n^3+ \right. \\ \left. + 1124n^2+17920n+46144-384(n+8)(5n+22)\zeta(3)) \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Результаты расчета величины $f_1(u)$ в четвертом порядке теории возмущений представлены в табл. 1¹⁾:

$$\begin{aligned} 2f_1(u) = & (a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2)k_3u^2 - (a_4 + a_5\varepsilon)k_1k_3u^3 + \\ & + (a_6k_2k_3 + a_7k_3^2 + a_8k_3k_4 + a_9k_3k_4)u^4. \end{aligned} \quad (52)$$

Двух- и трехпетлевое приближения представлены единственными диаграммами 1 и 2 соответственно. Каждой из четырехпетлевых диаграмм соответствует сумма вкладов со всевозможными перечеркиваниями одной из линий в каждой из внутренних вершин. Функции $f(n)$ определяют дополнительные множители при каждой из диаграмм, отличающие n -компонентный случай от однокомпонентного. Эти множители определяются только топологией диаграмм и совпадают с соответствующими множителями статической модели (все $k_i = 1$ при $n = 1$).

¹⁾ Детали расчета приведены в приложении.

ТАБЛИЦА 1

		$f(n)$	результат	a_i	результат
1		k_3	$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2$	a_1	$\ln(4/3)/4$
				a_2	$-0.1284504997333(33)$
2		$k_1 k_3$	$a_4 + a_5\varepsilon$	a_3	$0.1897615538667(33)$
3		$k_2 k_3$	a_6	a_4	$-0.049271254182(8)$
				a_5	$0.22915811(5)$
4		k_3^2	a_7	a_6	$0.01749280(24)$
5		$k_3 k_4$	a_8	a_7	$-0.0108879(27)$
				a_8	$0.062068(33)$
6		$k_3 k_4$	a_9	a_9	$0.12669(5)$

Результаты расчета динамического индекса, как правило, представляют в виде $z = 2 + R\eta$. Учитывая соотношения (45), (48), для величины R получаем равенство

$$R = \frac{2f_1^*(1 - \eta/2)}{\eta - 1}. \quad (53)$$

Подставляя в это выражение формулы (49), (51), (52), находим три члена ε -разложения величины R :

$$R = \left(6 \ln \frac{4}{3} - 1\right) \left(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2(c_3 + c_4n)}{(n+8)^2}\right), \quad (54)$$

где коэффициенты $c_i \equiv C_i/[6 \ln(4/3) - 1]$ определяются соотношениями

$$C_1 = 30a_1 + 24a_2 - 16a_4, \quad (55)$$

$$C_2 = \frac{8593}{648}a_1 + 30a_2 + 24a_3 - 28a_4 - 16a_5 + 32a_6, \quad (56)$$

$$C_3 = -\left(\frac{4030}{3} + 264\zeta(3)\right)a_1 - 672a_4 - 1408a_6 + 576a_7 + 704a_8 + 704a_9, \quad (57)$$

$$C_4 = -\left(\frac{830}{3} + 60\zeta(3)\right)a_1 - 144a_4 - 320a_6 + 288a_7 + 160a_8 + 160a_9. \quad (58)$$

Первые два члена ε -разложения (54) не зависят от числа компонент поля n . Первый из них был вычислен в работе [10], второй – в статье [11]. В работе [10] величина R вычислена также в главном порядке $1/n$ -разложения для произвольной размерности d :

$$R_\infty = \frac{4}{4-d} \left(\frac{d\Gamma^2(d/2-1)/\Gamma(d-2)}{8 \int_0^{1/2} dx [x(2-x)]^{d/2-2}} - 1 \right). \quad (59)$$

Первые члены разложения этой величины по $\varepsilon = 4 - d$ имеют вид

$$R_\infty = \left(6 \ln \frac{4}{3} - 1\right) (1 - 0.188483417\varepsilon - 0.099952926\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)). \quad (60)$$

С учетом того, что первые два члена ε -разложения (54) не зависят от n , они совпадают с соответствующими вкладами в формуле (60), что подтверждается результатами работ [10], [11]. Соотношение (60) определяет также коэффициент c_2 в квадратичном по ε вкладе из равенства (54), следовательно,

$$c_1 = -0.188483417, \quad c_2 = -0.099952926. \quad (61)$$

Для проверки точности расчетов диаграмм в табл. 1 мы рассчитали коэффициенты c_1 , и c_2 , используя соотношения (55), (56). Подставляя данные из таблицы, находим значения $c_1 = -0.18848341720(21)$, $c_2 = -0.100096(11)$, что с хорошей точностью совпадает со значениями (61). Для коэффициентов c_3 , c_4 (57), (58) получаем равенства

$$c_3 = 21.56(6), \quad c_4 = 4.788(13). \quad (62)$$

Впервые эти коэффициенты были рассчитаны в работе [12]. Вычисления в этой работе проводились в импульсном представлении в схеме MS , точность расчета составила $1 \div 2\%$. В рамках погрешности полученные нами значения (62) согласуются с результатами работы [12], но имеют значительно меньшую погрешность.

Приведем для полноты картины полученное ε -разложение динамического индекса z для случая $n = 1$:

$$z = 2 + 0.013446156198(1)\varepsilon^2 + 0.0110362801761(28)\varepsilon^3 - 0.005576(12)\varepsilon^4. \quad (63)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе техника вычисления РГ-функций путем представления диаграмм Фейнмана в виде несингулярных интегралов использована для выполнения четырехпетлевого расчета модели А критической динамики. Вычисление четырехпетлевых диаграмм проводилось численно с помощью техники **Sector Decomposition**, обобщенной на задачи критической динамики. С этой целью был получен рецепт записи диаграмм (с учетом контрчленов) в фейнмановском представлении непосредственно по виду диаграмм. Исползованная техника позволила впервые произвести четырехпетлевой расчет в модели критической динамики с точностью порядка 0.3%.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Использование формулы (22) для R -операции при вычислении величины f_1 по диаграммам 1–6 в табл. 1 позволяет получить их представление в виде интегралов, не содержащих расходимостей по ε , как в импульсном, так и фейнмановском представлении. Оказалось, что диаграммы 1–3, не содержащие вложенных подграфов, более выгодно вычислять в импульсном представлении, а затем можно выполнить в них явное интегрирование по параметрам a . Используя симметричное протекание втекающего в однопетлевые подграфы импульса, удалось исключить скалярные произведения из выражений для сечений временных версий и выполнить аналитическое интегрирование по оставшимся углам при $\varepsilon = 0$, после чего осталось лишь

численно рассчитать четырехкратный интеграл по модулям импульсов. В данном случае вычитание контрчленов в подынтегральном выражении носит простой характер и не препятствует численному расчету. При желании можно легко провести явное сокращение плохо убывающих вкладов в подынтегральном выражении.

В диаграммах 4–6 в табл. 1 такое сокращение произвести затруднительно, и было осуществлено произведено дифференцирование по параметрам a подынтегральных функций, что заведомо дает выражение, свободное от расходимостей. Вычисления этих диаграмм проводились в фейнмановском представлении техникой **Sector Decomposition**. В качестве стратегии использовались секторы Спирса [13], которые для динамических диаграмм с полиномами Симанчика типа (44) можно легко получить из секторов статических диаграмм благодаря наличию замен (43), связывающих полиномы (42) и (44). Полученные “динамические” секторы следует дополнить последующими шагами декомпозиции из-за наличия в полиномах параметров растяжения a . Построение данных шагов декомпозиции подробно рассмотрено в работе [8].

Благодарности. Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного центра “Вычислительный центр СПбГУ”.

Список литературы

- [1] Л. Ц. Аджемян, М. В. Компаниец, “Ренормгруппа и ϵ -разложение: представление β -функции и аномальных размерностей несингулярными интегралами”, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 100–111.
- [2] Л. Ц. Аджемян, М. В. Компаниец, С. В. Новиков, В. К. Сазонов, “Представление β -функции и аномальных размерностей несингулярными интегралами: доказательство основного соотношения”, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 325–336.
- [3] Л. Ц. Аджемян, С. Е. Воробьева, М. В. Компаниец, “Представление несингулярными интегралами β -функции и аномальных размерностей в моделях критической динамики”, *ТМФ*, **185**:1 (2015), 3–11.
- [4] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, “Theory of dynamic critical phenomena”, *Rev. Modern Phys.*, **49**:3 (1977), 435–479.
- [5] T. Binoth, G. Heinrich, “An automatized algorithm to compute infrared divergent multi-loop integrals”, *Nucl. Phys. B*, **585**:3 (2000), 741–759.
- [6] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [7] О. И. Завьялов, *Перенормированные диаграммы Фейнмана*, Наука, М., 1979.
- [8] L. Ts. Adzhemyan, Yu. V. Kirienko, M. V. Kompaniets, “Critical exponent η in 2D $O(N)$ -symmetric φ^4 -model up to 6 loops”, [arXiv:1602.02324](https://arxiv.org/abs/1602.02324).
- [9] L. Ts. Adzhemyan, M. V. Kompaniets, “Five-loop numerical evaluation of critical exponents of the φ^4 theory”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **523**:1 (2014), 012049, 9 pp.
- [10] B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, S.-K. Ma, “Calculation of dynamic critical properties using Wilson’s expansion methods”, *Phys. Rev. Lett.*, **29**:23 (1972), 1548–1551.
- [11] Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, “Критическая динамика как теория поля”, *ТМФ*, **60**:1 (1984), 59–71.
- [12] Л. Ц. Аджемян, С. В. Новиков, Л. Сладкофф, “Расчет динамического индекса модели A критической динамики в порядке ϵ^4 ”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4. Физика, Химия*, 2008, № 4, 109–112.
- [13] E. R. Speer, “Mass singularities of generic Feynman amplitudes”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A (N. S.)*, **26**:1 (1977), 87–105.

Поступила в редакцию 6.06.2017,
после доработки 21.07.2017