Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Гарат, Динамическое нарушение симметрии в геометродинамике, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 2, 313–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:34:53

© 2018 г.

А. Гарат*

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ

С помощью теории возмущений первого порядка проанализирована локальная потеря симметрии, когда источник электромагнитного и гравитационного поля взаимодействует с агентом, который возмущает исходную геометрию, связанную с источником. Было доказано, что локальные калибровочные группы изоморфны локальным группам преобразований специальных тетрад. Эти тетрады определяют в каждой точке пространства-времени две ортогональные плоскости, такие что каждый вектор на этих плоскостях является собственным для тензора энергии-импульса Эйнштейна–Максвелла. Поскольку локальная калибровочная симметрия в абелевых или даже неабелевых полевых структурах в четырехмерных лоренцевых пространствах проявляется как существование локальных плоскостей симметрии, потеря симметрии выражается как наклон этих плоскостей под влиянием внешнего фактора. В данном строгом смысле исходная локальная симметрия теряется. На этом пути показано, что новые плоскости в той же точке отвечают после поворота, вызванного возмущением, новой симметрии. Основная задача состоит в демонстрации того, что геометрическое проявление локальных калибровочных симметрий является динамическим. Несмотря на то что исходные локальные симметрии нарушаются, возникают новые симметрии. Это свидетельствует о динамической эволюции локальных симметрий. Сформулирована новая теорема об эволюции динамической симметрии. Предложенная новая классическая модель может быть полезна для лучшего понимания аномалий в квантовых теориях поля.

Ключевые слова: новые группы, новый групповой изоморфизм, калибровочные симметрии Эйнштейна–Максвелла, теория возмущений, динамическое нарушение симметрии.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9413>

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий динамическое нарушение симметрии привлекало внимание многочисленных авторов [1]–[11]. Эти исследования в основном были сфокусированы на механизме генерации массы, при этом масса рассматривалась

*Physics Institute, Department of Sciences, University of the Republic, Montevideo, Uruguay.
E-mail: garat.alcides@gmail.com

как результат различных видов нарушения симметрии. В указанных статьях использовались методы квантовой теории поля.

В настоящей работе мы обращаемся к идее динамического нарушения симметрии с геометрической точки зрения и с точки зрения классической физики. С самого начала мы должны подчеркнуть, что нашей целью является не генерация массы, а генерация изменения кривизны, отвечающая за нарушение симметрии. Мы полагаем, что существуют классические источники гравитационных полей, которые также порождают электромагнитные поля, и ограничиваемся абелевым случаем, хотя имеется и прямое обобщение на неабелев случай.

Мы концентрируем свое внимание на анализе связи между нашим исследованием и работами, упомянутыми выше. Для этого мы проводим обзор результатов, полученных в предыдущих работах, таких как [12]. Мы показываем, что в каждой точке искривленного четырехмерного лоренцева пространства-времени, в котором присутствует электромагнитное поле, можно построить тетраду векторов так, что эти векторы ковариантно диагонализуют тензор энергии-импульса в каждой точке пространства-времени. Данные тетрады определяют две локальные ортогональные плоскости. Одна из них образована времениподобным и пространственноподобным векторами, вторая – двумя пространственноподобными векторами. Все векторы первой плоскости являются собственными для тензора энергии-импульса с одним и тем же собственным значением; векторы второй плоскости также являются собственными, а их собственные значения равны собственным значениям для векторов первой плоскости, взятым со знаком минус.

Новые тетрадные векторы строятся из двух элементов. Один из строительных блоков – это скелетон. Скелетоны получаются из экстремальных полей, которые рассчитываются с использованием локальных преобразований дуальности (поворотов) электромагнитных полей, например полей Эйнштейна–Максвелла. Экстремальные поля в абелевом случае являются локальными калибровочными инвариантами электромагнитных полей, следовательно, скелетоны калибровочно-инвариантны. Второй элемент конструкции тетрады – это калибровочный вектор. Такие векторы сами по себе являются калибровкой и содержат калибровочные поля. Затем мы можем заметить, что векторы тетрады локально зависят от калибровки.

Локальное калибровочное преобразование электромагнитных полей можно иначе рассматривать как другой выбор калибровочных векторов, поскольку эти векторы сами задают калибровку. Такой выбор можно делать, если векторы тетрады нетривиальны. Если, рассматривая различные варианты такого выбора, проанализировать, как меняются нормированные на единицу векторы тетрады при локальном калибровочном преобразовании, то мы увидим, что они остаются в изначальной локальной плоскости, не выходя из них. При этом в процессе преобразований метрический тензор остается инвариантным.

В работе [12] путем детального анализа каждого случая доказано, что локальные группы абелевых калибровочных преобразований электромагнитных полей изоморфны следующим локальным группам преобразований тетрады. На первой плоскости локальная группа преобразований электромагнитных полей изоморфна группе $SO(1,1)$ тетрадных бустов с двумя дополнительными дискретными преобразованиями. Одно из них представляет собой полное обращение, т. е. задается просто единичной матрицей размера 2×2 со знаком минус. Второе преобразование можно

назвать переключением, оно задается матрицей размера 2×2 , в которой на диагонали стоят нули, а вне диагонали – единицы. Это преобразование не является лоренцевым. Указанный набор преобразований тетрады составляет новую группу LB1, или группу Лоренца для первой плоскости.

На второй плоскости локальная группа калибровочных преобразований электромагнитных полей изоморфна группе $SO(2)$ пространственных поворотов тетрады (ее в нашем специальном случае мы будем называть LB2), или группу Лоренца для второй плоскости. В силу транзитивности группы LB1 и LB2 изоморфны. Это новый результат в теории групп. Опираясь на результаты нашей статьи [12], в работе [13] мы показали, что эта группа калибровочных преобразований локально изоморфна группе преобразований Лоренца для тетрады в обеих ортогональных плоскостях, т. е. изоморфна группе локальных преобразований Лоренца на каждой из плоскостей независимо. Напомним, что дискретное преобразование переключения на первой плоскости не является лоренцевым. Следовательно, симметрию, представленную локальными калибровочными преобразованиями, можно рассматривать как преобразования Лоренца единичных векторов тетрады внутри этих плоскостей. Именно в контексте результатов работы [12] сформулируем следующие утверждения.

Во-первых, масса должна быть связана с динамическим процессом нарушения симметрии или другим процессом типа механизма Хиггса [14], если встать на точку зрения традиционной модели, в которой отсутствуют гравитационные поля. Во-вторых, в настоящей работе мы формулируем заново само понятие нарушения симметрии в том контексте, когда симметрия понимается как сохранение свойств, возможное разрушение которых порождает массу (что приводит к результатам, полученным в рамках упомянутых выше подходов к традиционной модели).

В нашем геометрическом контексте, где локальные калибровочные преобразования интерпретируются как локальные преобразования Лоренца векторов тетрады, симметрии уже не рассматриваются как свойства сохранения. Они нарушаются в результате действия внешних геометрических факторов, это нарушение выражается в повороте локальной плоскости симметрии в процессе взаимодействия. Локальные взаимно ортогональные плоскости диагонализации тензора энергии-импульса возмущаются непрерывным образом в процессе возмущения полей внешним фактором. Они разрушаются таким образом, что в каждой точке возникают новые плоскости, и в результате в процессе эволюции появляются новые симметрии. Эти симметрии имеют аналогичную природу, но в новых локальных плоскостях. С этой новой точки зрения происходит не нарушение симметрии, а ее динамическая эволюция. В нашем контексте генерация массы происходит за счет изменения кривизны.

В разделе 2 мы вводим локальную симметрию в терминах преобразований Лоренца для тетрады на первой и второй плоскостях, рассматривая как пример геометрию Райсснера–Нордстрёма. В разделе 3 мы представляем аппарат теории возмущений первого порядка в геометродинамике и его связь с динамическим нарушением симметрии. Мы также формулируем новую теорему об эволюции симметрий. Во всей статье мы придерживаемся соглашений, принятых в работе [15]. В частности, используется сигнатура метрики $(-, +, +, +)$. Единственное отличие от обозначений работы [15] состоит в том, что мы вводим электромагнитный потенциал как A^α , где $f_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ есть электромагнитное поле, $f_{\mu\nu} = (G^{1/2}/c^2)F_{\mu\nu}$.

2. ПРИМЕР ГЕОМЕТРИИ РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА

Интервал для пространства Райсснера–Нордстрёма имеет вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1)$$

Мы введем в уравнения Эйнштейна–Максвелла сохраняющиеся токи и заряды. Также введем векторы, которые локально и ковариантно диагонализуют тензор энергии-импульса и порождают две ортогональные плоскости. Этот пример позволит нам определить общий вид возмущений, которые более подробно изучаются в разделе 3. Возмущения рассматриваются с точки зрения тетрадной геометрической интерпретации локального калибровочного преобразования.

Тетрады – это наиболее важный инструмент, поскольку локальные калибровочные симметрии ассоциированы со структурами, которые можно выразить в терминах этих новых векторов тетрады. Прежде всего опишем четыре вектора тетрады, введенной в статье [12]:

$$\begin{aligned} V_{(1)}^\alpha &= \xi^{\alpha\lambda} \xi_{\rho\lambda} X^\rho, & V_{(2)}^\alpha &= \sqrt{-\frac{Q}{2}} \xi^{\alpha\lambda} X_\lambda, \\ V_{(3)}^\alpha &= \sqrt{-\frac{Q}{2}} * \xi^{\alpha\lambda} Y_\lambda, & V_{(4)}^\alpha &= * \xi^{\alpha\lambda} * \xi_{\rho\lambda} Y^\rho. \end{aligned} \quad (2)$$

Вкратце напомним, что исходное выражение для электромагнитного тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu} = f_{\mu\lambda} f_\nu{}^\lambda + * f_{\mu\lambda} * f_\nu{}^\lambda$ задается через электромагнитный тензор $f_{\mu\nu}$ и его дуальный $* f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} f^{\sigma\tau}$. После локального преобразования дуальности

$$f_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} \cos \alpha + * \xi_{\mu\nu} \sin \alpha, \quad (3)$$

где α – скалярный фазовый параметр, зависящий от точки в пространстве (называемый в англоязычной литературе “complexion”), мы можем записать тензор энергии-импульса в терминах экстремального поля $\xi_{\mu\nu}$ и его дуального. Экстремальное поле можно выразить как

$$\xi_{\mu\nu} = e^{-* \alpha} f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \cos \alpha - * f_{\mu\nu} \sin \alpha. \quad (4)$$

Экстремальные поля являются электрическими полями и удовлетворяют уравнению

$$\xi_{\mu\nu} * \xi^{\mu\nu} = 0, \quad (5)$$

которое представляет собой условие, наложенное на поле (4). Отсюда возникает явное уравнение для фазового параметра: $\operatorname{tg}(2\alpha) = -f_{\mu\nu} * f^{\mu\nu} / f_{\lambda\rho} f^{\lambda\rho}$. Экстремальные поля, как и асимметричное поле в четырехмерном лоренцевом пространстве-времени, удовлетворяют тождеству

$$\xi_{\mu\alpha} \xi^{\nu\alpha} - * \xi_{\mu\alpha} * \xi^{\nu\alpha} = \frac{1}{2} \delta_\mu{}^\nu Q, \quad (6)$$

где $Q = \xi_{\mu\nu} \xi^{\mu\nu} = -\sqrt{T_{\mu\nu} T^{\mu\nu}}$ (см. уравнение (39) в [15]). Мы полагаем, что $Q \neq 0$, поскольку мы имеем дело с ненулевыми электромагнитными полями. Условие (5) можно переформулировать, используя общее тождество

$$A_{\mu\alpha} B^{\nu\alpha} - * B_{\mu\alpha} * A^{\nu\alpha} = \frac{1}{2} \delta_\mu{}^\nu A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}, \quad (7)$$

справедливое для любой пары антисимметричных тензоров в четырехмерном лоренцевом пространстве-времени. Если применить это соотношение к случаю $A_{\mu\alpha} = \xi_{\mu\alpha}$ и $B^{\nu\alpha} = *\xi^{\nu\alpha}$, получается эквивалентное условие

$$\xi_{\alpha\mu} *\xi^{\mu\nu} = 0, \quad (8)$$

которое совпадает с соотношением (64) из работы [15]. Очевидно, что тождество (6) есть частный случай равенства (7).

Вращательное преобразование дуальности, заданное равенством (3), позволяет выразить тензор энергии-импульса в терминах внешних полей:

$$T_{\mu\nu} = \xi_{\mu\lambda}\xi_{\nu}{}^{\lambda} + *\xi_{\mu\lambda} *\xi_{\nu}{}^{\lambda}. \quad (9)$$

На основании всех этих равенств нетрудно доказать, что векторы тетрады (2) являются ортогональными и диагонализуют локально и ковариантно тензор энергии-импульса (9). Заметим, что мы пока еще не определили векторы X^{μ} и Y^{μ} .

Введем некоторые обозначения. Векторы тетрады образованы двумя существенными составляющими. Например, в векторе $V_{(1)}^{\alpha}$ присутствуют две основные структуры: скелетон, которым в данном случае является $\xi^{\alpha\lambda}\xi_{\rho\lambda}$, и калибровочный вектор X^{ρ} . В случае $V_{(3)}^{\alpha}$ скелетон – это $*\xi^{\alpha\lambda}$, а калибровочным вектором является Y_{λ} . Как показано в работе [12], калибровочные векторы можно выбрать произвольно, но при условии, что для них векторы тетрады нетривиальны. Другими словами, тетрада (2) диагонализует тензор энергии-импульса при любых калибровочных векторах X^{μ} и Y^{μ} . Следовательно, мы можем по-разному выбирать X^{μ} и Y^{μ} .

В геометродинамике уравнения Максвелла

$$f^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad *f^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (10)$$

показывают, что существуют [16] потенциальные векторные поля A_{ν} и $*A_{\nu}$, для которых

$$f_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}, \quad *f_{\mu\nu} = *A_{\nu;\mu} - *A_{\mu;\nu}. \quad (11)$$

Здесь точка с запятой в нижнем индексе означает ковариантную производную с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$; звездочка в $*A_{\nu}$ есть часть обозначения, не следует путать ее с оператором Ходжа $*A_{\nu;\mu} = (*A_{\nu})_{;\mu}$.

Теперь определим нормированную тетраду, выбрав конкретные векторы $X^{\mu} = A^{\nu}$ и $Y^{\mu} = *A^{\mu}$:

$$\begin{aligned} U^{\alpha} &= \frac{\xi^{\alpha\lambda}\xi_{\rho\lambda}A^{\rho}}{\sqrt{-Q/2}\sqrt{A_{\mu}\xi^{\mu\sigma}\xi_{\nu\sigma}A^{\nu}}}, & V^{\alpha} &= \frac{\xi^{\alpha\lambda}A_{\lambda}}{\sqrt{A_{\mu}\xi^{\mu\sigma}\xi_{\nu\sigma}A^{\nu}}}, \\ Z^{\alpha} &= \frac{* \xi^{\alpha\lambda} * A_{\lambda}}{\sqrt{*A_{\mu}*\xi^{\mu\sigma}*\xi_{\nu\sigma}*A^{\nu}}}, & W^{\alpha} &= \frac{* \xi^{\alpha\lambda} *\xi_{\rho\lambda} * A^{\rho}}{\sqrt{-Q/2}\sqrt{*A_{\mu}*\xi^{\mu\sigma}*\xi_{\nu\sigma}*A^{\nu}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти векторы имеют следующие алгебраические свойства:

$$-U^{\alpha}U_{\alpha} = V^{\alpha}V_{\alpha} = Z^{\alpha}Z_{\alpha} = W^{\alpha}W_{\alpha} = 1. \quad (13)$$

Используя соотношения (6)–(8), нетрудно доказать, что векторы (12) ортонормированы. Преобразование

$$A_{\alpha} \rightarrow A_{\alpha} + \Lambda_{,\alpha} \quad (14)$$

оставляет $f_{\mu\nu}$ неизменным, а преобразование

$$*A_\alpha \rightarrow *A_\alpha + *\Lambda_{,\alpha} \quad (15)$$

оставляет неизменным $*f_{\mu\nu}$, если функции Λ и $*\Lambda$ скалярные.

Заметим, что локальное калибровочное преобразование “калибровочных векторов” $X^\alpha = A^\alpha$ и $Y^\alpha = *A^\alpha$ можно понимать просто как новый выбор калибровочных векторов $X_\alpha = A_\alpha + \Lambda_{,\alpha}$ и $Y_\alpha = *A_\alpha + *\Lambda_{,\alpha}$.

В книге [13] Схоутен определил то, что он назвал двухлопастной (two-bladed) структурой пространства-времени. Лопасты 1 и 2 представляют собой плоскости, образованные парами векторов (U^α, V^α) и (Z^α, W^α) соответственно. В работе [12] было доказано, что преобразование (14) приводит к “повороту” векторов U^α, V^α . В результате получаются “повернутые” векторы $\tilde{U}^\alpha, \tilde{V}^\alpha$, которые все так же лежат в плоскости, натянутой на векторы U^α, V^α . Аналогично, как также показано в [12], преобразование (15) “поворачивает” векторы Z^α, W^α , и в результате получаются векторы $\tilde{Z}^\alpha, \tilde{W}^\alpha$, лежащие в плоскости, образованной векторами Z^α, W^α . Например, поворот векторов U^α, V^α , заданных в (12), на “угол” ϕ можно записать как

$$U_{(\phi)}^\alpha = U^\alpha \operatorname{ch} \phi + V^\alpha \operatorname{sh} \phi, \quad V_{(\phi)}^\alpha = U^\alpha \operatorname{sh} \phi + V^\alpha \operatorname{ch} \phi. \quad (16)$$

Кроме того, мы имеем дискретные преобразования векторов U^α, V^α [12]. Поворот векторов Z^α, W^α тетрады (12) на “угол” φ можно записать как

$$Z_{(\varphi)}^\alpha = Z^\alpha \cos \varphi - W^\alpha \sin \varphi, \quad W_{(\varphi)}^\alpha = Z^\alpha \sin \varphi + W^\alpha \cos \varphi. \quad (17)$$

Простое алгебраическое упражнение показывает, что равенства $U_{(\phi)}^{[\alpha} V_{(\phi)}^{\beta]} = U^{[\alpha} V^{\beta]}$ и $Z_{(\varphi)}^{[\alpha} W_{(\varphi)}^{\beta]} = Z^{[\alpha} W^{\beta]}$ верны. Они говорят о том, что эти антисимметричные тетрадные объекты являются калибровочно-инвариантными. Напомним, в работе [12] было доказано, что группа локальных калибровочных преобразований электромагнитных полей изоморфна локальной группе LB1 преобразований поворота вместе с дополнительными дискретными преобразованиями лопасти 1 и, независимо, группе LB2 локальных пространственных поворотов лопасти 2. Формулы (16) определяют локальное калибровочное преобразование векторов U^α, V^α , а формулы (17) – локальное калибровочное преобразование векторов Z^α, W^α . В терминах этих векторов тетрады электромагнитное поле записывается как

$$f_{\alpha\beta} = -2\sqrt{-\frac{Q}{2}} \cos \alpha U_{[\alpha} V_{\beta]} + 2\sqrt{-\frac{Q}{2}} \sin \alpha Z_{[\alpha} W_{\beta]}. \quad (18)$$

Выражение (18) представляет собой максимальное упрощение формулы для электромагнитного поля. Истинными степенями свободы являются зависящие от точки пространства скаляры $\sqrt{-Q/2}$ и α . Локальная калибровочная инвариантность проявляется непосредственно через возможность “поворотов” (16) лопасти 1 на локальный угол ϕ , таких что $U_{[\alpha} V_{\beta]}$ остается инвариантным [12], и аналогично после дискретного преобразования на лопасти 1. Такой же анализ можно провести для преобразования (17) на лопасти 2 для векторов Z^α и W^α [12]. Этот формализм, очевидно, обеспечивает методику максимального упрощения выражения для напряженности электромагнитного поля.

Подведем итог нашего краткого обзора. Используя транзитивность, можно показать, что группа бустов с дополнительными дискретными преобразованиями первой плоскости изоморфна группе пространственных вращений второй плоскости. Мы применяем эти геометрические объекты к пространству Райсснера–Нордстрёма, выбирая $X^\rho = A^\rho$ и $Y^\rho = *A^\rho$ (здесь, напомним, звездочка является специальным обозначением, а не оператором Ходжа). В стандартных сферических координатах t, r, θ, ϕ ненулевыми являются только компоненты потенциалов $A_t = -q/r$ и $*A_\phi = -q \cos \theta$. При этом ненулевыми компонентами тензора электромагнитного поля $f_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ и его дуального по Ходжу $*f_{\mu\nu} = *A_{\nu;\mu} - *A_{\mu;\nu}$ являются $f_{tr} = -q/r^2$ и $*f_{\theta\phi} = q \sin \theta$. Точкой с запятой в индексе обозначена ковариантная производная с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, в нашем случае для геометрии Райсснера–Нордстрёма.

Нетрудно проверить, что единственные ненулевые компоненты эстремального поля и его дуального суть $\xi_{tr} = f_{tr}$ и $*\xi_{\theta\phi} = *f_{\theta\phi}$. Запишем в явном виде ненулевые компоненты векторов (12), что может оказаться полезным при определении геометрического положения всех сохраняющихся токов энергии-импульса:

$$\begin{aligned} U^t &= -\frac{\sqrt{q^2}/q}{\sqrt{1 - 2m/r + q^2/r^2}}, & V^r &= \sqrt{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}}, \\ Z^\theta &= -\frac{\sqrt{\cos^2 \theta}}{r \cos \theta}, & W^\phi &= -\frac{\sqrt{q^2} \sqrt{\cos^2 \theta}}{qr \sin \theta \cos \theta}. \end{aligned} \quad (19)$$

Работая в данной системе координат, следует быть внимательным, поскольку и вектор $V_{(3)}^\alpha$, и вектор $V_{(4)}^\alpha$ могут до нормировки оказаться нулевыми при $\theta = \pi/2$. Цель данного раздела состоит не в том, чтобы найти подходящие системы координат, а в том, чтобы показать, что сохраняющиеся токи суть векторы, лежащие в лопастях 1 или 2, поэтому мы берем эти токи и сохраняющиеся заряды, как в [17]. А именно, зададим токи энергии-импульса как $T_{\beta\xi_j}^\alpha$, $j = 1, \dots, 4$, где ξ_j^β – векторы Киллинга, $\xi_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, \sin \theta, \cos \phi \operatorname{ctg} \theta, 0)$, $\xi_3 = (0, \cos \phi, -\sin \phi \operatorname{ctg} \theta, 0)$, $\xi_4 = (0, 0, 0, 1)$. Соответствующие сохраняющиеся токи имеют вид

$$J(\xi_1) = -\frac{q^2}{r^4} \xi_1, \quad J(\xi_a) = \frac{q^2}{r^4} \xi_a, \quad a = 2, 3, 4. \quad (20)$$

Наша основная задача – показать, что сохраняющиеся токи принадлежат либо лопасти 1, либо лопасти 2. Можно проверить, сравнивая равенства (20) и (19), что сохраняющийся ток $J(\xi_1)$ лежит в плоскости (U^α, V^α) , а три других сохраняющихся тока $J(\xi_a)$, $a = 2, 3, 4$, лежат в ортогональной ей плоскости (Z^α, W^α) . Сохраняющиеся заряды были вычислены точно, как и в работе [17]. Только один из этих векторов ненулевой, он соответствует вектору тока, лежащему на лопасти 1, и при $m^2 > q^2$ и $r_+ = m + \sqrt{m^2 - q^2}$ задается как $Q_1 = 4\pi q^2/r_+$.

Итак, мы показали, что четыре сохраняющихся тока энергии-импульса принадлежат либо лопасти 1, либо лопасти 2. Используя результаты работы [17], можно без труда понять, что токи Бела [17]–[20] также принадлежат этим плоскостям. Этот факт не является столь уж удивительным (см. приложение А). Векторы первой плоскости инвариантны относительно локального калибровочного преобразования, заданного вектором $Y^\rho = *A^\rho$, а векторы второй плоскости инвариантны относительно локального калибровочного преобразования, заданного вектором $X^\rho = A^\rho$.

Это связано с тем, что локальные преобразования Лоренца на лопасти 1 не затрагивают лопасть 2, и наоборот.

Все геометрические построения этого раздела помогают понять идею следующего раздела, где мы изучаем динамику симметрий в рамках пертурбативной схемы.

3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ

Введем возмущение первого порядка с пертурбативным параметром ε :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \quad \tilde{\xi}_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} + \varepsilon \omega_{\mu\nu}. \quad (21)$$

Возмущения $h_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$ и те возмущения, которые мы определим далее для электромагнитного тензора, имеют физическую природу, связанную с физическим агентом, внешним по отношению к источнику ранее введенных полей. Необходимо подчеркнуть, что эти возмущения не являются результатом локального преобразования первого порядка для координат.

Мы поднимаем индексы с помощью возмущенной метрики $\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu}$. Запишем возмущенное электромагнитное поле через новое локальное преобразование дуальности:

$$\tilde{f}_{\mu\nu} = \tilde{\xi}_{\mu\nu} \cos \tilde{\alpha} + * \tilde{\xi}_{\mu\nu} \sin \tilde{\alpha}. \quad (22)$$

Возмущенный локальный фазовый параметр $\tilde{\alpha}$ не участвует в явном виде в нашем анализе. Аналогично работам [12], [15] мы налагаем новое условие

$$\tilde{\xi}_{\mu\nu} * \tilde{\xi}^{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

С учетом тождества (7), справедливого для любой пары антисимметричных тензоров в четырехмерном лоренцевом пространстве-времени [15], мы заключаем, что при $A_{\mu\alpha} = \tilde{\xi}_{\mu\alpha}$ и $B^{\nu\alpha} = * \tilde{\xi}^{\nu\alpha}$ оно приводит к эквивалентному условию

$$\tilde{\xi}_{\mu\rho} * \tilde{\xi}^{\mu\lambda} = 0. \quad (24)$$

Несмотря на то что мы работаем в рамках схемы возмущений первого порядка, мы избегаем писать в явном виде соответствующие пертурбативные выражения, особенно в этом разделе, чтобы у читателя возникла общая картина, которая позволит сделать наши идеи более прозрачными. Тем не менее мы можем привести в качестве примера явный вид возмущения первого порядка для уравнения (24):

$$\xi_{\mu\rho} * \xi^{\mu\lambda} + \varepsilon (\xi_{\mu\rho} * \omega^{\mu\lambda} + \omega_{\mu\rho} * \xi^{\mu\lambda} - \xi_{\mu\rho} * \xi_{\sigma\tau} h^{\mu\sigma} g^{\lambda\tau} - \xi_{\mu\rho} * \xi_{\sigma\tau} h^{\lambda\tau} g^{\mu\sigma}) = 0. \quad (25)$$

Фазовый параметр, являющийся локальным скаляром, с учетом условия (23) определяется уравнением

$$\operatorname{tg}(2\tilde{\alpha}) = - \frac{\tilde{f}_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu}}{* \tilde{f}_{\gamma\delta} \tilde{f}^{\gamma\delta}}. \quad (26)$$

Полезно записать тензор энергии-импульса для возмущенных полей (21):

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{\xi}_{\mu\lambda} \tilde{\xi}_{\nu}^{\lambda} + * \tilde{\xi}_{\mu\lambda} * \tilde{\xi}_{\nu}^{\lambda}. \quad (27)$$

Далее мы получаем четыре ортогональных вектора, и это является первым шагом на пути построения тетрады, которая диагонализует возмущение первого порядка тензора энергии-импульса (27). Эти векторы имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{(1)}^\alpha &= \tilde{\xi}^{\alpha\lambda} \tilde{\xi}_{\rho\lambda} X^\rho, & \tilde{V}_{(2)}^\alpha &= \sqrt{-\frac{\tilde{Q}}{2}} \tilde{\xi}^{\alpha\lambda} X_\lambda, \\ \tilde{V}_{(3)}^\alpha &= \sqrt{-\frac{\tilde{Q}}{2}} * \tilde{\xi}^{\alpha\lambda} Y_\lambda, & \tilde{V}_{(4)}^\alpha &= * \tilde{\xi}^{\alpha\lambda} * \tilde{\xi}_{\rho\lambda} Y^\rho.\end{aligned}\quad (28)$$

Чтобы доказать ортогональность тетрады (28), необходимо использовать тождество (7) при $A_{\mu\alpha} = \tilde{\xi}_{\mu\alpha}$ и $B^{\nu\alpha} = \tilde{\xi}^{\nu\alpha}$, имеем

$$\tilde{\xi}_{\mu\alpha} \tilde{\xi}^{\nu\alpha} - * \tilde{\xi}_{\mu\alpha} * \tilde{\xi}^{\nu\alpha} = \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu \tilde{Q}, \quad (29)$$

где мы полагаем, что $\tilde{Q} = \tilde{\xi}_{\mu\nu} \tilde{\xi}^{\mu\nu}$ отлично от нуля. Нам также потребуется условие (24). Можно выбрать произвольно векторные поля X^α и Y^α , наложив только условие, чтобы четыре векторных поля (28) были нетривиальными.

В этом разделе мы убедительно доказали, что для возмущенных полей можно построить вариант формализма, изложенного выше для невозмущенных полей. В частности, мы можем записать наши новые локальные тетрады, сохраняя те же экстремальные скелетонные структуры, что и в невозмущенном случае, и задать новые локальные плоскости симметрии, ассоциированные с возмущенным тензором энергии-импульса, которые наклонены относительно невозмущенных плоскостей.

4. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ

Используем результаты приложений Б и В. Запишем в первом порядке теории возмущений ковариантные производные локального контравариантного вектора тока:

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{J}^\lambda = \frac{\partial \tilde{J}^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \tilde{J}^\nu + \varepsilon \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda J^\nu, \quad (30)$$

Это выражение можно переписать как

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{J}^\lambda = \nabla_\mu J^\lambda + \varepsilon \frac{\partial J_{(1)}^\lambda}{\partial x^\mu} + \varepsilon \Gamma_{\mu\nu}^\lambda J_{(1)}^\nu + \varepsilon \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda J^\nu, \quad (31)$$

где локальный ток в первом порядке имеет вид $\tilde{J}^\lambda = J^\lambda + \varepsilon J_{(1)}^\lambda$.

Цель настоящего раздела – показать, что между начальной и промежуточной гиперповерхностями постоянного времени прямо с момента возникновения возмущения невозмущенные локальные токи можно считать сохраняющимися, $\nabla_\mu J^\mu = 0$. Это объясняется тем, что, например, невозмущенные токи энергии-импульса лежат в локальных лопастях 1 или 2, т. е. в локальных плоскостях калибровочной симметрии.

Между промежуточной и финальной гиперповерхностями постоянного времени исходный локальный ток J^μ уже не сохраняется. После того как произошло

возмущение, уравнение сохранения возмущенного локального тока принимает вид $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{J}^\mu = 0$, поскольку обе локальные плоскости симметрии поворачиваются под действием возмущения относительно начальных плоскостей и становятся новыми локальными плоскостями симметрии в каждой точке пространства-времени. Рассматривая возмущенные ненормированные векторы (28), которые диагонализуют тензор энергии-импульса (27), можно увидеть, что новые и старые плоскости не совпадают. По этой причине после возмущения в уравнение $\nabla_\mu J^\mu = 0$ следует внести поправку в соответствии с уравнением (31):

$$\nabla_\mu J^\lambda = -\varepsilon \frac{\partial J_{(1)}^\lambda}{\partial x^\mu} - \varepsilon \Gamma_{\mu\nu}^\lambda J_{(1)}^\nu - \varepsilon \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda J^\nu. \quad (32)$$

Именно это мы можем назвать динамическим нарушением симметрии. Теперь сохраняется новый ток $\tilde{J}^\lambda$, а не изначальный ток J^λ .

Используя все результаты развитого в настоящей статье аналитического метода, сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Локальные ортогональные плоскости симметрии, диагонализующие тензор энергии-импульса Эйнштейна–Максвелла, и связанные с ними локальные группы преобразований тетрады LB1 и LB2 эволюционируют при непрерывном возмущении внешним агентом. Симметрии в процессе эволюции локальных плотностей нарушаются непрерывным образом и преобразуются в новые симметрии.*

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы смогли развить идею динамического нарушения симметрии классических электромагнитных полей в искривленном четырехмерном лоренцевом пространстве-времени. Аналогичное понятие используется в квантовой теории поля для Стандартной модели и имеет целью генерацию массы посредством механизма динамического взаимодействия [1]–[11]. В нашей работе мы получаем динамическое нарушение симметрии как результат изменения кривизны пространства.

Если использовать изоморфизм, доказанный в работе [12], то симметрии в калибровочной теории электромагнитных полей понимаются как локальные преобразования Лоренца в первой или второй плоскости симметрии. Мы называем такие локальные группы как LB1 и LB2. Под действием этих групп преобразуются локальные векторы тетрады, лежащие в этих плоскостях. Тем самым нарушение симметрии эквивалентно изменению локальных плоскостей.

Когда некоторый внешний агент возмущает исходную геометрию, локальные плоскости симметрии наклоняются. В случае геометрии Райсснера–Нордстрёма мы явно показали, что сохраняющиеся токи энергии-импульса выражаются через векторы, лежащие в первой или второй локальных плоскостях. Тогда в общем случае (см. приложение Б) нарушение симметрии означает, что после возмущения эти токи лежат внутри новых (возмущенных) локальных плоскостей симметрии. Мы предположили, что уравнения сохранения токов энергии-импульса локально инвариантны под действием групп LB1 или LB2. Это очевидно в случае геометрии Райсснера–Нордстрёма и в более общих случаях из приложений А и Б. Симметрии отвечают новым локальным плотностям, поэтому новые токи также лежат в этих

плоскостях. Старые локальные законы сохранения больше не работают, и возникают новые, связанные с новыми плоскостями симметрии. Те векторы, с помощью которых мы локально диагонализировали старый тензор энергии-импульса, уже не могут диагонализировать возмущенный тензор энергии-импульса.

Мы задавали векторы тетрад с помощью двух объектов: один из них можно назвать скелетоном, а другой – калибровочным вектором. В качестве примера скелетона для вектора $V_{(1)}^\alpha$ можно взять $\xi^{\alpha\lambda}\xi_{\rho\lambda}$, а калибровочный вектор выбрать как X^ρ . Такая локальная тетрадная структура остается инвариантной относительно возмущений, и это является замечательным свойством данной тетрады. Данное свойство понятно из выражений (2) и (28). Несмотря на то что тетрада, диагонализующая исходный тензор энергии-импульса, не совпадает с аналогичной тетрадой для возмущенного тензора, векторы тетрад в обоих случаях являются локальными инвариантами структуры.

Наконец, мы смогли доказать, что изменение кривизны ассоциировано с динамическим локальным нарушением симметрии. Это можно понимать как эволюцию локальной симметрии. Мы рассчитали эту эволюцию через поворот локальных плоскостей симметрии, другими словами, через эволюцию локальных групп LB1 и LB2. Мы также рассчитали изменение токов энергии-импульса, сопровождающее эволюцию локальных плоскостей симметрии. К этому всегда применимы идеи из приложения Б об эволюции пространства-времени.

Очевидно, что в целом пертурбативную схему можно распространить на высшие порядки возмущений. Такая новая классическая модель может оказаться полезной для лучшего понимания аномалий квантовых теорий поля. Протицируем работу [21]: “*What is missing is a deep understanding of the conceptual framework from which the symmetries and properties of the theory emerge. There are many, many hints that the ultimate formulation of the theory will be extraordinarily rich and deep, but most likely it will look very different from our present, rather primitive, understanding*”¹⁾.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Покажем, что если локально сохраняющийся ток энергии-импульса $T^{\mu\nu}\xi_\nu$ является инвариантным относительно действия локальных групп LB1 или LB2, то вектор ξ^μ лежит соответственно в лопастях 2 или 1.

Тензор энергии-импульса записывается как [12]

$$T_{\mu\nu} = \frac{Q}{2}[-U_\mu U_\nu + V_\mu V_\nu - Z_\mu Z_\nu - W_\mu W_\nu]. \quad (33)$$

Введем векторное поле ξ_μ в общем виде, используя ортонормированную тетраду (12):

$$\xi_\mu = A[U_\mu \operatorname{ch} \phi + V_\mu \operatorname{sh} \phi] + B[Z_\mu \cos \varphi + W_\mu \sin \varphi], \quad (34)$$

где A и B , а также ϕ и φ суть скаляры, зависящие от точки пространства. Данное уравнение задает суперпозицию векторов общего вида на лопастях 1 и 2. Уравнение

¹⁾Чего не хватает, так это глубокого понимания концептуальной основы, на которой возникают симметрии и свойства теории. Имеется много, много намеков на то, что конечная формулировка теории будет чрезвычайно богатой и глубокой, но очень вероятно, что она будет сильно отличаться от нашего сегодняшнего, достаточно примитивного, понимания предмета.

сохранения тока энергии-импульса имеет вид

$$0 = (T^{\mu\nu} \xi_\nu)_{;\mu} = (T^{\mu\nu} (A[U_\nu \operatorname{ch} \phi + V_\nu \operatorname{sh} \phi] + B[Z_\nu \cos \varphi + W_\nu \sin \varphi]))_{;\mu}. \quad (35)$$

Используя ортонормированную тетраду (12) и выражение (33), мы можем переписать (35) как

$$0 = \left(\frac{Q}{2} (A[U^\mu \operatorname{ch} \phi + V^\mu \operatorname{sh} \phi] + B[-Z^\mu \cos \varphi - W^\mu \sin \varphi]) \right)_{;\mu}. \quad (36)$$

Известно [12], что можно произвести полное обращение $(U^\mu, V^\mu) \rightarrow (-U^\mu, -V^\mu)$ лопасти 1, и тогда для (36) получаем

$$0 = \left(\frac{Q}{2} (-A[U^\mu \operatorname{ch} \phi + V^\mu \operatorname{sh} \phi] + B[-Z^\mu \cos \varphi - W^\mu \sin \varphi]) \right)_{;\mu}. \quad (37)$$

Складывая равенства (36) и (37) и вычитая из равенства (36) равенство (37), имеем

$$0 = \left(\frac{Q}{2} (B[-Z^\mu \cos \varphi - W^\mu \sin \varphi]) \right)_{;\mu}, \quad (38)$$

$$0 = \left(\frac{Q}{2} (A[U^\mu \operatorname{ch} \phi + V^\mu \operatorname{sh} \phi]) \right)_{;\mu}. \quad (39)$$

Если теперь наложить условие сохранения тока под действием бустов в выражении (39), с необходимостью получаем, что $A = 0$. Следовательно, если потребовать для сохраняющихся токов локальную калибровочную инвариантность под действием группы LB1, то вектор ξ^μ обязан принадлежать лопасти 2 и равенство (38) выполнено.

Теперь произведем поворот $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ и $(\cos \phi, \sin \phi) \rightarrow (-\cos \phi, -\sin \phi)$ в лопасти 2 для выражения (36), получаем

$$0 = \left(\frac{Q}{2} (A[U^\mu \operatorname{ch} \phi + V^\mu \operatorname{sh} \phi] - B[-Z^\mu \cos \varphi - W^\mu \sin \varphi]) \right)_{;\mu}. \quad (40)$$

Складывая и вычитая равенства (36) и (40), имеем

$$0 = \left(\frac{Q}{2} (A[U^\mu \operatorname{ch} \phi + V^\mu \operatorname{sh} \phi]) \right)_{;\mu}. \quad (41)$$

$$0 = \left(\frac{Q}{2} (B[-Z^\mu \cos \varphi - W^\mu \sin \varphi]) \right)_{;\mu}. \quad (42)$$

Если теперь наложить условие сохранения тока под действием пространственных поворотов в выражении (42), с необходимостью получаем, что $B = 0$. Таким образом, если потребовать локальную калибровочную инвариантность относительно действия группы LB2, то вектор ξ^μ обязан принадлежать лопасти 1 и уравнение (41) выполнено.

В результате из соотношений (38) и (41) заключаем, что если мы потребуем локальную калибровочную инвариантность относительно действия групп LB1 или LB2 для уравнения (35) сохранения локального тока энергии-импульса, то векторы ξ^μ обязаны принадлежать лопастям 2 или 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Геометрия Райсснера–Нордстрёма является исключением в том смысле, что фазовый параметр локально удовлетворяет уравнению $\operatorname{tg}(2\alpha) = 0$. Векторы Киллинга лежат в лопастях 1 или 2. В других геометриях, вообще говоря, векторы Киллинга не должны лежать в одной из этих двух плоскостей. Тогда возникает вопрос, существуют ли лежащие в одной или другой плоскости сохраняющиеся векторы тока в случае более общей геометрии, например такой, где ненулевые электромагнитные поля в искривленном четырехмерном пространстве-времени присутствуют, но не обладают сферической симметрией.

Электромагнитные и гравитационные поля должны удовлетворять уравнениям Эйнштейна–Максвелла даже при наличии возмущающего взаимодействия. Суть в том, что, как мы предполагаем, возмущенные поля $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{\xi}_{\mu\nu}$ и $\tilde{\alpha}$ также удовлетворяют уравнениям Эйнштейна–Максвелла.

В данном приложении мы проводим анализ сохраняющихся токов для невозмущенного случая в произвольной геометрии. В возмущенной ситуации анализ проводится аналогично, с заменой полей в уравнениях Эйнштейна–Максвелла на возмущенные поля $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{\xi}_{\mu\nu}$ и $\tilde{\alpha}$. Простой способ увидеть, что всегда существуют локально сохраняющиеся токи, лежащие в каждой из двух плоскостей, состоит в следующем. Запишем электромагнитное поле в терминах фазового параметра и экстремального поля (см. формулу (3)) и подставим его в уравнения Максвелла. Используя уравнения (62) и (63) из работы [15], видим, что фазовый параметр и экстремальное поле должны удовлетворять в соответствии с уравнениями Максвелла уравнениям

$$\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu} = - * \xi^{\mu\nu} \alpha_\nu, \quad * \xi^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \xi^{\mu\nu} \alpha_\nu, \quad (43)$$

где α_ν обозначает частную производную $\partial\alpha/\partial x^\nu$. Следовательно, мы можем попробовать использовать векторы $\xi^{\mu\nu}\alpha_\nu$, $*\xi^{\mu\nu}\alpha_\nu$ и проверить, сохраняются ли они, с одной стороны, и принадлежат ли они первой и второй плоскостям, с другой.

Прежде всего заметим, что благодаря антисимметрии экстремального поля $\xi^{\mu\nu}$ и его дуального $*\xi^{\mu\nu}$, а также вследствие скалярной природы фазового параметра α имеют место следующие уравнения:

$$\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu} = -(*\xi^{\mu\nu}\alpha_\nu)_{;\mu} = 0, \quad *\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu\mu} = (\xi^{\mu\nu}\alpha_\nu)_{;\mu} = 0. \quad (44)$$

Многочисленное применение уравнений (43) приводит к уравнениям (44). Если геометрия такова, что градиент фазового параметра α_ν отличен от нуля, то мы имеем два сохраняющихся локальных векторных поля. Далее мы бы хотели понять, лежит ли, например, вектор $\xi^{\mu\nu}\alpha_\nu$ в первой плоскости. Используя свойство (8) и нормированную тетраду (12), легко заметить, что он лежит в лопасти 1, порожденной векторами U^μ , V^μ из (12). Аналогично, вектор $*\xi^{\mu\nu}\alpha_\nu$ принадлежит лопасти 2.

Подведем итог: мы имеем

$$\begin{aligned} U_\alpha \xi^{\alpha\beta} &= \sqrt{-\frac{Q}{2}} V^\beta, & V_\alpha \xi^{\alpha\beta} &= \sqrt{-\frac{Q}{2}} U^\beta, \\ Z_\alpha * \xi^{\alpha\beta} &= \sqrt{-\frac{Q}{2}} W^\beta, & W_\alpha * \xi^{\alpha\beta} &= -\sqrt{-\frac{Q}{2}} Z^\beta. \end{aligned} \quad (45)$$

В силу свойства (8) все остальные выражения равны нулю.

Также мы можем записать сохраняющиеся токи как $T^{\mu\nu}\xi_\nu$. Используя равенство $T_{\mu\nu}T^{\gamma\nu} = (Q/2)^2\delta_\mu^\gamma$, мы находим, что $\xi^\mu = \xi^{\mu\nu}\alpha_\nu/(Q/2)$ и $\xi^\mu = *\xi^{\mu\nu}\alpha_\nu/(Q/2)$ в первой и второй лопастях соответственно. Вектор ξ^μ не обязательно является вектором Киллинга, тем не менее ток энергии-импульса $T^{\mu\nu}\xi_\nu$ сохраняется. Тем самым мы доказали наше утверждение.

Поскольку градиент фазового параметра нетривиален, а также нетривиальны экстремальное поле и его дуальное, мы всегда имеем локальные сохраняющиеся токи на лопастях 1 и 2. Говоря “всегда”, мы имеем в виду “в процессе динамической эволюции”.

Вкратце напомним, что в рамках пертурбативного подхода вакуумные уравнения Эйнштейна–Максвелла записываются как

$$\widehat{E}(g_{\alpha\beta}) = \widehat{E}\left(g_{\alpha\beta}^{(0)} + \varepsilon g_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2}g_{\alpha\beta}^{(2)} + \dots, \right. \\ \left. \xi_{\alpha\beta}^{(0)} + \varepsilon \xi_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2}\xi_{\alpha\beta}^{(2)} + \dots, \alpha^{(0)} + \varepsilon \alpha^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2}\alpha^{(2)} + \dots\right) = 0, \quad (46)$$

где $\widehat{E}$ представляет набор нелинейных дифференциальных операторов, которые порождают уравнения Эйнштейна–Максвелла. Уравнения для слагаемых нулевого порядка по ε выполняются автоматически, поскольку фоновая метрика $g_{\alpha\beta}^{(0)}$, фоновое экстремальное поле $\xi_{\alpha\beta}^{(0)}$ и параметр $\alpha^{(0)}$ удовлетворяют вакуумным уравнениям Эйнштейна–Максвелла.

Чтобы найти уравнения, которым удовлетворяют возмущения первого порядка, разложим уравнение (46) по степеням ε и запишем уравнения первого порядка: $\widehat{O}(g_{\alpha\beta}^{(1)}, \xi_{\alpha\beta}^{(1)}, \alpha^{(1)}) = 0$. Так как возмущения $g_{\alpha\beta}^{(1)}$, $\xi_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $\alpha^{(1)}$ появляются только линейно, $\widehat{O}$ представляет собой набор линейных дифференциальных операторов. В уравнении (46) мы включили все уравнения Эйнштейна–Максвелла.

Ясно, что весь проделанный нами анализ уравнений (43) и (44) можно повторить для возмущенных полей $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{\xi}_{\mu\nu}$ и параметра $\tilde{\alpha}$. Возмущенные поля возникают в процессе динамического взаимодействия.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Чтобы сравнить законы сохранения локальных токов, нам потребуется ковариантная производная вектора в первом порядке теории возмущений. В данном приложении мы представляем основные шаги наших вычислений.

Начнем со стандартного выражения для ковариантной производной вектора:

$$V_{;\mu}^\lambda = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\nu, \quad (47)$$

где аффинная связность задается обычным образом,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right). \quad (48)$$

Следуя литературе по теории возмущений (см., например, труды [22]–[26] и ссылки в них), мы можем записать первый порядок возмущения аффинной связности как

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma;\nu} + h_{\nu\sigma;\mu} - h_{\mu\nu;\sigma}), \quad (49)$$

где ковариантные производные вычисляются с невозмущенной аффинной связностью (48). Затем запишем ковариантную производную контравариантного вектора в первом порядке теории возмущений:

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{V}^\lambda = \frac{\partial \tilde{V}^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \tilde{V}^\nu + \varepsilon \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda V^\nu, \quad (50)$$

где мы использовали оператор ∇ как обозначение ковариантной производной и поставили тильду над возмущенной производной. Возмущенный вектор записывается как $\tilde{V}^\lambda = V^\lambda + \varepsilon \psi^\lambda$, где ψ^λ – локальное векторное поле. Когда мы в настоящей статье рассматриваем конкретный пример V^λ , мы имеем в виду локальные токи J^λ .

Важно подчеркнуть, что мы изучаем настоящие физические возмущения гравитационных и электромагнитных полей, вызванные факторами, внешними по отношению к существующим источникам. Мы не вводим возмущение первого порядка для координат вида $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \varepsilon \zeta^\alpha$, где локальное векторное поле $\zeta^\alpha(x^\sigma)$ ассоциировано с инфинитезимальной локальной схемой первого порядка для преобразования координат [22].

Список литературы

- [1] Y. Nambu, G. Jonna-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I”, *Phys. Rev.*, **122**:1 (1961), 345–358.
- [2] J. Schwinger, “Gauge invariance and mass”, *Phys. Rev.*, **125**:1 (1962), 397–398; “Gauge invariance and mass. II”, **128**:5 (1962), 2425–2428.
- [3] R. Jackiw, K. Johnson, “Dynamical model of spontaneously broken gauge symmetries”, *Phys. Rev. D*, **8**:8 (1973), 2386–2397.
- [4] J. M. Cornwall, R. E. Norton, “Spontaneous symmetry breaking without scalar mesons”, *Phys. Rev. D*, **8**:10 (1973), 3338–3345.
- [5] D. J. Gross, A. Neveu, “Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories”, *Phys. Rev. D*, **10**:10 (1974), 3235–3253.
- [6] E. J. Eichten, F. L. Feinberg, “Dynamical symmetry breaking of non-Abelian gauge symmetries”, *Phys. Rev. D*, **10**:10 (1974), 3254–3279.
- [7] S. Coleman, R. Jackiw, H. D. Politzer, “Spontaneous symmetry breaking in the $O(N)$ model for large N ”, *Phys. Rev. D*, **10**:8 (1974), 2491–2499.
- [8] J. M. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis, “Effective action for composite operators”, *Phys. Rev. D*, **10**:8 (1975), 2428–2445.
- [9] S.-H. H. Tye, E. Tomboulis, E. C. Poggio, “Dynamical symmetry breaking in non-Abelian field theories”, *Phys. Rev. D*, **11**:10 (1975), 2839–2855.
- [10] K. Lane, “Comment on the analogy between chiral-symmetry breakdown and superconductivity”, *Phys. Rev. D*, **10**:4 (1974), 1353–1355.
- [11] S. Weinberg, “Implications of dynamical symmetry breaking”, *Phys. Rev. D*, **13**:4 (1976), 974–996.
- [12] A. Garat, “Tetrads in geometrodynamics”, *J. Math. Phys.*, **46**:10 (2005), 102502, 18 pp.; Erratum, **55**:1 (2014), 019902, 2 pp.
- [13] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus. An Introduction to Tensor Analysis and Its Geometrical Applications*, Springer, Berlin, 1954.
- [14] P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons”, *Phys. Lett.*, **13**:16 (1964), 508–509; “Broken symmetries, massless particles and gauge fields”, **12**:2 (1965), 132–133; “Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons”, *Phys. Rev.*, **145**:4 (1966), 1156–1163; F. Englert, R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector

- mesons", *Phys. Rev. Lett.*, **13**:9 (1964), 321–323; G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble, "Global conservation laws and massless particles", *Phys. Rev. Lett.*, **13**:20 (1964), 585–587; T. W. Kibble, "Symmetry breaking in non-Abelian gauge theories", *Phys. Rev.*, **155**:5 (1967), 1554–1561.
- [15] C. Misner, J. A. Wheeler, "Classical physics as geometry", *Ann. Phys.*, **2**:6 (1957), 525–603.
 - [16] N. Cabibbo, E. Ferrari, "Quantum electrodynamics with Dirac monopoles", *Nuovo Cimento*, **23**:6 (1962), 1147–1154.
 - [17] R. Lazkoz, J. M. M. Senovilla, R. Vera, "Conserved superenergy currents", *Class. Quantum Grav.*, **20**:19 (2003), 4135–4152.
 - [18] G. Bergqvist, I. Eriksson, J. M. M. Senovilla, "New electromagnetic conservation laws", *Class. Quantum Grav.*, **20**:13 (2003), 2663–2668.
 - [19] J. M. M. Senovilla, "General electric-magnetic decomposition of fields, positivity and Rainich-like conditions", *Reference Frames and Gravitomagnetism*, Proceedings of the 23rd Spanish Relativity Meeting (EREs2000) (Valladolid, September 6–9, 2000), eds. J. F. Pascual-Sánchez, L. Floría, A. San Miguel, F. Vicente, World Sci., Singapore, 2001, 145–164, arXiv:gr-qc/0010095.
 - [20] J. M. M. Senovilla, "Super-energy tensors", *Class. Quantum Grav.*, **17**:14 (2000), 2799–2841.
 - [21] D. J. Gross, "Gauge theory – past, present, and future", *Chinese J. Phys.*, **30**:7 (1992), 955–972.
 - [22] С. Вейнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М., 1975.
 - [23] L. Papantonopoulos (ed.), *Physics of Black Holes. A Guided Tour*, Lecture Notes in Physics, **769**, Springer, Berlin, 2009.
 - [24] T. Regge, J. A. Wheeler, "Stability of a Schwarzschild singularity", *Phys. Rev.*, **108**:4 (1957), 1063–1069.
 - [25] V. Moncrief, "Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. I. The exterior problem", *Ann. Phys.*, **88**:2 (1974), 323–342.
 - [26] A. Garat, R. Price, "Gauge invariant formalism for second order perturbations of Schwarzschild spacetimes", *Phys. Rev. D*, **61**:4 (2000), 044006, 15 pp.

Поступила в редакцию 22.05.2017