Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Унанян, Щель в спектре гамильтониана антиферромагнитной модели Липкина–Мешкова–Глика, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 2, 256–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:27:14

© 2018 г.

Р. Г. Унанян*

ЩЕЛЬ В СПЕКТРЕ ГАМИЛЬТониАНА АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ЛИПКИНА–МЕШКОВА–ГЛИКА

Изучаются спектральные свойства суперсимметричной антиферромагнитной модели Липкина–Мешкова–Глика с четным числом спинов. В явном виде построены суперзаряды для данной модели. С использованием явного вида суперсимметричного основного состояния введены простые пробные вариационные приближения первых возбужденных состояний. Численно показано, что при всех значениях параметров модели эти приближения дают достаточно точную верхнюю границу величины спектральной щели (разности энергий основного и первого возбужденного состояний). Однако верхняя граница не позволяет дать точный ответ на вопрос, присутствует ли щель в спектре модели. Для ответа на этот вопрос получена нетривиальная нижняя граница величины спектральной щели. Тем самым показано, что в спектре гамильтониана суперсимметричной антиферромагнитной модели Липкина–Мешкова–Глика при любых четных значениях числа спинов имеется щель.

Ключевые слова: интегрируемые модели, модель Липкина–Мешкова–Глика, системы многих тел, спектральная щель.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9416>

1. ВВЕДЕНИЕ

Около пятидесяти лет назад Липкиным, Мешковым и Гликом (ЛМГ) [1] была представлена точно решаемая ядерно-физическая модель взаимодействующих фермионов. Впоследствии область применения этой модели расширилась, и сейчас она охватывает не только ядерную физику, но и другие разнообразные разделы физики, такие как конденсация Бозе–Эйнштейна [2], ионные ловушки [3] и полости [4]. Гамильтониан ЛМГ имеет вид

$$H = \xi(\chi_1^2 J_x^2 + \chi_2^2 J_y^2 + \lambda \chi_1 \chi_2 J_z), \quad J_i = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_i^{(n)}, \quad i = x, y, z, \quad (1)$$

где J_i – известные операторы углового момента, $\sigma_i^{(n)}$ – матрицы Паули, N – полное число спинов. В настоящей статье мы концентрируем свое внимание на многообразии с максимальным угловым моментом $J = N/2$, где N – четное целое число. Тогда

*Department of Physics, Kaiserslautern University of Technology, Kaiserslautern, Germany.
E-mail: unanyan@physik.uni-kl.de

соответствующее гильбертово пространство имеет размерность $2J+1$. Параметры χ_1 , χ_2 и λ считаются положительными постоянными. Если $\chi_2 = 0$, то основное состояние гамильтониана (1) является либо ферромагнитным, либо антиферромагнитным в зависимости от знака параметра ξ . Мы рассматриваем антиферромагнитный случай ($\xi > 0$) и без потери общности можем считать, что $\xi = 1$. Заметим, что вращение $\exp(i\pi J_x/2)$ приводит гамильтониан (1) к виду $\chi_1^2 J_y^2 + \chi_2^2 J_x^2 + \lambda \chi_1 \chi_2 J_z$, поэтому мы можем положить $\chi_1 \geq \chi_2$.

Как было отмечено в работах [3], спектр модели (1) при $\lambda = 1$ состоит из двукратно вырожденных возбужденных состояний и невырожденного основного состояния с нулевой энергией. Это наблюдение говорит о наличии в системе суперсимметрии. Насколько нам известно, до сих пор нет математического доказательства того, что гамильтониан (1) является суперсимметричным, и что при $\lambda = 1$ существует ненулевая спектральная щель (разность энергий основного и первого возбужденного состояний). Цель настоящей статьи – дать детальное доказательство этих фактов. За хорошим введением в суперсимметричную теорию мы отсылаем читателя, например, к статьям [5].

Прежде всего мы показываем, что модель ЛМГ при $\lambda = 1$ действительно является суперсимметричной, для чего строим суперзаряды Q_1 , Q_2 ,

$$H = Q_1^2 = Q_2^2, \quad (2)$$

и показываем, что они антикоммутируют,

$$\{Q_1, Q_2\} = 0. \quad (3)$$

Одним из следствий данного результата является то, что он автоматически приводит к двукратному вырождению возбужденных состояний [5]. Аналогичные результаты получены с помощью приближенных вычислений в рамках метода ВКБ [6].

Во-вторых, мы получаем нижнюю и верхнюю границу величины ΔE спектральной щели гамильтониана (1), т.е. энергию первого возбужденного состояния (поскольку энергия основного состояния равна нулю). Мы показываем, что если известно основное состояние, то можно получить разумную оценку сверху для величины спектральной щели, используя относительно простые вариационные состояния. Эта оценка растет с ростом размера системы. Как правило, оценки, полученные методом вариации состояний, находятся в хорошем согласии с точными собственными значениями гамильтониана. Следовательно, естественно ожидать, что истинная величина спектральной щели антиферромагнитной суперсимметричной модели ЛМГ также возрастает с ростом J . Мы подтверждаем это с помощью численного анализа и, кроме того, находим нетривиальную нижнюю границу энергии первого возбужденного состояния. Таким образом, мы строго показываем, что система (1) в суперсимметричном случае действительно имеет спектральную щель при любом целом J .

2. СУПЕРСИММЕТРИЯ В МОДЕЛИ ЛМГ

Можно существенно упростить анализ спектра гамильтониана (1), введя новые переменные Ω_0 и γ с помощью формул

$$\chi_1 = \Omega_0 \operatorname{ch} \gamma, \quad \chi_2 = \Omega_0 \operatorname{sh} \gamma, \quad \Omega_0^2 = \chi_1^2 - \chi_2^2, \quad \operatorname{th} \gamma = \frac{\chi_2}{\chi_1}. \quad (4)$$

Если применить тождество для гиперболического вращения вокруг оси z с параметром γ

$$\exp(-\gamma J_z) J_x \exp(\gamma J_z) = J_x \operatorname{ch} \gamma - i J_y \operatorname{sh} \gamma, \quad (5)$$

то можно факторизовать гамильтониан (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} H &= \Omega_0^2 (J_x \operatorname{ch} \gamma + i J_y \operatorname{sh} \gamma) (J_x \operatorname{ch} \gamma - i J_y \operatorname{sh} \gamma) = \\ &= \Omega_0^2 \exp(-\gamma J_z) J_x \exp(2\gamma J_z) J_x \exp(-\gamma J_z). \end{aligned} \quad (6)$$

Из этого выражения легко видеть, что при произвольном γ все собственные значения гамильтониана (6) неотрицательны, $E \geq 0$. Заметим, что унитарное преобразование $\exp(i\pi J_x)$ приводит к замене $J_z \rightarrow -J_z$, следовательно, спектр гамильтониана симметричен относительно преобразования $\gamma \rightarrow -\gamma$. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением положительных γ . Одна из целей настоящей статьи – показать, что модель (1) при $\lambda = 1$ является суперсимметричной. Вместо того чтобы задавать Q_1, Q_2 в терминах фермионных операторов, мы представляем их в виде блочных матриц, блоки которых отвечают двум инвариантным подпространствам, индексированным значением “фермионного” оператора числа частиц $F = (\mathbb{1} + \exp(i\pi(J_z + J)))/2$. Этот оператор имеет два разделенных собственных значения 0 и 1 с кратностями $J + 1$ и J соответственно.

Нетрудно заметить, что матрицы

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \underbrace{0}_{(J+1) \times (J+1)} & \underbrace{B}_{(J+1) \times (J)} \\ \underbrace{B^\dagger}_{(J) \times (J+1)} & \underbrace{0}_{J \times J} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \underbrace{0}_{(J+1) \times (J+1)} & \underbrace{-iB}_{(J+1) \times (J)} \\ \underbrace{iB^\dagger}_{(J) \times (J+1)} & \underbrace{0}_{J \times J} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где элементы матрицы B имеют вид

$$\begin{aligned} B_{m_1, m_2} &= \Omega_0 \langle m_1 | J_x \operatorname{ch} \gamma + i J_y \operatorname{sh} \gamma | m_2 \rangle, \\ m_1 &= J, J-2, \dots, -J, \quad m_2 = J-1, J-3, \dots, -J+1, \end{aligned} \quad (8)$$

удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (3). Здесь значком $\underbrace{(M) \times (N)}$ помечен размер матрицы $M \times N$. Покажем, что для матриц (7) также выполнены соотношения (2). В самом деле

$$Q_1^2 = Q_1^2 = \begin{pmatrix} \underbrace{BB^\dagger}_{(J+1) \times (J+1)} & \underbrace{0}_{(J+1) \times (J)} \\ \underbrace{0}_{(J) \times (J+1)} & \underbrace{B^\dagger B}_{J \times J} \end{pmatrix},$$

и в соответствии с (8) для $m_1, n_1 = J, J-2, \dots, -J$ мы имеем

$$(BB^\dagger)_{m_1, n_1} = \Omega_0^2 \sum_{m_2=J-1, J-3, \dots, -J+1} \langle m_1 | J_x \operatorname{ch} \gamma + i J_y \operatorname{sh} \gamma | m_2 \rangle \langle m_2 | J_x \operatorname{ch} \gamma - i J_y \operatorname{sh} \gamma | n_1 \rangle.$$

Подставив в сумму тождество

$$\sum_{m=J-1, J-3, \dots, -J+1} |m\rangle \langle m| = \mathbb{1} - \sum_{m=J, J-2, \dots, -J} |m\rangle \langle m|, \quad (9)$$

мы можем записать формулу

$$\begin{aligned} (BB^\dagger)_{m_1, n_1} &= \Omega_0^2 \langle m_1 | J_x^2 \operatorname{ch}^2 \gamma + J_y^2 \operatorname{sh}^2 \gamma + J_z \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma | n_1 \rangle - \\ &\quad - \Omega_0^2 \sum_{m=J, J-2, \dots, -J} \langle m_1 | J_x \operatorname{ch} \gamma + i J_y \operatorname{sh} \gamma | m \rangle \langle m | J_x \operatorname{ch} \gamma - i J_y \operatorname{sh} \gamma | n_1 \rangle = \\ &= \Omega_0^2 \langle m_1 | J_x^2 \operatorname{ch}^2 \gamma + J_y^2 \operatorname{sh}^2 \gamma + J_z \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma | n_1 \rangle. \end{aligned}$$

В последней строчке мы использовали тот факт, что $\langle m_1 | J_x \operatorname{ch} \gamma + i J_y \operatorname{sh} \gamma | m \rangle = 0$ для любых m_1, m из множества $\{J, J-2, \dots, -J\}$. Аналогично для всех индексов m_2, n_2 из множества $\{J-1, J-3, \dots, -J+1\}$ мы имеем

$$(B^\dagger B)_{m_2, n_2} = \Omega_0^2 \langle m_2 | J_x^2 \operatorname{ch}^2 \gamma + J_y^2 \operatorname{sh}^2 \gamma + J_z \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma | n_2 \rangle.$$

Комбинируя эти два выражения, приводим гамильтониан (1) к блочно-диагональному виду в собственном базисе оператора F :

$$H = \Omega_0^2 \begin{pmatrix} \underbrace{J_x^2 \operatorname{ch}^2 \gamma + J_y^2 \operatorname{sh}^2 \gamma + J_z \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma}_{(J+1) \times (J+1)} & \underbrace{0}_{(J+1) \times (J)} \\ \underbrace{0}_{(J) \times (J+1)} & \underbrace{J_x^2 \operatorname{ch}^2 \gamma + J_y^2 \operatorname{sh}^2 \gamma + J_z \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma}_{J \times J} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы показали, что гамильтониан (1) суперсимметричен при $\lambda = 1$.

Факторизованная форма (6) гамильтониана позволяет записать нормированное основное состояние в следующем явном виде:

$$|\Psi_g\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_J(\operatorname{ch} 2\gamma)}} \exp(\gamma J_z) |m_x\rangle \quad \text{при} \quad m_x = 0, \quad (10)$$

где $P_J(x)$ – полином Лежандра, а $|m_i\rangle = |m\rangle$, $i = x, y, z$, обозначает собственный вектор оператора J_i , связанный с квантовым числом m . Однако из суперсимметричной алгебры (2), (3) для возбужденных состояний нельзя получить никакую дополнительную информацию, кроме их двукратного вырождения. Тем не менее, как показано ниже, можно использовать явную форму основного состояния для нахождения точной верхней границы величины спектральной щели.

3. ОЦЕНКИ СВЕРХУ ДЛЯ ВЕЛИЧИНЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЩЕЛИ

Если известно основное состояние, то верхнюю границу величины ΔE спектральной щели можно найти из следующего неравенства [7]:

$$\Delta E \leq \frac{\langle \Phi | H | \Phi \rangle}{1 - |\langle \Phi | \Phi_g \rangle|^2}, \quad (11)$$

где $|\Phi_g\rangle$ и $|\Phi\rangle$ – нормированная волновая функция основного состояния и нормированная пробная волновая функция.

Для наших вычислений удобно преобразовать гамильтониан (6) к унитарно эквивалентному:

$$\begin{aligned} H &= \Omega_0^2 (J_z^2 \operatorname{ch}^2 \gamma + J_y^2 \operatorname{sh}^2 \gamma - J_x \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma) = \\ &= \Omega_0^2 \exp(-\gamma J_x) J_z \exp(2\gamma J_x) J_z \exp(-\gamma J_x). \end{aligned} \quad (12)$$

Опираясь на интуитивные физические представления, выберем пробный собственный вектор как

$$|\Phi_0\rangle = \frac{\exp(-\gamma J_x)}{\sqrt{\langle + | \exp(-2\gamma J_x) | + \rangle}} |+\rangle, \quad (13)$$

где

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|m_z = 1\rangle + |m_z = -1\rangle). \quad (14)$$

Такой выбор обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, при малых и больших γ данный собственный вектор совпадает с первым возбужденным состоянием гамильтониана (12). В самом деле, можно показать непосредственно, что в этих предельных случаях гамильтониан приобретает следующий простой вид:

$$H \approx \begin{cases} \Omega_0^2 J_z^2, & \text{если } \gamma \rightarrow 0, \\ \Omega_0^2 \frac{e^{2\gamma}}{4} (J(J+1) - J_x(J_x+1)), & \text{если } \gamma \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (15)$$

Из выражения (13) ясно, что при больших $\delta = \gamma J \gg 1$ состояние $|\Phi_0\rangle$ совпадает с первым возбужденным состоянием $|m_x\rangle = |-J\rangle$ гамильтониана (15), поскольку оператор $\exp(-\gamma J_x)$ при больших δ проецирует всякое состояние на $|-J\rangle$. При этом для малых δ состояние $|\Phi_0\rangle$ совпадает с состоянием $|+\rangle$, которое, очевидно, является первым возбужденным состоянием гамильтониана (15). Во-вторых, вектор (13) ортогонален вектору основного состояния

$$|\Phi_g\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_J(\text{ch } 2\gamma)}} \exp(\gamma J_x) |m_z\rangle \quad \text{при } m_z = 0, \quad (16)$$

хотя это свойство пробных состояний не является существенным при оценке величины спектральной щели с помощью неравенства (11). Ортогональность состояний (13) и (16) позволяет упростить вычисление ΔE .

Следует заметить, что состояние

$$|\Phi_v(\eta)\rangle \sim (\exp(-\gamma J_x) + \eta) |+\rangle \quad (17)$$

при любых η также подходит на роль пробного вектора. Как мы покажем ниже путем сравнения с результатами численного анализа, при надлежащем выборе параметра η состояния (17) и (13) дают практически одну и ту же верхнюю границу величины ΔE .

3.1. Фиделити. Для количественной оценки точности пробного вектора (13) вычислим величину фиделити $\mathcal{F}$ в зависимости от параметра $\delta = \gamma J$ при разных J . Фиделити – это модуль степени совпадения состояния (13) и точного (найденного численно) возбужденного состояния гамильтониана (12):

$$\mathcal{F} = |\langle \Phi_{\text{exact}} | \Phi_0 \rangle|. \quad (18)$$

Как мы видели, первые возбужденные состояния являются вырожденными вследствие суперсимметрии гамильтониана. Максимизируем фиделити по всем возможным суперпозициям состояний с той же энергией. График зависимости величины $\mathcal{F}$

Рис. 1. Фиделити как функция параметра $\delta = \gamma J$ при различных значениях $J = 10, \dots, 100$ (сверху вниз по мере увеличения J). При больших J кривые визуально неразличимы.

от $\delta = \gamma J$ при изменении J от 10 до 100 приведен на рис. 1. Он показывает, что величина фиделити в целом достаточно велика ($\mathcal{F} \gtrsim 0.89$), но в окрестности $\delta = \gamma J \sim 1$ она мала. Тот факт, что состояние (13) является точным при больших и малых δ , неудивителен, поскольку именно этой цели мы добивались, выбирая состояние (13). Однако, к нашему удивлению, пробное состояние описывает точное возбужденное состояние с высокой фиделити также при промежуточных значениях δ , когда теория возмущений неприменима.

Теперь вернемся к обсуждению величины щели в спектре нашей системы.

3.2. Верхняя граница величины щели. После обсуждения точности пробного вектора (13) сравним среднее значение энергии $\Delta E_0 = \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle$ состояния (13) с точной энергией возбужденного состояния, вычислив отношение $\Delta E / \Delta E_0$. Чтобы выразить $\langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle$ в удобном виде, применим тождество

$$[\exp(-\gamma J_y)]_{m,m'} = d_{m',m}^J(i\gamma), \quad (19)$$

где $d_{m',m}^J(x)$ – элемент матрицы вращения Вигнера, известной из квантовой механики [8]. После громоздких, но непосредственных вычислений мы в итоге получаем следующее выражение:

$$\Delta E_0 = \Omega_0^2 \left(\text{ch } 2\gamma + (J+2) \frac{P_{J-2}^{1,3}(\text{ch } 2\gamma) \text{sh } \gamma \text{ch}^3 \gamma + P_{J+2}^{-3,-1}(\text{ch } 2\gamma) \text{sh}^{-3} \gamma \text{ch}^{-1} \gamma}{P_{J-1}^{0,2}(\text{ch } 2\gamma) \text{ch}^2 \gamma + P_{J-1}^{2,0}(\text{ch } 2\gamma) \text{sh}^2 \gamma} \text{sh } 2\gamma \right), \quad (20)$$

где $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ – полиномы Якоби [9].

Покажем, что верхнюю границу ΔE_0 можно рассматривать в качестве точной оценки величины щели, для чего численно рассчитаем энергию ΔE первого возбужденного состояния гамильтониана. На рис. 2 изображены графики отношения $\Delta E / \Delta E_0$ как функции от δ при различных J .

Рис. 2. Отношение энергии первого возбужденного состояния как функция от $\delta = \gamma J$ к величине (20) для различных $J = 1, \dots, 100$.

Из рис. 2 видно, что поведение $\Delta E/\Delta E_0$ и фиделити $\mathcal{F}$ очень похожи друг на друга. При достаточно больших J и $\gamma \neq 0$ нетрудно получить простое выражение для ΔE_0 , используя асимптотику полиномов Якоби [9]:

$$P_J^{\alpha, \beta}(x) \approx \frac{(x^2 - 1)^{-1/4}}{\sqrt{2\pi J}} [x + (x^2 - 1)^{1/2}]^{J+1/2} (x - 1)^{-\alpha/2} (x + 1)^{-\beta/2} [(x + 1)^{1/2} + (x - 1)^{1/2}]^{\alpha + \beta},$$

где $x > 1$. В результате получаем

$$\Delta E_0 \approx \Omega_0^2 (\text{ch } 2\gamma + J \text{ sh } 2\gamma). \quad (21)$$

Таким образом, как мы видим, величина ΔE_0 растет линейно при $J \gg 1$ для всех $\gamma > 0$. При промежуточных значениях δ можно получить более качественный результат для ΔE с помощью состояния $|+\rangle$. Подставив вектор $|+\rangle$ в формулу (11), получим

$$\Delta E_+ = \frac{\langle + | H | + \rangle}{1 - |\langle + | \Phi_g \rangle|^2} = \Omega_0^2 \frac{\text{ch}^2 \gamma + \frac{(J+2)(J-1)}{4} \text{sh}^2 \gamma}{1 - \frac{2J}{J+1} \frac{P_J^{1,-1}(\text{ch } \gamma)}{P_J(\text{ch } 2\gamma)}}. \quad (22)$$

Комбинируя полученное выражение с (20), мы выводим следующую оценку сверху:

$$\Delta E \leq \Omega_0^2 \min[\Delta E_0, \Delta E_+]. \quad (23)$$

Для композиции состояний $|\Phi_0\rangle$ и $|+\rangle$, т. е. для состояния (17), минимальное по η значение энергии

$$\Delta E_v(\eta) = \frac{\langle \Phi_v(\eta) | H | \Phi_v(\eta) \rangle}{\langle \Phi_v(\eta) | \Phi_v(\eta) \rangle - |\langle \Phi_v(\eta) | \Phi_g \rangle|^2} \quad (24)$$

может оказаться лучше, чем оценка (23). Мы не выписываем громоздкое явное выражение для этой оптимальной границы, но вместо этого приводим рис. 3, где

Рис. 3. Отношение энергии первого возбужденного состояния как функция от $\delta = \gamma J$ к граничной энергии, полученной как решение вариационной задачи на минимум $\Delta E_v(\eta)$ (а) и как $\min(\Delta E_0, \Delta E_+)$ (б), для различных $J = 1, \dots, 100$.

изображены $\min_{\eta} \Delta E_v(\eta)/\Delta E$ (см. рис. 3а) и $\Delta E/\min[\Delta E_0, \Delta E_+]$ (см. рис. 3б) как функции от δ .

Как видно из рис. 3а, состояние (17), полученное вариацией одного параметра η , дает истинную энергию возбужденного состояния с точностью 0.8%. Точность относительно простой верхней границы (23) (см. рис. 3б) на несколько процентов меньше, чем для оптимальной границы (24), заданной состоянием (17). Это замечательный результат, если учесть простоту пробной функции. Таким образом, мы видим, что количественная оценка сверху для величины щели, полученная как решение вариационной задачи на минимум, хорошо согласуется с точными результатами численных расчетов (для значений J вплоть до 100). Но эти наблюдения не дают строгого доказательства самого наличия спектральной щели. Возникает задача получения нижней границы величины ΔE . Далее мы обратим свое внимание на эту проблему.

4. НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ВЕЛИЧИНЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЩЕЛИ

Чтобы найти нетривиальную оценку снизу для величины щели, выберем удобный вид гамильтониана. Для этого нам потребуются некоторые факты из теории матриц. С целью упрощения обозначений всюду в этом разделе мы обозначаем через $\lambda_n(X)$ ($n = 1, 2, \dots, M$) собственные значения эрмитовой $(M \times M)$ -матрицы X , упорядоченные в порядке убывания, т.е. $\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \dots \geq \lambda_M(X)$.

Нижнюю границу величины спектральной щели можно получить из теоремы Вейля [10], которая утверждает следующее. Пусть X , Y и $Z = X + Y$ суть эрмитовы $(M \times M)$ -матрицы, тогда

$$\lambda_{i+j-1}(Z) \leq \lambda_i(X) + \lambda_j(Y) \quad \text{при} \quad i + j - 1 \leq M \quad (25)$$

или, эквивалентно,

$$\lambda_k(Z) \geq \lambda_i(X) + \lambda_j(Y) \quad \text{при} \quad i + j = M + k. \quad (26)$$

Чтобы применить теорему Вейля, разобьем гамильтониан (12) на два слагаемых,

$$H = H_X + \Omega_0^2 J_z^2, \quad (27)$$

где

$$H_X = \Omega_0^2 ((J_z^2 + J_y^2) \operatorname{sh}^2 \gamma - J_x \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma) = \Omega_0^2 ((J(J+1) - J_x^2) \operatorname{sh}^2 \gamma - J_x \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma);$$

в правой части этого равенства мы использовали тождество $J_z^2 + J_y^2 + J_x^2 = J(J+1)$. Применяя неравенство (26) и вспоминая о суперсимметричности нашего гамильтониана, для величины спектральной щели $\Delta E = \lambda_{2J}(H) = \lambda_{2J-1}(H)$ мы получаем

$$\frac{\Delta E}{\Omega_0^2} \geq \lambda_i [(J(J+1) - J_x^2) \operatorname{sh}^2 \gamma - J_x \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma] + \lambda_j (J_z^2), \quad i+j = 4J. \quad (28)$$

Нетрудно проверить напрямую, что возможные пары (i, j) таковы: $(2J+1, 2J-1)$, $(2J-1, 2J+1)$ и $(2J, 2J)$. Соответствующие энергии определяются выражениями

$$(2J+1, 2J-1) : \quad \frac{E_{ge}}{\Omega_0^2} = 1 - J e^\gamma \operatorname{sh} \gamma, \quad (29)$$

$$(2J-1, 2J+1) : \quad \frac{E_{eg}}{\Omega_0^2} = \min \left[J e^\gamma \operatorname{sh} \gamma, (5J-4) \operatorname{sh}^2 \gamma - \frac{J-2}{2} \operatorname{sh} 2\gamma \right], \quad (30)$$

$$(2J, 2J) : \quad \frac{E_{ee}}{\Omega_0^2} = 1 + (3J-1) \operatorname{sh}^2 \gamma - \frac{J-1}{2} \operatorname{sh} 2\gamma. \quad (31)$$

Оценка (29) тривиальна, она становится отрицательной при $\gamma > \ln(1+2/J) \approx 2/J$. Для $\gamma \ll 1/J$ оценка (31) лучше, чем (30), она становится отрицательной при значениях $1/J \lesssim \gamma \lesssim 0.3$. При этом в случае относительно больших $\gamma \gtrsim 0.2$ оценка (30) существенно лучше, чем (31), хотя она отрицательна при $\gamma \lesssim 0.2$.

На основании этого анализа мы приходим к неравенству

$$\Delta E \geq \Omega_0^2 \min \left[J e^\gamma \operatorname{sh} \gamma, (5J-4) \operatorname{sh}^2 \gamma - \frac{1}{2} (J-2) \operatorname{sh} 2\gamma \right], \quad (32)$$

которое дает тривиальную оценку при $\gamma \lesssim 0.2$, но позволяет найти нетривиальную границу для больших γ . Сравнивая оценки (21) и (32) при больших γ , заключаем, что верхняя и нижняя граница величины ΔE сходятся друг к другу. Следовательно, нам осталось найти нетривиальную оценку снизу при промежуточных значениях γ .

Далее мы покажем, что прямыми вычислениями можно получить вырожденность состояний и нетривиальную нижнюю границу (при произвольном γ и целом J), используя представление (6). Нетрудно заметить, что гамильтониан (6) похож на неэрмитов гамильтониан

$$\begin{aligned} H_n &= \exp(-\gamma J_x) H \exp(\gamma J_x) = \Omega_0^2 \exp(-2\gamma J_x) J_z \exp(2\gamma J_x) J_z = \\ &= \Omega_0^2 (J_z^2 \operatorname{ch} 2\gamma + i J_y J_z \operatorname{sh} 2\gamma). \end{aligned} \quad (33)$$

Мы покажем, что, несмотря на неэрмитовость, спектральные свойства гамильтониана (33) совершенно очевидны. В самом деле, во-первых, ясно, что он обладает нулевым собственным состоянием $|m_z\rangle = |0\rangle$ (поскольку $J_z|0\rangle = 0$). Во-вторых,

все возбужденные состояния двукратно вырождены. Чтобы это понять, заметим, что H_n в собственном базисе оператора J_z может быть представлен как блочная матрица:

$$H_n = \begin{pmatrix} \underbrace{H_-}_{J \times J} & \underbrace{0}_{1 \times J} & \underbrace{0}_{J \times J} \\ \langle a| & 0 & \langle b| \\ \underbrace{0}_{J \times J} & \underbrace{0}_{1 \times J} & \underbrace{H_+}_{J \times J} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Матрицы H_+ и H_- действительны и эквивалентны с точностью до перестановки, т. е. они имеют один и тот же спектр. Транспонированные векторы $\langle a|$ и $\langle b|$ связывают состояние $|m_z\rangle = |0\rangle$ с положительными и отрицательными квантовыми числами m_z .

Для примера рассмотрим случай $J = 2$, тогда гамильтониан H_n имеет вид

$$H_n = \Omega_0^2 \begin{pmatrix} 4 \operatorname{ch} 2\gamma & \operatorname{sh} 2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ -2 \operatorname{sh} 2\gamma & \operatorname{ch} 2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{sh} 2\gamma & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{sh} 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{ch} 2\gamma & -2 \operatorname{sh} 2\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sh} 2\gamma & 4 \operatorname{ch} 2\gamma \end{pmatrix},$$

где

$$H_- = \Omega_0^2 \begin{pmatrix} 4 \operatorname{ch} 2\gamma & \operatorname{sh} 2\gamma \\ -2 \operatorname{sh} 2\gamma & \operatorname{ch} 2\gamma \end{pmatrix}, \quad H_+ = \Omega_0^2 \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2\gamma & -2 \operatorname{sh} 2\gamma \\ \operatorname{sh} 2\gamma & 4 \operatorname{ch} 2\gamma \end{pmatrix}$$

и

$$\langle a| = \Omega_0^2 \left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{sh} 2\gamma \right), \quad \langle b| = \Omega_0^2 \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{sh} 2\gamma, 0 \right).$$

Матрицы H_+ и H_- эквивалентны с точностью до перестановки, т. е.

$$H_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H_+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы оператора H_+ таковы:

$$(H_+)_{m,m'} = \Omega_0^2 \left(m^2 \delta_{mm'} \operatorname{ch} 2\gamma + \frac{m'}{2} \operatorname{sh} 2\gamma [\delta_{m,m'+1} \sqrt{(J-m')(J+m'+1)} - \right. \\ \left. - \delta_{m,m'-1} \sqrt{(J+m')(J-m'+1)}] \right), \quad (35)$$

где $m, m' = J, J-1, \dots, 1$. Спектр матрицы H_n можно получить из следующего алгебраического уравнения:

$$\lambda \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_{J \times J} - H_+) \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_{J \times J} - H_-) = 0. \quad (36)$$

Поскольку матрицы H_+ и H_- имеют одинаковые спектры, спектр матрицы H_n двукратно вырожден, за исключением состояния $|m_z\rangle = |0\rangle$. Следовательно, мы можем ограничиться изучением спектральных свойств матрицы H_+ .

Таким образом, мы подтвердили непосредственно, что для целого J при произвольном значении γ спектр изначального гамильтониана (6) суперсимметричен и, в дополнение, спектр возбужденных состояний гамильтониана (6) совпадает со спектром матрицы H_+ , т. е. величина щели в спектре нашей модели совпадает с энергией основного состояния оператора H_+ .

Из выражения (35) видно, что матрица H_+ может быть записана в следующем компактном виде:

$$H_+ = \Omega_0^2(j_z^2 \operatorname{ch} 2\gamma + i \cdot j_y j_z \operatorname{sh} 2\gamma), \quad (37)$$

где усеченные эрмитовы операторы углового момента j_z , j_y и j_x удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[j_z, j_x] = ij_y, \quad [j_y, j_z] = ij_x, \quad (38)$$

но, в отличие от стандартного оператора углового момента, $[j_x, j_y] \neq ij_z$.

Далее мы покажем, что гамильтониан H_+ можно привести к более красивому виду. Для этого напомним, что j_z – положительно определенная матрица с собственными значениями $1, 2, \dots, J$. Поэтому корректно определена матрица $j_z^{1/2}$. Используя этот факт, запишем H_+ как $H_+ = j_z^{-1/2} h j_z^{1/2}$, где

$$h = \Omega_0^2(j_z^2 \operatorname{ch} 2\gamma + i \cdot j_z^{1/2} j_y j_z^{1/2} \operatorname{sh} 2\gamma); \quad (39)$$

при этом h имеет тот же спектр, что и H_+ . Мы утверждаем, что $\Delta E \geq \Omega_0^2 \operatorname{ch} 2\gamma$ при всех γ и J . В самом деле, для любого собственного значения $E(h) > 0$ оператора h и соответствующего нормированного собственного вектора $|\varphi\rangle$ мы имеем

$$\begin{aligned} E(h) &= \langle \varphi | h | \varphi \rangle = \Omega_0^2 (\langle \varphi | j_z^2 | \varphi \rangle \operatorname{ch} 2\gamma + i \langle \varphi | j_z^{1/2} j_y j_z^{1/2} | \varphi \rangle \operatorname{sh} 2\gamma) = \\ &= \Omega_0^2 \langle \varphi | j_z^2 | \varphi \rangle \operatorname{ch} 2\gamma \geq \Omega_0^2 \operatorname{ch} 2\gamma, \end{aligned}$$

где мы использовали тот факт, что $j_z^{1/2} j_y j_z^{1/2}$ – эрмитова матрица. В правой части последнего неравенства мы учли, что минимальное собственное значение матрицы j_z равно 1. Следовательно, все собственные значения матрицы h лежат на конечном расстоянии от нуля, большем чем $\Omega_0^2 \operatorname{ch} 2\gamma$, т. е. величина щели в спектре гамильтониана (6) антиферромагнитной суперсимметричной модели ЛМГ ограничена снизу величиной $\Omega_0^2 \operatorname{ch} 2\gamma$. В отличие от неравенства (32), эта величина не содержит J .

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной статье мы исследовали спектр антиферромагнитной модели ЛМГ в суперсимметричном случае. С помощью явной конструкции суперзарядов мы доказали, что гамильтониан (1) является суперсимметричным при $\lambda = 1$. Используя явный вид основного состояния гамильтониана, мы ввели вариационные возбужденные состояния, которые имеют высокую степень совпадения (фиделити) с точным возбужденным состоянием. Простой вид этих введенных состояний позволил найти замкнутые выражения для верхних границ величины спектральной щели. Мы численно показали, что эти верхние границы хорошо согласуются с точными значениями величины щели. Также мы нашли простые ненулевые нижние границы.

Таким образом, мы показали, что в спектре антиферромагнитной суперсимметричной модели ЛМГ щель присутствует при любых значениях γ . Хотя для промежуточных значений γ полученная оценка снизу

$$\Delta E \geq \Omega_0^2 \max \left\{ \operatorname{ch} 2\gamma, \min \left[J e^\gamma \operatorname{sh} \gamma, (5J - 4) \operatorname{sh}^2 \gamma - \frac{J - 2}{2} \operatorname{sh} 2\gamma \right] \right\}$$

не более точна, чем оценка, полученная при решении вариационной задачи, ее можно использовать при изучении физики модели ЛМГ при низких энергиях, например при оценке длительности адиабатических квантовых процессов в ионных ловушках [11]. Несомненно, можно улучшить эту оценку, и мы надеемся вернуться к этой задаче в будущей публикации.

Благодарности. Я благодарен М. Флейшгауэру за многочисленные плодотворные и стимулирующие обсуждения.

Список литературы

- [1] H. J. Lipkin, N. Meshkov, A. J. Glick, “Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (I). Exact solutions and perturbation theory”, *Nucl. Phys.*, **62**:2 (1965), 188–198; N. Meshkov, A. J. Glick, H. J. Lipkin, “Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (II). Linearization procedures”, *Nucl. Phys.*, **62**:2 (1965), 199–210; A. J. Glick, H. J. Lipkin, N. Meshkov, “Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (III). Diagram summations”, *Nucl. Phys.*, **62**:2 (1965), 211–224.
- [2] J. I. Cirac, M. Lewenstein, K. Mølmer, P. Zoller, “Quantum superposition states of Bose–Einstein condensates”, *Phys. Rev. A*, **57**:2 (1998), 1208–1218.
- [3] R. G. Unanyan, M. Fleischhauer, “Decoherence-free generation of many-particle entanglement by adiabatic ground-state transitions”, *Phys. Rev. Lett.*, **90**:13 (2003), 133601, 4 pp.; R. G. Unanyan, C. Ionescu, M. Fleischhauer, “Many-particle entanglement in the gaped antiferromagnetic Lipkin model”, *Phys. Rev. A*, **72**:2 (2005), 022326, 7 pp.
- [4] J. Larson, “Circuit QED scheme for the realization of the Lipkin–Meshkov–Glick model”, *Europhys. Lett.*, **90**:5 (2010), 54001, 6 pp., arXiv:1004.5041; Y.-C. Zhang, X.-F. Zhou, X. Zhou, G.-C. Guo, Z.-W. Zhou, “Cavity-assisted single-mode and two-mode spin-squeezed states via phase-locked atom–photon coupling”, *Phys. Rev. Lett.*, **118**:8 (2017), 083604, 6 pp.
- [5] E. Witten, “Dynamical breaking of supersymmetry”, *Nucl. Phys. B*, **188**:3 (1981), 513–554; Л. Э. Генденштейн, И. В. Криве, “Суперсимметрия в квантовой механике”, *УФН*, **146**:4 (1985), 553–590; F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, “Supersymmetry and quantum mechanics”, *Phys. Rep.*, **267**:5–6 (1995), 267–385.
- [6] A. Garg, “Quenched spin tunneling and diabolical points in magnetic molecules. I. Symmetric configurations”, *Phys. Rev. B*, **64**:9 (2001), 094413, 15 pp.; E. Keçecioglu, A. Garg, “SU(2) instantons with boundary jumps and spin tunneling in magnetic molecules”, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:23 (2002), 237205, 4 pp.
- [7] C. Eckart, “The theory and calculation of screening constants”, *Phys. Rev.*, **36**:5 (1930), 878–892.
- [8] L. Biedenharn, J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Application*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **8**, Addison–Wesley, Reading, MA, 1981; Д. А. Варшолович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Л., 1975.
- [9] Г. Серё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.

- [10] H. Weyl, “Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)”, *Math. Ann.*, **71**:4 (1912), 441–479; W. Fulton, “Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **37**:3 (2000), 209–249.
- [11] R. Blatt, C. F. Roos, “Quantum simulations with trapped ions”, *Nature Phys.*, **8**:4 (2012), 277–284.

Поступила в редакцию 2.06.2017,
после доработки 26.07.2017