Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Аллахвердян, Д. Б. Саакян, Каналы множественным доступом в квантовой теории информации, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 3, 411–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf942>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:45:41

© 1998 г.

А. Э. Аллахвердян*, Д. Б. Саакян*

КАНАЛЫ С МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Рассматривается многотерминальный квантовый канал, в котором осуществляется передача квантовых сообщений от двух независимых источников к единому адресату. После постановки задачи и доказательства ряда общих соотношений о пропускной способности системы исследуются физически важные случаи передачи когерентных и сжатых состояний. Обсуждаются также некоторые вопросы однотерминальной связи при наличии внешнего шума.

1. ВВЕДЕНИЕ

Физические идеи сыграли большую роль в создании теории информации [1–3]. Однако затем в основном развивались математические аспекты этой дисциплины, а также ее конкретные приложения в технике. Лишь спустя почти 15 лет после создания основ теории информации появились первые работы, учитывающие физическую природу носителей информации и необходимость учета термодинамических и квантовомеханических закономерностей. Тенденция обратного влияния теории информации на физику сложилась даже раньше. Так, решения ряда важных проблем существенно используют теоретико-информационные представления. К их числу относятся проблемы демона Максвелла, описания иерархических систем, оценки квантовых корреляций [1–3].

Квантовая теория информации изучает проблемы, связанные с передачей сообщений, представленных как некоторые состояния квантовой системы, через зашумленные каналы [1, 2]. В отличие от соответствующей классической теории здесь имеются два существенно различных случая постановки задачи. В первом случае последовательность битов, подлежащая передаче, заменяется (кодируется) квантовыми состояниями, которые посылаются через зашумленный квантовый канал, при этом передаются только известные квантовые состояния или их тензорные произведения [2]. Во втором случае по зашумленному каналу передаются произвольные суперпозиции исходного ансамбля квантовых состояний [4]. В этой работе мы будем рассматривать проблемы, относящиеся к первому случаю.

Как выглядит постановка задачи, если имеются один адресат и один источник информации [1, 2, 5]? В теории информации принято, что сообщения источника представляют

Ереванский физический институт, Ереван, Армения

собой некоторый набор “букв” с соответствующими вероятностями. Каждой букве α в результате процедуры квантования сопоставляется состояние квантовой системы с матрицей плотности ρ_α . Таким образом, исходный ансамбль квантовых сообщений описывается матрицей плотности

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho_{\alpha}, \quad (1)$$

где p_{α} – вероятность появления сообщения α . Далее, матрица плотности (1) может подвергаться воздействию внешнего окружения. В общем случае возникающие в этой связи преобразования ρ принято описывать наиболее общими динамическими преобразованиями, допустимыми квантовой механикой. Это линейные операторы, сохраняющие следы обладающие свойством полной положительности, т.е. переводящие матрицу плотности в матрицу плотности [4, 6],

$$\rho \mapsto \rho' = \hat{S}\rho, \quad (2)$$

$$\hat{S}\rho = \sum_{\mu} A_{\mu} \rho A_{\mu}^{\dagger}, \quad \sum_{\mu} A_{\mu}^{\dagger} A_{\mu} = \hat{1}. \quad (3)$$

Представление (3) было обосновано Краусом [6]. Оно эквивалентно так называемому унитарному представлению, где преобразование ρ рассматривается как часть унитарной эволюции некоторой расширенной системы.

После воздействия канала состояние системы должно определиться с помощью некоторого измерения. В качестве такового мы будем рассматривать обобщенные измерения [2, 7, 8], задаваемые некоторым неортогональным разложением единицы

$$\sum_{\gamma} E_{\gamma} = 1, \quad E_{\gamma}^{\dagger} = E_{\gamma}, \quad E_{\gamma} \geq 0. \quad (4)$$

Если измерение проводится над системой ρ_{α} , то результат γ получается с вероятностью $p(\gamma/\alpha) = \text{tr}(E_{\gamma} \rho_{\alpha})$. Введение именно обобщенных измерений является действительно необходимым. Известно, что измерения на различимость неортогональных состояний более информативны, чем обычные, задаваемые ортогональными разложениями единицы [7]. Пусть после воздействия канала исходная матрица плотности ρ представляется в виде

$$\rho' = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \hat{S} \rho_{\alpha} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho'_{\alpha}. \quad (5)$$

В соответствии с общими принципами теории информации можно поставить вопрос о количестве информации, которое может быть получено из измерения [2, 5, 7],

$$I(a : \gamma) = \sum_{\alpha, \gamma} p(\alpha) p(\gamma/\alpha) \ln \frac{p(\gamma/\alpha)}{\sum_{\alpha} p(\alpha) p(\gamma/\alpha)}. \quad (6)$$

Эта величина (взаимная информация [9, 10]), являющаяся функцией входного и выходного ансамблей, определяет в теории информации максимальную скорость, с какой информация может передаваться по зашумленному каналу. Точнее говоря, для передачи

информации по зашумленному каналу на каждые n битов надо вводить $m - n$ дополнительных битов. Для достаточно простых каналов максимум отношения n/m определяется величиной (6). Именно для этих каналов величина (6) называется пропускной способностью канала связи.

Несмотря на формальную аналогию с классическим случаем постановка задачи о квантовом канале обладает рядом особенностей. Пусть внешний шум отсутствует. Это не означает отсутствия шума вообще, т.к. в общем случае состояния ρ_α неортогональны, а значит, различимы только с ограниченной точностью. Использование неортогональных состояний может быть связано с конкретным устройством источника (генерирующего, к примеру, когерентные состояния). Более того, если известно, что имеется внешний шум, то использование неортогональных состояний может оказаться выгодным. Так, когерентные состояния наиболее устойчивы по отношению к воздействию внешнего линейного шума [11]. Наконец, неортогональные состояния могут оказаться важными при использовании квантовых криптограмм [12]. Здесь неортогональность обеспечивает недоступность передаваемой информации для возможных подслушиваний.

Вторая существенная особенность квантового канала связи обусловлена тем, что, оптимизируя передачу информации, мы должны вычислить величину

$$C = \max_{\{p_\alpha\}} \max_{\{E_\gamma\}} I(\alpha : \gamma), \quad (7)$$

т.е. мы должны максимизировать как по вероятностям исходного ансамбля, так и по всевозможным измерениям типа (4). В классической теории приходится выполнять только первую максимизацию [9, 10].

Первые работы по пропускным способностям квантовых каналов связи появились в 60-х годах и касались в основном каналов без внешнего шума, когда преобразование $\hat{S}$ унитарно¹⁾ [2]. Затем в работе [7] была доказана важная теорема, ограничивающая сверху пропускную способность квантового канала без шума:

$$C \leq S(\rho) - \sum_{\alpha} p_{\alpha} S(\rho_{\alpha}), \quad (8)$$

здесь

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho)$$

— энтропия фон Неймана.

В работе [13] это неравенство было обобщено на случай непрерывного алфавита. А в недавних работах [14, 15] доказана достижимость этих границ для определенных типов квантовых каналов. Нужно подчеркнуть, что все эти исследования относятся к случаю каналов без внешнего шума.

¹⁾ Следует заметить, что это определение канала без шума отличается от принятого в [7, 15], где под отсутствием внешнего шума понимают исходный ансамбль, состоящий из чистых состояний. Мы благодарны рецензенту за указание необходимости различать эти понятия.

В каналах с множественным доступом несколько независимых источников посылают свои сообщения через один и тот же канал одному адресату [9, 16]. Таким образом, сообщения могут перепутываться друг с другом, а также взаимодействовать с внешним окружением. Задача декодера состоит в том, чтобы посредством одного обобщенного измерения по возможности точно восстановить сообщения от каждого источника информации. Таким образом, налагаются ограничения как на общую скорость передачи информации, так и на скорости каждого источника по отдельности [9, 16]. В классической теории эта задача решена в общем случае.

Целями данной работы являются:

- 1) постановка задачи о квантовом канале с множественным доступом (раздел 2);
- 2) вывод соотношений, ограничивающих область пропускной способности сверху (раздел 2);
- 3) исследование физически важных случаев, когда информация передается с помощью когерентных и сжатых состояний электромагнитного поля (раздел 3).

Заключение и обсуждение будут представлены в разделе 4.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Прежде чем приступить к общей постановке задачи, мы остановимся на некоторых вопросах квантовой статистической физики. Математический аппарат, который мы здесь опишем [17, 18], является основой при доказательстве энтропийных оценок типа (8), а кроме того, находит применение в некоторых общих вопросах квантовой теории информации и статистической физики [13]. Как было изложено во введении, одной из основных проблем в квантовой теории информации является проблема различимости неортогональных состояний. В 1963 г. Умегаки [19] ввел в качестве меры различимости так называемую относительную квантовую энтропию между двумя матрицами плотности ρ, σ :

$$S(\rho\|\sigma) = \text{tr}(\rho \ln \rho - \rho \ln \sigma), \quad (9)$$

исходя из аналогий с классической энтропией Кульбака [9], в которую выражение (9) переходит при коммутирующих матрицах плотности. В дальнейшем было выяснено, что (9) играет важную роль в квантовой статистике и теории информации. В работе [17] была доказана следующая важная теорема:

$$S(\rho\|\sigma) \geq S(\hat{S}\rho\|\hat{S}\sigma), \quad (10)$$

где $\hat{S}$ – преобразование вида (3). Уравнение (10) имеет ясный термодинамический смысл. Рассмотрим некоторую неравновесную квантовую систему, описываемую матрицей плотности $\rho(t)$ в момент времени t . Эволюция во времени этой системы в марковском стационарном режиме задается некоторым общим квантовым преобразованием

$$\rho(t') = \hat{S}(t' - t)\rho(t). \quad (11)$$

В общем случае для описания реальных статистических систем марковское свойство является приближением, выполнимость которого связана с определенными условиями [20]. Если стационарное распределение ρ_{st} преобразования (11) кратно единице (микрораноническое распределение равновесной статистической физики), то для любых t

$$\hat{S}(t)1 = 1. \quad (12)$$

Тогда из неравенства (10) для энтропии фон Неймана имеем

$$S(\hat{S}\rho) \geq S(\rho). \quad (13)$$

Это аналог известной H -теоремы Больцмана. Здесь ее выполнение связывается с существованием стационарного распределения, кратного единице. Аналогичным образом, если стационарное состояние является распределением Гиббса, то мы получаем закон убывания свободной энергии.

Перейдем теперь к точной формулировке проблемы квантового канала с множественным доступом. Мы будем рассматривать случай двух независимых источников. Этот случай достаточно прост и одновременно содержит в себе все принципиальные моменты общего случая с n независимыми источниками.

Имеются два независимых источника с ансамблями квантовых сообщений:

$$\rho^{(1)} = \sum_{\alpha} p_{\alpha}^{(1)} \rho_{\alpha}^{(1)}, \quad (14)$$

$$\rho^{(2)} = \sum_{\beta} p_{\beta}^{(2)} \rho_{\beta}^{(2)}. \quad (15)$$

Пары сообщений $\rho_{\alpha}^{(1)} \otimes \rho_{\beta}^{(2)}$ от двух источников поступают в общий канал передачи информации, где могут взаимодействовать друг с другом и с внешним окружением. Все это мы опишем преобразованием типа (3):

$$\hat{S}(\rho_{\alpha}^{(1)} \otimes \rho_{\beta}^{(2)}) = \sigma_{\alpha\beta}^{(12)}. \quad (16)$$

На выходе канала производится некоторое обобщенное измерение, с помощью которого вычисляются переходные вероятности

$$p(\gamma/\alpha\beta) = \text{tr}(E_{\gamma} \sigma_{\alpha\beta}^{(12)}). \quad (17)$$

Такая процедура называется декодированием. Вместе с исходными распределениями

$$p(\alpha), \quad p(\beta) \quad (18)$$

соотношение (17) определяет задаваемые величины канала. Пусть источник 1 (2) может передать максимальное количество сообщений R_1 (R_2). Таким образом, ставится основной вопрос при каких скоростях передачи сообщений R_1, R_2 возможна такая процедура декодирования, чтобы вероятность ошибочного декодирования была бы малой.

Подобные пары R_1, R_2 называются допустимыми. Очевидно, что между R_1 и R_2 имеется взаимное влияние. Как показано в [9, 16], множество допустимых пар удовлетворяет следующим условиям:

$$R_1 < I(\alpha : \gamma/\beta), \quad R_2 < I(\beta : \gamma/\alpha), \quad (19)$$

$$R_1 + R_2 < I(\alpha \otimes \beta : \gamma). \quad (20)$$

В (19), (20) фигурирует так называемая условно-взаимная информация

$$I(\alpha : \gamma/\beta) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} p(\alpha, \beta, \gamma) \ln \frac{p(\gamma/\alpha\beta)}{p(\gamma/\beta)}. \quad (21)$$

Если взаимная информация между случайными величинами α и γ — это уменьшение энтропии одной величины в результате наблюдения за другой, то условно-взаимная информация имеет тот же смысл, только при условии реализации β . В нашем случае $p(\alpha, \beta, \gamma) = p(\gamma/\alpha\beta)p(\alpha)p(\beta)$, и тогда мы имеем

$$I(\alpha : \gamma/\beta) = H(\alpha) + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} p(\alpha, \beta, \gamma) \ln \frac{p(\alpha, \beta, \gamma)}{p(\beta, \gamma)}. \quad (22)$$

Применяя ко второму слагаемому операцию взятия частичного по β следа, имеем в силу (10), что

$$I(\alpha : \gamma/\beta) \geq H(\alpha) + \sum_{\alpha, \gamma} p(\alpha, \gamma) \ln \frac{p(\alpha, \gamma)}{p(\gamma)} = I(\alpha : \gamma), \quad (23)$$

т.е. введение условной вероятности по ансамблю β увеличивает взаимную информацию между ансамблями γ и α . Это и ожидалось из интуитивных соображений, т.к. величины α и β некоррелированы. Отсюда сразу же получаем, что

$$I(\alpha : \gamma/\beta) + I(\beta : \gamma/\alpha) \geq I(\alpha \otimes \beta : \gamma). \quad (24)$$

Таким образом, условие (20) действительно необходимо. В частности, это означает, что если $R_1 = I(\alpha : \gamma/\beta)$, то в лучшем случае может быть $R_2 = I(\alpha \otimes \beta : \gamma) - I(\alpha : \gamma/\beta)$, но не $R_2 = I(\beta : \gamma/\alpha)$.

Надо, однако, заметить, что в общем случае, когда $p(\alpha, \beta, \gamma) \neq p(\gamma/\alpha\beta)p(\alpha)p(\beta)$, неравенство (24) неверно. Более того, есть случаи, когда его надо заменить на обратное.

Итак, задачей физической теории информации в данном случае является изучение результатов (19), (20) для физически осмысленных начальных матриц плотности и зашумленных каналов. Этому посвящен раздел 3. Здесь мы установим верхние границы для информационных мер, фигурирующих в (19), (20).

Мы будем использовать метод работы [13]. Имеем для условно-взаимной информации

$$I(\alpha : \gamma/\beta) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} p_{\alpha}^{(1)} p_{\beta}^{(2)} \operatorname{tr} \left(E_{\gamma} \hat{S}(\rho_{\alpha}^{(1)} \otimes \rho_{\beta}^{(2)}) \right) \ln \frac{\operatorname{tr} \left(E_{\gamma} \hat{S}(\rho_{\alpha}^{(1)} \otimes \rho_{\beta}^{(2)}) \right)}{\operatorname{tr} \left(E_{\gamma} \hat{S}(\rho_{\alpha}^{(1)} \otimes \rho_{\beta}^{(2)}) \right)}. \quad (25)$$

Для произвольного обобщенного измерения E_γ и матрицы плотности ρ определим преобразование

$$\rho \mapsto \{\text{tr}(E_\gamma \rho)\}, \quad (26)$$

т.е. ρ отображается в соответствующую диагональную матрицу. Очевидно, что этот класс преобразований относится к типу (3). Применяя (26) к относительным энтропиям вида

$$\text{tr} \left[\hat{S}(\rho_\alpha^{(1)} \otimes \rho_\beta^{(2)}) \left(\ln \hat{S}(\rho_\alpha^{(1)} \otimes \rho_\beta^{(2)}) - \ln \hat{S}(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}) \right) \right], \quad (27)$$

получим с помощью (10)

$$I(\alpha : \gamma / \beta) \leq - \sum_{\alpha, \beta} p_\alpha^{(1)} p_\beta^{(2)} S \left(\hat{S}(\rho_\alpha^{(1)} \otimes \rho_\beta^{(2)}) \right) + \sum_{\beta} p_\beta^{(2)} S \left(\hat{S}(\rho^{(1)} \otimes \rho_\beta^{(2)}) \right), \quad (28)$$

$$I(\alpha \otimes \beta : \gamma) \leq - \sum_{\alpha, \beta} p_\alpha^{(1)} p_\beta^{(2)} S \left(\hat{S}(\rho_\alpha^{(1)} \otimes \rho_\beta^{(2)}) \right) + S \left(\hat{S}(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}) \right), \quad (29)$$

а также аналогичное неравенство для $I(\beta : \gamma / \alpha)$. Этими неравенствами можно пользоваться, если интересоваться предельными возможностями соответствующих систем связи.

3. ПЕРЕДАЧА СЖАТЫХ И КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Одним из наиболее распространенных материальных носителей информации является электромагнитное поле. Мы кратко остановимся на связи между формализмом, описанным выше, и характеристиками поля, распространяющегося в вакууме или линейной диэлектрической среде [2]. Информация здесь определяется продольными характеристиками излучения, тогда как поперечные характеристики фиксированы. Это связано с тем, что моды с различными поперечными характеристиками (поляризация, волновой вектор) могут быть легко разделены на входе канала (по крайней мере, в принципе). Поэтому по модам с различными поперечными характеристиками информацию можно передавать независимо. Приведем конкретный пример. Пусть фиксированы поляризация и волновой вектор излучения. Тогда можно предложить схему кодирования, где буквам классического алфавита сопоставляются различные состояния поля с определенным числом фотонов. К сожалению, исследование этого случая имеет чисто академический интерес. Связано это с тем, что состояния с определенным числом фотонов очень сложно реализовать на практике. Более реалистичными оказываются случаи, когда поле находится в таком состоянии, при котором задан оператор уничтожения или суперпозиция операторов рождения и уничтожения. Это когерентные и сжатые состояния [2, 21]. Давно известно о практических методах генерации когерентных состояний, а недавно появились также источники сжатых состояний [2, 21].

Обратимся теперь непосредственно к постановке задачи о передаче информации посредством когерентных и сжатых состояний. Две моды электромагнитного поля от двух независимых источников одновременно поступают в общий канал связи, где взаимодействуют друг с другом и с термостатом. Далее мы примем систему единиц, где постоянная Планка равна единице, а частоты мод обозначим ω_1, ω_2 . Взаимодействие между

модами, а также между модами и термостатом будем считать линейным. Линейное взаимодействие между модами может быть вызвано рядом причин. Как пример можно привести рассеяние мод на малой неоднородности среды. Этот и другие примеры линейного взаимодействия подробно обсуждены в [1]. Введение линейного взаимодействия между модами и термостатом также представляется вполне оправданным [11, 22].

Рассмотрим сначала случай без термостата.

В общем случае гамильтониан линейного взаимодействия между модами (осцилляторами) записывается в виде

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 q_2^2 + zq_1q_2, \quad (30)$$

$$[p_{1,2}, q_{1,2}] = -i. \quad (31)$$

Здесь индексы 1, 2 различают моды, а операторы с различными индексами коммутируют. Гайзенберговские уравнения движения в терминах операторов рождения-уничтожения имеют вид

$$\dot{a}_1 = -i\omega_1 a_1 - i \frac{z}{2\sqrt{2\omega_1\omega_2}}(a_2 + a_2^\dagger), \quad (32)$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_2 a_2 - i \frac{z}{2\sqrt{2\omega_1\omega_2}}(a_1 + a_1^\dagger). \quad (33)$$

Применим теперь известное приближение вращающей волны (ПВВ). Физически это означает усреднение по достаточно быстрым степеням свободы, а формально – пренебрежение в уравнениях (32), (33) нерезонансными членами. Однако это приближение можно применять, только если времена наблюдения достаточно велики, а константа межмодового взаимодействия достаточно мала (подробное обсуждение ПВВ см. в [22].)

Включим теперь в момент времени $t = 0$ взаимодействие с термостатом. В марковском режиме взаимодействие с термостатом может привести к следующим эффектам [20]:

- 1) ренормировка исходных параметров z, ω_1, ω_2 ;
- 2) введение в уравнения (32), (33) сил трения вида $-\gamma_1 a_1/2, -\gamma_2 a_2/2$, причем для простоты мы будем считать, что $\gamma_1 = \gamma_2$;
- 3) введение шумовых сил (источники Ланжевена), которые в ПВВ можно считать белым шумом (это один из основных мотивов использования ПВВ).

Окончательно уравнения движения имеют следующий вид:

$$i\dot{a}_1 = \omega_1 a_1 - i \frac{\gamma a_1}{2} + k a_2 + i\bar{F}_1, \quad (34)$$

$$i\dot{a}_2 = \omega_2 a_2 - i \frac{\gamma a_2}{2} + k a_1 + i\bar{F}_2, \quad (35)$$

где $k = z/2\sqrt{2\omega_1\omega_2}$ – константа межмодового взаимодействия.

Решения этих линейных уравнений можно сразу выписать:

$$a_1 = a_1(0)(\varepsilon e^{i\phi_1 t} + (1-\varepsilon)e^{i\phi_2 t}) - a_2(0)\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}(e^{i\phi_1 t} - e^{i\phi_2 t}) + \\ + \sqrt{\varepsilon} e^{i\phi_1 t} \int_0^t e^{i\phi_1 t'} F_1(t') dt' + \sqrt{1-\varepsilon} e^{i\phi_2 t} \int_0^t e^{i\phi_2 t'} F_2(t') dt', \quad (36)$$

$$a_2 = a_2(0)(\varepsilon e^{i\phi_2 t} + (1-\varepsilon)e^{i\phi_1 t}) - a_1(0)\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}(e^{i\phi_1 t} - e^{i\phi_2 t}) - \\ - \sqrt{1-\varepsilon} e^{i\phi_1 t} \int_0^t e^{i\phi_1 t'} F_1(t') dt' + \sqrt{\varepsilon} e^{i\phi_2 t} \int_0^t e^{i\phi_2 t'} F_2(t') dt'. \quad (37)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\phi_{1,2} = -\lambda_{1,2} + i\frac{\gamma}{2}, \quad (38)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega_1 + \omega_2 \pm \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4k^2}}{2}, \quad (39)$$

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{(\lambda_1 - \omega_1)^2}{k^2}, \quad (40)$$

$$\langle F_i^\dagger(t) F_j(t') \rangle = \gamma \bar{n}(\lambda_{1,2}) \delta_{ij} \delta(t-t'), \quad \bar{n} = \left(\exp\left(\frac{\lambda_{1,2}}{T}\right) - 1 \right)^{-1}, \quad (41)$$

$$\langle F_i(t) F_j^\dagger(t') \rangle = \gamma (\bar{n}(\lambda_{1,2}) + 1) \delta_{ij} \delta(t-t'), \quad (42)$$

$$\langle F_i(t) F_j(t') \rangle = 0. \quad (43)$$

Итак, мы описали линейное межмодовое взаимодействие, а также взаимодействие с термостатом. Конечно, в рамках линейного взаимодействия можно было бы обойтись без всяких приближений. Однако нашей целью в данной работе является демонстрация некоторых ограничений, налагаемых диссипацией и межмодовым взаимодействием, без рассмотрения наиболее полных или прикладных аспектов задачи. Поэтому из имеющегося множества подходов к открытым линейным квантовым системам мы выбрали наиболее простой и понятный.

Так как когерентные состояния оказываются частным случаем сжатых, то мы начнем обсуждение сразу в общем виде.

Для определения сжатого состояния моды с оператором уничтожения a введем операторы $\Gamma, \Gamma^\dagger$ [2, 21],

$$a = \Gamma \operatorname{ch} r - \Gamma^\dagger \operatorname{sh} r, \quad a^\dagger = \Gamma^\dagger \operatorname{ch} r - \Gamma \operatorname{sh} r, \quad [\Gamma, \Gamma^\dagger] = 1. \quad (44)$$

Тогда сжатое состояние $|\gamma, r\rangle$ определяется как собственный вектор оператора Γ ,

$$\Gamma |\gamma, r\rangle = \gamma |\gamma, r\rangle. \quad (45)$$

Имеем

$$\alpha_1 = \langle \operatorname{Re} a \rangle = \operatorname{Re} \gamma e^{-r}, \quad \alpha_2 = \langle \operatorname{Im} a \rangle = \operatorname{Im} \gamma e^r, \\ \langle (\operatorname{Re} a)^2 \rangle - \langle \operatorname{Re} a \rangle^2 = \frac{1}{4} e^{-2r}, \quad \langle (\operatorname{Im} a)^2 \rangle - \langle \operatorname{Im} a \rangle^2 = \frac{1}{4} e^{2r}. \quad (46)$$

Здесь усреднение производится по состоянию $|\gamma, r\rangle$. Если $r > 0$, то компонента $\text{Re } a$ называется сжатой. В определении сжатых состояний мы опустили не существенные для нас фазовые факторы. Очевидно, что сжатые состояния с $r = 0$ являются обычными когерентными состояниями.

Пусть теперь моды a_1, a_2 при $t = 0$ (т.е. на входе общего зашумленного канала) находятся в сжатых состояниях с параметрами r_1, r_2 и средними $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)$. На выходе канала (т.е. через время t после включения межмодового взаимодействия и взаимодействия с термостатом) одна из мод (для определенности a_1) подвергается измерению типа (4).

Уже здесь надо сделать следующее замечание. Конечно, есть возможность, что будет измеряться также мода a_2 . Наше определение канала с множественным доступом остается в силе, если считать, что измерения независимы, а в процессе декодирования результаты измерения моды 1 (2) доступны для декодера 2 (1). Тогда полное выходное распределение определится измерением над всей системой.

Мы будем рассматривать два типа измерений.

Для когерентных или близких состояний оптимальным способом приема (декодирования) может оказаться гетеродинирование, которое представляет собой одновременное (но, конечно, неточное) измерение обеих компонент моды a . Мода a и некоторая вспомогательная мода a_i поступают в преобразователь. В результате этого образуются две новые моды b и b_i :

$$b = \sqrt{G} a + \sqrt{G-1} a_i^\dagger, \quad b_i = \sqrt{G-1} a^\dagger + \sqrt{G} a_i, \quad (47)$$

где $G > 1$ – некоторая константа. Преобразователь подобного типа может быть реализован посредством параметрического усилителя [22].

После преобразования измеряется величина $y = b/\sqrt{G}$. При $G \gg 1$ (большие времена работы параметрического усилителя) оказывается, что

$$y = a + a_i^\dagger. \quad (48)$$

Очевидно, что если $y = y_1 + iy_2$, то

$$[y_1, y_2] = 0. \quad (49)$$

Таким образом, компоненты y коммутируют и могут быть измерены одновременно. За это приходится “расплачиваться” шумом, связанным с наличием a_i , что находится в полном соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга. Обычно для снижения уровня шумов предполагают, что мода a_i находится в вакуумном состоянии. В этом случае вычисления (см., например, приложение к работе [2]) приводят к следующему типу обобщенных измерений для гетеродинирования:

$$E_\gamma = \frac{1}{\pi} |\gamma\rangle \langle \gamma|, \quad (50)$$

где $|\gamma\rangle$ – когерентное состояние со сдвигом γ . Это означает, что выходные вероятности определяются по формуле

$$p(\gamma/\alpha\beta) = \frac{1}{\pi} \langle \gamma | \rho(t; a_1) | \gamma \rangle, \quad (51)$$

а $\rho(t; a_1)$ – матрица плотности моды a_1 в момент времени t . В другом случае измеряется одна из компонент моды, при этом выходные вероятности определяются по формуле

$$p(\gamma_1/\alpha\beta) = \langle \gamma_1 | \rho(t; a_1) | \gamma_1 \rangle. \quad (52)$$

Здесь $|\gamma_1\rangle$ – собственное состояние измеряемой компоненты. В некоторых случаях при рассмотрении гетеродинамирования и гомодинамирования одновременно мы будем употреблять только символ γ .

Как показывает простой анализ [16], пропускные способности максимизируются при входных распределениях гауссовского типа, которые мы и будем рассматривать:

$$\begin{aligned} p(\alpha) &\sim \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^T K_\alpha \alpha\right), \\ p(\beta) &\sim \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^T K_\beta \beta\right), \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \beta^T = (\beta_1, \beta_2).$$

Здесь и далее гауссовские интегралы будут выписываться без нормировки.

В рамках линейных уравнений Ланжевена (32), (33) гауссовское состояние (частным случаем которого являются когерентное и сжатое состояния) переходит снова в гауссовское состояние. Имея это в виду, средние (51), (52) удобно вычислять в формализме функций Вигнера [23]. Как хорошо известно [24], функция Вигнера гауссовской моды a может быть выражена следующим образом через средние и дисперсии по этому состоянию:

$$\begin{aligned} W(\text{Re } \gamma, \text{Im } \gamma) &\sim \exp\left(-\frac{(\text{Re } \gamma - \langle \text{Re } a \rangle)^2}{2} K_{11} - \frac{(\text{Im } \gamma - \langle \text{Im } a \rangle)^2}{2} K_{22} - \right. \\ &\quad \left. - (\text{Re } \gamma - \langle \text{Re } a \rangle)(\text{Im } \gamma - \langle \text{Im } a \rangle) K_{12}\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= \langle (\text{Re } a)^2 \rangle - \langle \text{Re } a \rangle^2, \\ c_{22} &= \langle (\text{Im } a)^2 \rangle - \langle \text{Im } a \rangle^2, \\ c_{12} &= c_{21} = \frac{\langle \text{Re } a \text{Im } a + \text{Im } a \text{Re } a \rangle}{2} - \langle \text{Im } a \rangle \langle \text{Re } a \rangle. \end{aligned} \quad (56)$$

Как мы видим, рассматриваемые нами каналы являются гауссовскими. Задача о гауссовском канале с множественным (в данном случае с двойным) доступом рассмотрена в приложении.

Перейдем теперь к обсуждению конкретных результатов. Первый случай, который мы рассмотрим, – гетеродинное измерение моды 1 в момент времени t (формула (36)), причем начальные параметры сжатия нулевые:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0. \quad (57)$$

При этом начальные распределения надо взять в виде

$$K_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad K_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Дисперсии распределений пропорциональны средним числам заполнения начальных распределений:

$$x = \frac{1}{2}\bar{n}_1, \quad y = \frac{1}{2}\bar{n}_2. \quad (59)$$

Имеем из общих формул (П.3)–(П.8) (см. приложение), что

$$I(\gamma : \alpha \otimes \beta) = \ln \left(1 + \frac{\bar{n}_1 e^{-\gamma t} + 2(\bar{n}_2 - \bar{n}_1)\varepsilon(1-\varepsilon)e^{-\gamma t}(1 - \cos(t(\lambda_1 - \lambda_2)))}{\frac{1}{2}(e^{-\gamma t} + \Psi + 1)} \right), \quad (60)$$

$$I(\gamma : \alpha/\beta) = \ln \left(1 + \frac{\bar{n}_1 e^{-\gamma t} - (1 - 2\varepsilon(1-\varepsilon))(1 - \cos(t(\lambda_1 - \lambda_2)))}{\frac{1}{2}(e^{-\gamma t} + \Psi + 1)} \right).$$

Для Ψ получаем (П.8):

$$\Psi = (1 - e^{-\gamma t})(2\varepsilon\bar{n}_T(\lambda_1) + 2(1-\varepsilon)\bar{n}_T(\lambda_2) + 1). \quad (61)$$

Эта величина имеет особенно простой вид при $T = 0$: $\Psi = 1 - \exp(\gamma t)$. Здесь и в дальнейшем мы не будем выписывать величину $I(\beta : \gamma/\alpha)$, если формула для нее уже очевидна из выписанного. При $t = 0$ эти информационные меры совпадают с хорошо известной формулой пропускной способности канала с когерентными состояниями [2] (см. также формулу (69) ниже). При больших t величины (60) стремятся к нулю, как это и должно быть. При положительных t эти величины осциллируя убывают, осцилляции появляются как результат межмодового взаимодействия.

Перейдем теперь к обсуждению некоторых предельных случаев полученных соотношений (60). Здесь мы для простоты примем, что $T = 0$. При $\gamma t \gg 1$ (большие времена), пренебрегая факторами порядка $\exp(-2\gamma t)$, имеем

$$I(\gamma : \alpha \otimes \beta) = e^{-\gamma t}(\bar{n}_1 + 2(\bar{n}_2 - \bar{n}_1)\varepsilon(1-\varepsilon))(1 - \cos(t(\lambda_1 - \lambda_2))). \quad (62)$$

Формула для $I(\gamma : \alpha/\beta)$ будет найдена, если в (62) принять $\bar{n}_2 = 0$. Особенно простой результат можно получить в пределе $t(\lambda_1 - \lambda_2) \ll 1$ (малые времена):

$$I = \ln(1 + e^{-\gamma t}\bar{n}_1). \quad (63)$$

Здесь в первом порядке по $t(\lambda_1 - \lambda_2)$ поведения величин $I(\gamma : \alpha \otimes \beta)$ и $I(\gamma : \alpha/\beta)$ совпадают.

Положив $\varepsilon = 1$ в (60), мы перейдем к одноканальному каналу с гауссовским шумом. В этом случае пропускная способность монотонно стремится к нулю со временем.

Рассмотрим теперь случай гомодинного измерения с произвольными r . Здесь в качестве начальных распределений нужно использовать

$$K_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Это произведение гауссовского распределения по измеряемой компоненте и дельта-функции по другой. Такой выбор обеспечивает оптимальное использование входной энергии. Здесь уже связь между дисперсией распределения и средним числом заполнения задается как [2]

$$x = \bar{n}_1 - \text{sh}^2 r_1, \quad y = \bar{n}_2 - \text{sh}^2 r_2. \quad (65)$$

Рассмотрим для начала одноканальную связь с параметром сжатия r . В этом случае имеем из общих формул приложения

$$I(\alpha : \gamma_1) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\cos^2(\lambda t) (\bar{n} - \text{sh}^2 r)}{\frac{1}{4} e^{-2r} + 2 \sin^2(\lambda t) \text{sh}(2r) + C} \right). \quad (66)$$

Оптимальное сжатие при заданном $\bar{n}$ определяется уравнением

$$e^{2r} = \frac{\sqrt{\cos^4(\lambda t) + C^2 + 4C(2\bar{n} + 1) \cos^2(\lambda t)} - \cos^2(\lambda t)}{C}, \quad (67)$$

где

$$C = (e^{\gamma t} - 1)(2\bar{n}_T + 1). \quad (68)$$

Оптимальный параметр сжатия стремится к нулю на больших временах. Это означает, что выгода от использования сжатых состояний на достаточно больших временах исчезает. Максимальная разница при использовании сжатых или когерентных состояний достигается при $t = 0$, где имеем [2]

$$I = \ln(1 + \bar{n}) \quad (69)$$

для когерентных состояний и

$$I = \ln(1 + 2\bar{n}) \quad (70)$$

для сжатых состояний. В случае действия шума оптимальное сжатие должно определяться по формуле (67).

Перейдем теперь к обсуждению общего случая. Мы будем без особых оговорок использовать обозначения, введенные в приложении. В общем случае имеем для гомодинового измерения

$$I(\alpha : \gamma_1/\beta) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{(\bar{n}_1 - \text{sh}^2 r_1) u_1^2}{\frac{1}{4}(u_1^2 e^{-2r_1} + u_2^2 e^{2r_1}) + \frac{1}{4}(v_1^2 e^{-2r_2} + v_2^2 e^{2r_2}) + \frac{1}{4}\Psi} \right), \quad (71)$$

$$I(\alpha \otimes \beta : \gamma_1) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{(\bar{n}_1 - \text{sh}^2 r_1) u_1^2 + (\bar{n}_2 - \text{sh}^2 r_2) v_1^2}{\frac{1}{4}(u_1^2 e^{-2r_1} + u_2^2 e^{2r_1}) + \frac{1}{4}(v_1^2 e^{-2r_2} + v_2^2 e^{2r_2}) + \frac{1}{4}\Psi} \right). \quad (72)$$

Вопрос о максимизации этих информационных мер можно поставить следующим образом: максимизировать по r_1, r_2 количество информации $I(\alpha : \gamma/\beta)$, передаваемое первым источником, а затем вычислить аналогичную величину $I(\alpha \otimes \beta : \gamma) - I(\alpha : \gamma/\beta)$ для второго источника. Подробный анализ показывает, что в общем сохраняется ситуация с однотерминальным случаем: существуют оптимальные значения r_1, r_2 , стремящиеся к нулю при больших t . Дополнительный источник потерь связан с межмодовым взаимодействием.

Скажем несколько слов о некоторых важных предельных случаях уравнений (71), (72). При $\gamma t \gg 1$ пропускные способности стремятся к нулю как $\exp(-\gamma t)$. При $\lambda_1 t, \lambda_2 t \ll 1$ (малые времена) поведения $I(\gamma : \alpha \otimes \beta)$, $I(\gamma : \alpha/\beta)$ совпадают:

$$I = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4(\bar{n}_1 - \text{sh}^2 r_1)}{e^{-2r_1} + (\varepsilon(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2)^2 t^2 e^{2r_1} + \varepsilon(1 - \varepsilon) t^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 e^{2r_2} + e^{\gamma t} - 1} \right). \quad (73)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы рассмотрели физическую модель квантового канала с множественным доступом. Основной целью работы было общее изучение ограничений, налагаемых квантовомеханическими особенностями задачи (неортогональность начального ансамбля состояний), взаимодействием сообщений от разных источников и взаимодействием с внешним окружением, которое мы представили как термостат при некоторой температуре T . В разделе 2 мы, пользуясь идеей работы [13], установили общие соотношения (верхние границы) (19), (20), которым удовлетворяют информационные меры. Подробное изучение этих верхних границ предполагается провести в ближайшем будущем.

Особого внимания заслуживает глубокая аналогия между теорией информации и статистической физикой, замеченная еще в работе [10]. В разделе 2 мы продемонстрировали эту аналогию на одном частном примере, чтобы показать возможность применения неравенства (10) в статистической термодинамике.

Наконец, в последнем разделе мы исследовали проблему передачи когерентных и сжатых состояний. Из-за диссипации информационные меры стремятся к нулю на больших временах, дополнительные источники потерь связаны с межмодовым взаимодействием. Передача сжатых состояний обладает рядом особенностей. Даже в однотерминальном случае пропускная способность имеет осциллирующий характер, что связано с соответствующим характером дисперсии сжатого состояния. В двутерминальном случае есть

осцилляции, вызванные межмодовым взаимодействием. Оптимальное сжатие стремится к нулю после достаточно длительного воздействия шума, так что через большое время практической разницы между использованием когерентных и сжатых состояний нет.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выведем формулы для пропускных способностей гауссовского канала с двойным доступом. Если входными сообщениями канала являются векторы α, β с распределениями (53), то имеем для выходного вектора γ

$$\gamma = A_1 \alpha + A_2 \beta + z, \quad (\text{П. 1})$$

где A_1, A_2 — некоторые прямоугольные матрицы, а z — аддитивный гауссовский шум с корреляционной матрицей K^{-1} ,

$$\langle zz^T \rangle = K^{-1}. \quad (\text{П. 2})$$

В этом случае имеем из (19), (20), что

$$\begin{aligned} I(\gamma : \alpha \otimes \beta) &= \ln \det(1 + K A_1 K_\alpha^{-1} A_1^T + K A_2 K_\beta^{-1} A_2^T), \\ I(\gamma : \alpha / \beta) &= \ln \det(1 + K A_1 K_\alpha^{-1} A_1^T), \\ I(\gamma : \beta / \alpha) &= \ln \det(1 + K A_2 K_\beta^{-1} A_2^T). \end{aligned} \quad (\text{П. 3})$$

В случае гетеродинного измерения получаем с использованием (54)–(56)

$$A_1^{(\text{het})} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{(\text{het})} = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П. 4})$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-\gamma t/2} (\varepsilon \cos(\lambda_1 t) + (1 - \varepsilon) \cos(\lambda_2 t)), \\ u_2 &= -e^{-\gamma t/2} (\varepsilon \sin(\lambda_1 t) + (1 - \varepsilon) \sin(\lambda_2 t)), \\ v_1 &= -e^{-\gamma t/2} \sqrt{\varepsilon(1 - \varepsilon)} (\cos(\lambda_1 t) - \cos(\lambda_2 t)), \\ v_2 &= e^{-\gamma t/2} \sqrt{\varepsilon(1 - \varepsilon)} (\sin(\lambda_1 t) - \sin(\lambda_2 t)). \end{aligned} \quad (\text{П. 5})$$

Кроме того, имеем

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} G_1 & G_3 \\ G_3 & G_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{П. 6})$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{4}(u_1^2 e^{-2r_1} + u_2^2 e^{2r_1}) + \frac{1}{4}(v_1^2 e^{-2r_1} + v_2^2 e^{2r_1}) + \frac{1}{4}(\Psi + 1), \\ G_2 &= \frac{1}{4}(u_1^2 e^{2r_1} + u_2^2 e^{-2r_1}) + \frac{1}{4}(v_1^2 e^{2r_1} + v_2^2 e^{-2r_1}) + \frac{1}{4}(\Psi + 1), \\ G_3 &= \frac{1}{4}u_1 u_2 (e^{-2r_1} - e^{2r_1}) + \frac{1}{4}v_1 v_2 (e^{-2r_2} - e^{2r_2}), \end{aligned} \quad (\text{П. 7})$$

а Ψ задается формулой

$$\Psi = (1 - e^{-\gamma t})(2\varepsilon \bar{n}_T(\lambda_1) + 2(1 - \varepsilon) \bar{n}_T(\lambda_2) + 1). \quad (\text{П. 8})$$

В случае же гомодинного измерения находим

$$A_1^{(\text{hom})} = (u_1, -u_2), \quad A_2^{(\text{hom})} = (v_1, -v_2), \quad (\text{П. 9})$$

$$K^{-1} = G_1 - \frac{1}{4}. \quad (\text{П. 10})$$

Список литературы

- [1] *В. В. Митюгов*. Физические основы теории информации. М.: Сов. радио, 1978.
- [2] *C. M. Caves, P. D. Drummond*. Rev. Mod. Phys. 1994. V. 66. P. 481.
- [3] *Б. Б. Кадомцев*. УФН. 1994. Т. 164. С. 449.
- [4] *B. Schumacher*. Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 2614.
- [5] *А. С. Холево*. Проблемы передачи информации. 1979. Т. 15. С. 3.
- [6] *K. Kraus*. Ann. Phys. 1971. V. 64. P. 311.
- [7] *А. С. Холево*. Проблемы передачи информации. 1973. Т. 9. С. 3.
- [8] *К. Хелстром*. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. М.: Мир, 1979.
- [9] *И. Чисар, Я. Кернер*. Теория информации. М.: Мир, 1985.
- [10] *Р. Л. Стратонович*. Теория информации. М.: Сов. радио, 1975.
- [11] *W. H. Zurek et al.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1187.
- [12] *A. Ekert*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 661.
- [13] *H. P. Yuen, M. Ozawa*. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 363.
- [14] *A. S. Holevo*. The capacity of quantum channel with general signal states, quant-ph, 96011023.
- [15] *P. Hausladen et al.* Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 1869.
- [16] *A. El Gamal, T. Cover*. Proc. IEEE. 1980. V. 68. P. 1466.
- [17] *G. Lindblad*. Commun. Math. Phys. 1975. V. 40. P. 147.
- [18] *M. Ohya, D. Petz*. Quantum Entropy and Its Use. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [19] *H. Umegaki*. Kodai Math. Sem. Rep. 1962. V. 14. P. 59.
- [20] *M. Lax*. Phys. Rev. 1966. V. 145. P. 110.
- [21] *В. П. Быков*. УФН. 1991. Т. 161. С. 145.
- [22] *К. Люиселл*. Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Мир, 1972.
- [23] *Р. М. Татарский*. УФН. 1983. Т. 139. С. 587.
- [24] *V. I. Manko*. Introduction to Quantum Optics. quant-ph 9509018.

Поступила в редакцию 24.XII.1997 г.,
после доработки 10.VI.1998 г.