Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Каценко, Регулярные и нерегулярные решения
в задаче о дислокациях в твердом теле, *ТМФ*, 2018,
том 195, номер 3, 362–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:04:24

© 2018 г.

С. А. Кащенко^{*†}

РЕГУЛЯРНЫЕ И НЕРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДИСЛОКАЦИЯХ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Рассмотрены асимптотические по невязке решения исходного дифференциального уравнения с отклонениями пространственной переменной. Все решения естественным образом разбиваются на классы, регулярно и нерегулярно зависящие от параметров задачи. В различных областях из малой окрестности нулевого состояния равновесия фазового пространства построены специальные нелинейные распределенные уравнения и системы уравнений, зависящие от континуальных семейств некоторых параметров. В частности, показано, что решения исходного пространственного одномерного уравнения можно описать решениями специальных уравнений и систем уравнений шредингеровского типа в пространственно двумерной области изменения аргументов.

Ключевые слова: бифуркации, устойчивость, нормальные формы, сингулярные возмущения, динамика.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9421>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется простейшая кристаллическая структура, состоящая из слоев атомов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Френкелем и Конторовой была предложена математическая модель поведения точечного дефекта в кристаллической структуре твердого тела [1]. Эти дефекты иногда называют дислокациями. В настоящее время под дислокацией понимается более сложное несовершенство кристаллической структуры, чем любой из точечных дефектов [2].

Для описания дислокаций в твердом теле в работе [1] предложено уравнение движения n -го атома в решетке

$$m\ddot{y}_n + \alpha \sin y_n = \beta(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания № 1.12873.2018/12.1.

^{*}Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

[†]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

Здесь m , α и β – положительные коэффициенты, а $y_n = y_n(t, x_n)$ – отклонение n -го атома от положения равновесия. Для $y_n(t, x_n)$ при крайних значениях n выполнены условия, характерные либо для периодической краевой задачи $y_{N+1} = y_1$, $y_0 = y_N$, либо для задачи Дирихле $y_{N+1} = y_0 = 0$, либо для задачи Неймана $y_{N+1} = y_N$, $y_0 = y_1$. Точки x_n лежат на отрезке $[0, 2\pi]$, и $x_{n+1} = x_n + \varepsilon$, где $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$. Предполагается, что $N \gg 1$ или, что то же самое,

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2)$$

Переходя к непрерывному распределению масс, из уравнения (1) получаем (после очевидных перенормировок и замены $\alpha \sin y$ на более общую функцию $f(y)$) уравнение

$$\ddot{y} + f(y) = y(t, x + \varepsilon) - 2y + y(t, x - \varepsilon). \quad (3)$$

Для определенности ниже считаем, что выполнены периодические краевые условия

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (4)$$

Нелинейную функцию $f(y)$ примем в виде

$$f(y) = ay + by^3 + \varphi(y), \quad \text{где} \quad \varphi(y) = o(|y|^3) \quad \text{при} \quad y \rightarrow 0.$$

В статье [1] рассмотрен случай, когда $f(y) = \varepsilon^2 \sin y$, т. е. $a = \varepsilon^2$, $b = \varepsilon^2/6$. Отметим также работы [3]–[9], в которых рассматривалась близкая к уравнению (1) задача Ферми–Паста–Улама.

Поставим задачу исследования при условии (2) поведения всех решений краевой задачи (3), (4) с начальными условиями из некоторой достаточно малой (и не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия. Центральную роль при этом играет поведение решений линеаризованной в нуле краевой задачи

$$\ddot{y} + ay = y(t, x + \varepsilon) - 2y + y(t, x - \varepsilon), \quad y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (5)$$

Характеристическое уравнение для задачи (5) имеет вид

$$\lambda^2 + a = -4 \sin^2 \left(\frac{\varepsilon k}{2} \right), \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (6)$$

Ниже предполагаем, что параметр a положителен, и для некоторых фиксированных параметров a_0 и a_1 записываем соотношение

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad a_0 \geq 0 \quad \text{и} \quad a_1 > 0 \quad \text{при} \quad a_0 = 0.$$

Все корни уравнения (6) являются чисто мнимыми. Поэтому в задаче об устойчивости нуля в выражениях (3), (4) реализуется критический случай бесконечной размерности. Используя методы работ [10]–[14], ниже мы строим семейства специальных краевых задач для описания различных групп решений исходной краевой задачи (3), (4). Отметим, что особо важным с прикладной точки зрения [1], [15], [16] является случай, когда параметр a мал. В связи с этим в разделе 2 мы рассматриваем случай, когда $a_0 = 0$, т. е.

$$a = \varepsilon^2 a_1. \quad (7)$$

Статья состоит из двух основных разделов. В разделе 2 исследуются регулярные решения, т. е. такие решения, для которых имеет место асимптотическое представление

$$y(t, x + \varepsilon) = y(t, x) + \varepsilon y'(t, x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 y''(t, x) + \dots \quad (8)$$

С точки зрения расположения корней характеристического уравнения (6) в первом разделе речь идет о решениях, формирующихся в своей основе на модах с “конечными” (т. е. не зависящими от параметра ε) значениями номеров k .

Во разделе 3 рассматриваются нерегулярные решения, которые содержат быстро осциллирующие составляющие. Они формируются на модах, близких к асимптотически большим (при $\varepsilon \rightarrow 0$) значениям порядка ε^{-1} . В разделе 4 приведены выводы.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Здесь мы остановимся на изучении регулярных решений краевой задачи (3), (4). Подставим представление (8) в уравнение (3). Для определения $y(t, x)$ получаем с точностью до $o(\varepsilon^6)$ краевую задачу

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 y}{\partial x^6} \right] - f(y), \quad (9)$$

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (10)$$

Отметим, что на таком пути в статье [1] было получено известное уравнение, которое носит название уравнения синус-Гордона. Обратим внимание, что без учета слагаемого $2\varepsilon^4(6!)^{-1} \partial^6 y / \partial x^6$ краевая задача (9), (10) является некорректной. В частности, не выполняется теорема существования и единственности решений.

Итак, при всех достаточно малых значениях ε рассматривается вопрос о локальном (в достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия) поведении всех решений краевой задачи (9), (10).

Важную роль при анализе решений из малой окрестности нуля играет линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 y}{\partial x^6} \right] - ay \quad (11)$$

с краевыми условиями (10). Характеристическое для (10), (11) уравнение записывается как

$$\lambda^2 = -\varepsilon^2 \left((2\pi k)^2 - \frac{(2\pi k)^4}{12} \varepsilon^2 + \frac{2(2\pi k)^6}{6!} \varepsilon^4 \right) - a, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (12)$$

Все корни (12) имеют нулевые вещественные части. Это означает, что в задаче об устойчивости нулевого решения реализуется критический случай бесконечной размерности. Такого типа критические случаи исследовались в работах [10]–[14]. Соответствующий формализм используется ниже. Ограничимся построением нормализованных уравнений с точностью до кубических слагаемых включительно.

В п. 2.1 построена нормальная форма в случае $a_0 = a_1 = 0$. В п. 2.2 рассмотрена повторная нормализация для этого случая. В п. 2.3 рассмотрен случай $a_0 = 0$, $a_1 > 0$. В п. 2.4 рассмотрен случай $a_0 > 0$. Сразу отметим, что результаты для этих трех случаев принципиально отличаются.

2.1. Нормальная форма при $a_0 = a_1 = 0$. В задаче (9), (10) произведем перенормировку “времени” $\varepsilon t \rightarrow t$ и положим $y(t, x) = \varepsilon u(t, x)$. В результате получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - bu^3, \quad (13)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (14)$$

Линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \quad (15)$$

с периодическими краевыми условиями (14) при $\varepsilon = 0$ имеет совокупность периодических решений u_0 , $\xi_k e^{i2\pi k(x+t)}$, $\eta_k e^{i2\pi k(x-t)}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, где u_0 – вещественная, а ξ_k и η_k – комплексные постоянные. Согласно алгоритму из статей [10]–[12] для исследования решений нелинейной краевой задачи (13), (14) введем в рассмотрение формальные ряды

$$u = \varepsilon \left(u_0(\tau) + \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} \xi_k(\tau) e^{i2\pi k(x+t)} + \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} \eta_k(\tau) e^{i2\pi k(x-t)} \right) + \varepsilon^3 u_3(\tau, t, x) + \dots, \\ \xi_{-k}(\tau) = \bar{\xi}_k(\tau), \quad \eta_{-k}(\tau) = \bar{\eta}_k(\tau). \quad (16)$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$ – медленное время, зависимость от второго и третьего аргументов функций $u_j(\tau, t, x)$ является периодической. Еще раз отметим, что ряды вида (16) являются формальными, т.е. вопрос об их сходимости не рассматривается. Из результатов приводимых ниже утверждений следует, что они – асимптотические.

Формуле (16) можно придать более простой вид. Для этого положим

$$\xi(\tau, x) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} \xi_k(\tau) e^{i2\pi kx}, \quad \eta(\tau, x) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} \eta_k(\tau) e^{i2\pi kx}. \quad (17)$$

Подставим выражения (16) в исходное уравнение (13). В получившемся формальном тождестве будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . Отметим, что переход от уравнения для функции u к уравнениям для коэффициентов Фурье u_0 , ξ_k и η_k называют нормализацией, а сами уравнения для новых медленных переменных – нормальной формой.

При первой степени ε (в формальном тождестве) получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при ε^3 , приходим к краевой задаче для u_3

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = F(u_0, \xi, \eta), \quad u_3(\tau, t, x + 1) \equiv u_3(\tau, t, x), \quad (18)$$

где

$$F(u_0, \xi, \eta) = -b(u_0 + \xi + \eta)^3 + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial x} + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right), \\ \xi = \xi(\tau, x + t), \quad \eta = \eta(\tau, x - t).$$

Для разрешимости уравнения (18) в указанном классе функций необходимо и достаточно, чтобы функция $F(u_0, \xi, \eta)$ не содержала гармоник $e^{ik(x+t)}$ и $e^{ik(x-t)}$ при $k = 0, \pm 1, \dots$. Применим этот критерий. В результате приходим к трем соотношениям. Во-первых, из условия равенства нулю коэффициента Фурье функции $F(u_0, \xi, \eta)$ при нулевой гармонике, т. е. из условия $M(F(u_0, \xi, \eta)) = 0$, где принято обозначение $M(\varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x) dx$, получаем, что

$$u_0^3 + u_0 A + B = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$A = 3(M(\xi^2) + M(\eta^2)), \quad B = 3(M(\xi^3) + M(\eta^3)). \quad (20)$$

Во-вторых, из равенства нулю коэффициентов Фурье функции F при гармониках $e^{i2\pi k(x+t)}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, приходим к выводу, что

$$2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + F_1(u_0, \xi, \eta), \quad (21)$$

где $F_1(u_0, \xi, \eta) = 3b[u_0^2 \xi + 3u_0(\xi^2 - M(\xi^2)) + \xi^3 - M(\xi^3) + 3M(\eta^2)\xi]$. Третье соотношение получается из приравливания к нулю коэффициентов Фурье функции F при гармониках $e^{i2\pi k(x-t)}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$-2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial x} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + F_1(u_0, \eta, \xi). \quad (22)$$

Отметим, что для ξ и η выполнены периодические краевые условия

$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x+1) \equiv \eta(\tau, x). \quad (23)$$

Поскольку значение A в равенствах (20) положительно, то уравнение (19) относительно u_0 имеет единственное решение $u_0 = u_0(\xi, \eta)$. Обратим внимание, что u_0 можно записать в виде

$$u_0 = v_0(\xi + \eta), \quad (24)$$

причем функция $v_0(s)$ обладает свойством $v_0(cs) = c^2 v_0(s)$, поскольку

$$M(\xi^2) + M(\eta^2) = M((\xi + \eta)^2), \quad M(\xi^3) + M(\eta^3) = M((\xi + \eta)^3).$$

В силу этого нелинейность в выражениях (21), (22) является кубической.

Важно отметить, что “взаимодействие” уравнений (21) и (22) весьма специфично. В (21) влияние переменной η осуществляется через усредненные величины $M(\eta^2)$ и $M(\eta^3)$, а в (22) – через $M(\xi^2)$ и $M(\xi^3)$ соответственно.

Сформулируем результат о связи решений краевой задачи (13), (14) и решений (21)–(23). Его обоснование вытекает из приведенных выше построений.

Пусть u_0 , $\xi_0(\tau, x+t)$ и $\eta_0(\tau, x-t)$ – решения краевой задачи (19), (21)–(23). По ним из (18) можно найти функцию u_3 . Легко проверить, что

$$\begin{aligned} u_3(\tau, t, x) = & \frac{3b}{4} \left[(2u_0\eta_0 + 3(\eta_0^2 - M(\eta_0^2))) \int_0^{x+t} \xi_0(\tau, s) ds + \right. \\ & + (2u_0\xi_0 + 3(\xi_0^2 - M(\xi_0^2))) \int_0^{x-t} \eta_0(\tau, s) ds + \\ & \left. + \eta_0 \int_0^{x+t} (\xi_0^2(\tau, s) - M(\xi_0^2)) ds + \xi_0 \int_0^{x-t} (\eta_0^2(\tau, s) - M(\eta_0^2)) ds \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие $a_0 = a_1 = 0$. Тогда краевая задача (13), (14) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $u_0(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(v_0(\xi_0 + \eta_0) + \xi_0(\tau, x + t) + \eta_0(\tau, x - t)) + \varepsilon^3 u_3(\tau, t, x).$$

2.2. Повторная нормализация при $a_0 = a_1 = 0$. При учете в краевой задаче (21)–(24) слагаемых порядка ε^2 приходим к краевой задаче, которая отличается от (21)–(24) тем, что в правых частях уравнений (21) и (22) появляются соответственно слагаемые

$$2\varepsilon^2(6!)^{-1} \frac{\partial^6 \xi}{\partial x^6} \quad \text{и} \quad 2\varepsilon^2(6!)^{-1} \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6}, \quad (26)$$

а также нелинейные слагаемые с множителем ε^2 пятого и выше порядков.

Для исследования поведения всех решений получившейся краевой задачи с начальными условиями из некоторой достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия применим схему исследования, использовавшуюся выше. Сначала рассмотрим линеаризованную краевую задачу. Поскольку уравнения для ξ и η похожи, то ограничимся тем, что приведем такое уравнение только для переменной ξ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^2}{6!} \frac{\partial^6 \xi}{\partial x^6}, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (27)$$

Характеристическое уравнение для (27) имеет вид

$$i2\pi k\lambda = \frac{(2\pi k)^4}{12} - \frac{2\varepsilon^2}{6!}(2\pi k)^6, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (28)$$

В силу того, что все корни уравнения (28) являются чисто мнимыми, здесь снова реализуется критический случай бесконечной размерности в задаче об устойчивости. Решениями (27) являются периодические функции

$$\exp \left[i2\pi kx - i \left(\left(\frac{2\pi k}{12} \right)^3 + \frac{2\varepsilon^2}{6!} (2\pi k)^5 \right) \tau \right], \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Для исследования локальной динамики введем в рассмотрение формальные ряды

$$\xi = \varepsilon \sum_{\substack{k=-\infty, \\ pk \neq 0}}^{+\infty} z_k(\tau_1) \exp \left(i2\pi kx - \frac{i}{12} (2\pi k)^3 \tau \right) + \varepsilon^3 z_3(\tau_1, \tau, x) + \dots, \quad (29)$$

$$\eta = \varepsilon \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} y_k(\tau_1) \exp \left(i2\pi kx + \frac{i}{12} (2\pi k)^3 \tau \right) + \varepsilon^3 y_3(\tau_1, \tau, x) + \dots \quad (30)$$

Здесь $\tau_1 = \varepsilon^2 \tau$ – медленное время, $z_{-k}(\tau) = \bar{z}_k(\tau)$, $y_{-k}(\tau) = \bar{y}_k(\tau)$, а $z_j(\tau_1, \tau, x)$ и $y_j(\tau_1, \tau, x)$ периодичны по τ и x . Подставим выражения (29) и (30) в (21), (22) (с добавлением (26)) и соберем коэффициенты при ε^3 . В результате получаем уравнения для z_3 и y_3 . Условием их разрешимости в указанном классе функций является

отсутствие в правых частях всех гармоник $e^{i2\pi kx \pm (i/12)(2\pi k)^3 \tau}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. В результате применения этого критерия приходим к следующей бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения всех коэффициентов Фурье z_k и y_k :

$$\begin{aligned} 2\pi i k \frac{\partial z_k}{\partial \tau_1} &= \alpha (2\pi k)^6 z_k + F_{1k}(v_0(\xi + \eta), \xi, \eta), \\ -2\pi i k \frac{\partial y_k}{\partial \tau_1} &= \alpha (2\pi k)^6 y_k + F_{1k}(v_0(\eta + \xi), \eta, \xi). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $\alpha = 360^{-1}$, а через $F_{1k}(v_0(\xi + \eta), \xi, \eta)$ обозначен коэффициент при $e^{i2\pi kx - i(2\pi k)^3 \tau / 12}$ разложения функции $F(v(\xi + \eta), \xi, \eta)$ при замене ξ и η соответственно на выражения

$$\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} z_k(\tau_1) \exp\left(i2\pi kx - \frac{i}{12}(2\pi k)^3 \tau\right), \quad \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} y_k(\tau_1) \exp\left(i2\pi kx + \frac{i}{12}(2\pi k)^3 \tau\right). \quad (32)$$

Предпримем попытку преобразовать бесконечномерную систему (31) к более компактному виду.

Напомним, что в предыдущем разделе выражение вида

$$\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} \xi_k(\tau) e^{i2\pi k(x+t)}$$

просто сворачивалось (см. формулу (17)) в $\xi(\tau, x+t)$. Тем самым $\xi_k(\tau)$ – соответствующий коэффициент Фурье. Для более сложных выражений (32) подобное сделать не удастся. Поэтому поступим следующим образом.

Рассмотрим функции

$$z(\tau, x) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} z_k(\tau) e^{i2\pi kx}, \quad y(\tau, x) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} y_k(\tau) e^{i2\pi kx}, \quad (33)$$

где коэффициенты Фурье $z_k(\tau)$ и $y_k(\tau)$ те же, что и в (32). Здесь мы исходим из того, что, найдя $z(\tau_1, x)$ и $y(\tau_1, x)$, мы определяем все коэффициенты $z_k(\tau_1)$ и $y_k(\tau_1)$, а зная их, находим оба выражения (32). Обратим внимание, что при $\tau = \tau_n = 12n$, $n = 1, 2, \dots$, выражения (32) совпадают соответственно с $z(\tau_1, x)$ и $y(\tau_1, x)$.

Введем обозначения. Пусть для некоторой функции $w(x)$ имеет место формула

$$w(x) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} w_k e^{i2\pi kx}. \quad (34)$$

Через $N(w)$ обозначим бесконечномерный вектор

$$N(w) = (\dots, w_{-2} e^{-4i\pi x}, w_{-1} e^{-2i\pi x}, 0, w_1 e^{2i\pi x}, w_2 e^{4i\pi x}, \dots).$$

Умножение двух бесконечномерных векторов будем считать покоординатным, т. е., для примера,

$$N(w)\overline{N}(w) = (\dots, |w_{-2}|^2, |w_{-1}|^2, 0, |w_1|^2, |w_2|^2, \dots).$$

Тогда для скалярного произведения $(N(w), N(w)\overline{N}(w))$ имеем формулу

$$(N(w), N(w)\overline{N}(w)) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} w_k |w_k|^2 e^{i2\pi kx}.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \tau_1 \partial x} &= \alpha \frac{\partial^6 z}{\partial x^6} + F_2(z, y), & z(\tau_1, x+1) &\equiv z(\tau_1, x), \\ -\frac{\partial^2 y}{\partial \tau_1 \partial x} &= \alpha \frac{\partial^6 y}{\partial x^6} + F_2(y, z), & y(\tau, x+1) &\equiv z(\tau, x), \end{aligned} \quad (35)$$

в которой

$$F_2(z, y) = -9b(2zM(z^2) + zM(y^2) - 3(N(z), N(z)\overline{N}(z))).$$

Сформулируем основной результат этого раздела.

ТЕОРЕМА 2. *Краевая задача (35) эквивалентна бесконечномерной системе уравнений (31).*

Поясним сказанное: замена в (35) функций z и y на ряды (33) приводит к той же самой системе (31).

Теорема 2 проверяется непосредственно подстановкой (33) в (35). Центральным моментом является отсутствие нетривиальных резонансов, т. е. для каждого фиксированного целого $k \neq 0$ система уравнений в целых и не равных нулю числах

$$k_1 + k_2 + k_3 = k, \quad k_1^3 + k_2^3 + k_3^3 = k^3$$

имеет только такие решения, где сумма двух каких-то чисел k_1 , k_2 и k_3 равна нулю. Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть краевая задача (35) имеет ограниченное при $\tau_1 \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ решение $z_0(\tau_1, x)$, $y_0(\tau_1, x)$ и*

$$z_0(\tau, x) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} z_{k_0}(\tau_1, x) e^{i2\pi kx}, \quad y_0(\tau, x) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} y_{k_0}(\tau_1, x) e^{i2\pi kx}.$$

Тогда краевая задача (21)–(23) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $\xi_0(\tau, x, \varepsilon)$, $\eta_0(\tau, x, \varepsilon)$, для которого (при $\tau_1 = \varepsilon^2 \tau$)

$$\begin{aligned} \xi_0(\tau, x, \varepsilon) &= \varepsilon \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} z_{k_0}(\tau_1, x) \exp\left(i2\pi kx - \frac{i}{12}(2\pi kx)^3 \tau\right) + \varepsilon^3 z_{30}(\tau, x, \varepsilon), \\ \eta_0(\tau, x, \varepsilon) &= \varepsilon \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} y_{k_0}(\tau_1, x) \exp\left(i2\pi kx + \frac{i}{12}(2\pi kx)^3 \tau\right) + \varepsilon^3 y_{30}(\tau, x, \varepsilon). \end{aligned}$$

Краевую задачу (35) можно записать в несколько ином виде. Для этого введем оператор “интегрирования” $J(w)$ функции (34)

$$J(w) = \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{w_k}{2\pi i k} e^{i2\pi k x}.$$

Тогда согласно (35) приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \tau_1} &= \alpha \frac{\partial^5 z}{\partial x^5} + \Phi_2(z, y), & z(\tau_1, x+1) &\equiv z(\tau, x), \\ -\frac{\partial y}{\partial \tau_1} &= \alpha \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + \Phi_2(y, z), & y(\tau_1, x+1) &\equiv y(\tau, x), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\Phi_2(z, y) = -9b[2M(z^2)J(z) + M(y^2)J(z) - 3(N(J(z)), N(z)\overline{N}(z))].$$

Поскольку характеристическое уравнение линеаризованной в нуле краевой задачи (36) имеет только чисто мнимые корни $\lambda_k = 2i(2\pi k)^5/6!$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, и отсутствуют нетривиальные резонансы, то процесс нормализации можно продолжить. Действуя по аналогии с предыдущими построениями, в итоге приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau_1 \partial x} = F_3(v, w), \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_1 \partial x} = F_3(w, v), \quad (37)$$

$$v(\tau, x+1) \equiv v(\tau, x), \quad w(\tau, x+1) \equiv w(\tau, x), \quad (38)$$

где $F_3(v, w) = -9b[2vM(v^2) + vM(w^2) - 3(N(v), N(v)\overline{N}(v))]$.

Решения (36) связаны с решениями (37), (35) равенствами

$$\begin{aligned} z &= \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} v_k(\tau_1) e^{i2\pi k x - i\alpha(2\pi k)^6 \tau_1} + \dots, \\ y &= \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} w_k(\tau_1) e^{i2\pi k x + i\alpha(2\pi k)^6 \tau_1} + \dots. \end{aligned}$$

Здесь через $\dots$ обозначены слагаемые, которые являются асимптотически малыми по сравнению с предыдущим слагаемым, т. е. равны соответственно

$$o\left(\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} |v_k|\right) \quad \text{и} \quad o\left(\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} |w_k|\right).$$

Подробнее на этом мы не останавливаемся.

2.3. Нормальная форма при $a_0 = 0$, $a_1 > 0$. Рассмотрим вопрос о поведении решений краевой задачи (13), (14) из малой окрестности нулевого состояния равновесия при условиях

$$a_0 = 0, \quad a_1 > 0. \quad (39)$$

Линеаризованная в нуле краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - a_1 u, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad (40)$$

имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^2 = -(k^2 + a_1) + \frac{\varepsilon^2}{12} k^4 - \frac{2\varepsilon^4}{6!} k^6, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (41)$$

Поскольку корни

$$\lambda_k = \pm i \left(k^2 + a_1 - \frac{\varepsilon^2}{12} k^4 + \frac{2\varepsilon^4}{6!} k^6 \right)$$

уравнения (41) являются чисто мнимыми, то (40) имеет периодические решения

$$\begin{aligned} \alpha_k \exp \left(ikx - it \sqrt{k^2 + a_1 - \frac{\varepsilon^2}{12} k^4 + \frac{2\varepsilon^4}{6!} k^6} \right), \\ \beta_k \exp \left(ikx + it \sqrt{k^2 + a_1 - \frac{\varepsilon^2}{12} k^4 + \frac{2\varepsilon^4}{6!} k^6} \right). \end{aligned}$$

Согласно изложенной выше методике введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon u_1(\tau, t, x) + \varepsilon^3 u_3(\tau, t, x) + \dots, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} u_1(\tau, t, x) = & \left[\varkappa(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{ikx - it\sqrt{k^2 + a_1}} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \xi_k(\tau) e^{ikx + it\sqrt{k^2 + a_1}} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\tau) e^{ikx + it\sqrt{k^2 + a_1}} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \eta_k(\tau) e^{ikx - it\sqrt{k^2 + a_1}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, $\kappa(\tau)$ вещественна, $\xi_{-k}(\tau) = \bar{\xi}_k(\tau)$, $\eta_{-k}(\tau) = \bar{\eta}_k(\tau)$, а функции $u_j(\tau, t, x)$ почти периодичны по второму и периодичны по третьему аргументам. Подставим (42) в (13). Применяя стандартные действия, приходим к уравнению для $u_3(\tau, t, x)$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + a_1 u_3 = F(u_1(\tau, t, x)), \quad (43)$$

в котором

$$F(u_1) = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} - b(u_1^3).$$

Это уравнение разрешимо при условии отсутствия в разложении $F(u_1)$ гармоник $e^{ikx \pm it\sqrt{k^2 + a_1}}$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Отсюда получаем, что $\varkappa(\tau) \equiv 0$,

$$\begin{aligned} -i\sqrt{k^2 + a_1} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial \tau^2} &= \frac{k^4}{12} \xi_k + F_{k1}, \\ i\sqrt{k^2 + a_1} \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial \tau^2} &= \frac{k^4}{12} \eta_k + F_{k2}, \end{aligned} \quad (44)$$

где F_{k1} и F_{k2} – соответствующие коэффициенты Фурье функции $F(u_1)$. Обозначим через $\mathbb{L}$ банахово пространство, получающееся замыканием по норме C множества всех тригонометрических многочленов, элементами которых являются функции $e^{\pm it\sqrt{k^2+a_1}}$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Бесконечную систему уравнений (44) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial y} &= \frac{1}{12} \left[\frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} - 2a_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2a_1^2 \xi \right] - \\ &\quad - 9b(2\xi M(\xi)^2 + \xi(M(\eta^2)) - 3(N(\xi), N(\xi)\overline{N}(\xi))), \\ -\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial y} &= \frac{1}{12} \left[\frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} - 2a_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2a_1^2 \xi \right] - \\ &\quad - 9b(2\eta M(\eta^2) + \eta(M(\xi^2)) - 3(N(\eta), N(\eta)\overline{N}(\eta))), \end{aligned} \quad (45)$$

где $\xi, \eta \in \mathbb{L}$.

Важный вывод заключается в том, что система (45) играет роль нормальной формы для краевой задачи (13), (14) при условии (39).

ТЕОРЕМА 4. Пусть система (45) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ решение $\xi(\tau, y)$, $\eta(\tau, y)$ (из пространства $\mathbb{L}$ по переменной y). Тогда краевая задача (13), (14) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $u_0(t, y, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, y, \varepsilon) = \varepsilon u_1(\tau, t, x) + \varepsilon^3 u_{03}(\tau, t, x).$$

Отметим, что можно выписать явно все коэффициенты Фурье функции $u_{03}(\tau, t, x)$ из уравнения (43). Обратим внимание, что при $x = 0$ (и $x = 2\pi$) имеем равенство

$$u_0(t, 0, \varepsilon) = \varepsilon(\xi_0(\tau, t) + \eta_0(\tau, t)) + o(\varepsilon^3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим формальный ряд (42) в (13). Как оказывается, в получающейся приравниванием коэффициентов при ε^3 бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно ξ_k и η_k отсутствуют нетривиальные резонансы.

Сформулируем соответствующее утверждение.

ЛЕММА 1. Система уравнений в различных целых числах k_1, k_2, k_3

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= k, \\ \sqrt{k_1^2 + a_1} + \sqrt{k_2^2 + a_1} + \sqrt{k_3^2 + a_1} &= \sqrt{k^2 + a_1} \end{aligned} \quad (46)$$

для каждого целого k не имеет решений, а система

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= k_3 + k, \\ \sqrt{k_1^2 + a_1} + \sqrt{k_2^2 + a_1} &= \sqrt{k_3^2 + a_1} + \sqrt{k^2 + a_1} \end{aligned} \quad (47)$$

имеет только такие решения, для которых (с точностью до переобозначений) $k_1 = k_3, k_2 = k$.

Относительно системы (46) утверждение очевидно, а для обоснования соответствующего утверждения для системы (47) введем обозначения. Положим

$$k_1 + k_2 = A, \quad k_1 k_2 = B_1, \quad k_3 k = B_2. \quad (48)$$

Тогда из первого уравнения в (47), возводя в квадрат левую и правую части, получаем, что

$$k_1^2 + k_2^2 = A^2 - 2B_1, \quad k_3^2 + k^2 = A^2 - 2B_2. \quad (49)$$

Возведем в квадрат левую и правую части второго уравнения в (47). Тогда с учетом (49) получаем, что

$$f(B_1) = f(B_2), \quad (50)$$

где $f(B) = A^2 - 2B + 2a + 2\sqrt{B^2 + a(A^2 - 2B) + a^2}$. Отметим, что $f'(B) < 0$, поэтому функция $f(B)$ монотонна, а значит, согласно равенству (50) приходим к выводу, что $B_1 = B_2$. Отсюда и на основании (48) завершаем обоснование леммы.

Для завершения доказательства теоремы 4 достаточно в (45) учесть разложение в соответствующие ряды Фурье пространства $\mathbb{L}$ функций ξ и η и убедиться, что для коэффициентов Фурье ξ_k и η_k мы получаем ту же самую систему (44).

В порядке обсуждения полученных здесь результатов заметим, что условие $\xi, \eta \in \mathbb{L}$ в (45) ведет к усложнению исследования этой системы. Если бы в левых частях (44) вместо множителя $\sqrt{k^2 + a_1}$ стоял множитель k , то вместо (45) мы получили бы краевую задачу

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} &= \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - 9b(2\xi M(\xi^2) + \xi M(\eta^2) - 3(N(\xi), N(\xi)\bar{N}(\xi))), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial x} &= \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - 9b(2\eta M(\eta^2) + \eta M(\xi^2) - 3(N(\eta), N(\eta)\bar{N}(\eta))), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x).$$

Возможно, для асимптотического изучения решений системы (44) предпочтительнее использовать вместо системы (45) систему (51) с заменой $\sqrt{k^2 + a_1}$ в левых частях (44) на k только при достаточно больших значениях $|k|$. Если же номер $|k|$ нельзя считать достаточно большим, то для таких номеров (а их, очевидно, конечное число) следует использовать в качестве базовой систему (44).

2.4. Нормальная форма при $a_0 > 0$. Более интересна ситуация, когда

$$a_0 > 0. \quad (52)$$

В этом случае при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение (6) имеет пару чисто мнимых корней $\pm ia$, а значит, (5) имеет при $\varepsilon = 0$ периодические решения $\xi e^{\pm ia_0 t}$. Для построения асимптотических разложений решений (9), (10) введем, следуя методике работ [9]–[12], формальный ряд

$$y = \varepsilon[\xi(\tau, x)e^{iat} + \bar{\xi}(\tau, x)e^{-iat}] + \varepsilon^3 y_3(\tau, t, x) + \dots, \quad (53)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, а функции $y_j(\tau, t, x)$ периодичны по второму и третьему аргументам. Подставляя (53) в задачу (5), приходим к уравнению для определения $\xi(\tau, x)$

$$2ia_0 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - (a_1 + 3b|\xi|^2)\xi \quad (54)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (55)$$

Отметим, что уравнение (54) является классическим уравнением Шредингера. Решения этого уравнения дают возможность получить асимптотические по невязке решения уравнения (9) согласно формуле (53). В частности, периодическому решению в (54), (55) соответствует тор в (9), (10). Интересные результаты о поведении решений при больших временах уравнений вида (54), а также результаты об интегрируемости и существовании точного решения уравнения (54) приведены в работах [15], [17], [18].

3. БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ

Решения вида (8) формируются в основном на “невысоких” модах, т. е. на таких, которые соответствуют конечным при $\varepsilon \rightarrow 0$ значениям k из (6). В этом разделе мы рассматриваем вопрос о нерегулярных решениях (3), (4), формирующихся на асимптотически высоких (при $\varepsilon \rightarrow 0$) модах.

Зафиксируем произвольно параметр $\delta \neq 0$ и будем исследовать решения (3), (4), формирующиеся на модах с номерами

$$k = \pm(2\delta\varepsilon^{-1} + \theta + m). \quad (56)$$

Здесь величина $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ дополняет в (56) предыдущее слагаемое до целого, $m = 0, \pm 1, \dots$. При таких номерах k для корней $\lambda = \lambda_m$ в (6) имеем представление

$$\lambda_m = \pm i \left[\gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin 2\delta}{2\gamma^2(\delta)} \right) + O(\varepsilon^2) \right], \quad (57)$$

где $\gamma(\delta) = \sqrt{4 \sin^2 \delta + a_0^2}$.

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{aligned} y = & \varepsilon \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) \exp \left\{ i \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x + i\gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin 2\delta}{2\gamma^2(\delta)} + o(\varepsilon^2) \right) t \right\} + \right. \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m(\tau) \exp \left\{ i \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x - i\gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin 2\delta}{2\gamma^2(\delta)} + o(\varepsilon^2) \right) t \right\} + \overline{cc} \left. \right] + \\ & + \varepsilon^3 y_3(\tau, x, t) + \dots \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, через $\overline{cc}$ обозначаются слагаемые, комплексно сопряженные к предыдущим, а y_j периодически зависят от x и от t .

Введем обозначения. Положим

$$\xi(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) e^{imx}, \quad \eta(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m(\tau) e^{imx}.$$

Тогда формула (58) принимает вид

$$y = \varepsilon y_0(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, t, x) + \dots, \quad (59)$$

где

$$y_0(\tau, t, x) = \xi(\tau, z_+) \exp\left(i\left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta\right)x + i\gamma(\delta)\left(1 + \varepsilon\theta\gamma^{-2}(\delta)2\sin 2\delta\right)t\right) + \\ + \eta(\tau, z_-) \exp\left(i\left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta\right)x - i\gamma(\delta)\left(1 + \varepsilon\theta\gamma^{-2}(\delta)2\sin 2\delta\right)t\right) + \overline{c\overline{c}},$$

$z_{\pm} = x \pm \varepsilon\gamma^{-1}\delta t \sin 2\delta$. Подставляя выражение (59) в (3) и производя стандартные действия, для определения неизвестных амплитуд $\xi(\tau, x)$ и $\eta(\tau, x)$ получаем систему уравнений

$$L^+(\delta)\xi = -3b\xi[|\xi|^2 + 2|\eta|^2], \quad L^-(\delta)\eta = -3b\eta[2|\xi|^2 + |\eta|^2] \quad (60)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, z_+ + 2\pi) \equiv \xi(\tau, z_+), \quad \eta(\tau, z_- + 2\pi) \equiv \eta(\tau, z_-). \quad (61)$$

Здесь

$$L^{\pm}(\delta)w = \pm\left(2i\gamma(\delta)\frac{\partial w}{\partial \tau}\right) - R(\delta)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z_{\pm}^2} + 4i\theta\frac{\partial w}{\partial z_{\pm}} - 4\theta^2 w\right] - 2a_0a_1w, \\ R(\delta) = \cos 2\delta - \gamma^{-2}(\delta)\sin 2\delta.$$

Отметим, что при $a_0 = 0$ имеем $\gamma(\delta) = -2\sin \delta$ и $R(\delta) = -\sin^2 \delta$. Связь между решениями краевой задачи (60), (61) и исходной краевой задачи (3), (4) устанавливает следующее утверждение. В нем фигурирует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, которая определяется условием $\theta(\varepsilon) = \theta_0$.

ТЕОРЕМА 5. *Зафиксируем произвольно параметры δ и $\theta_0 \in [0, 1)$. Пусть $\xi(\tau, z_+)$ и $\eta(\tau, z_-)$ – решения (60), (61) при $\theta = \theta_0$, ограниченные при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$. Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_n$ краевая задача (3), (4) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $\tilde{y}(t, x, \varepsilon_n)$, для которого имеет место представление (59)*

$$\tilde{y}(t, x, \varepsilon) = \varepsilon y_0(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, t, x).$$

Напомним, что переход от исходных уравнений к уравнениям для медленно меняющихся амплитуд называют нормализацией, а сами уравнения – нормальными, а иногда – квазинормальными формами. В этом смысле семейство уравнений шредингеровского типа (60), (61), зависящее от параметров δ и θ , является квазинормальной формой.

3.1. Взаимодействующие системы быстро осциллирующих решений.

Зафиксируем произвольно номер N и различные положительные значения $\delta_1, \dots, \delta_N$. Через $\theta_j = \theta_j(\varepsilon) \in [0, 1)$ обозначим величину, дополняющую выражение $\delta_j\varepsilon^{-1}$ до целого.

Основное упрощающее предположение относительно величин δ_j состоит в том, что отсутствуют нетривиальные резонансы, т. е. системы уравнений

$$\delta_{j_1} + \delta_{j_2} \pm \delta_{j_3} = \delta_j, \quad (62)$$

$$\gamma(\delta_{j_1}) + \gamma(\delta_{j_2}) \pm \gamma(\delta_{j_3}) = \gamma(\delta_j) \quad (63)$$

могут иметь только такие решения, для которых одно из слагаемых в левой части (62) совпадает со слагаемым в правой части этого же уравнения.

Решения (3), (4) будем искать в виде формального ряда

$$y = \varepsilon \left(\sum_{j=1}^N (\xi_j(\tau, z_{j+}) \exp[i(\delta_j \varepsilon^{-1} + \theta_j)x + i\gamma(\delta_j)(1 + \varepsilon \theta_j \gamma^{-2}(\delta_j) \sin 2\delta_j)t] + \right. \\ \left. + \eta_j(\tau, z_{j-}) \exp[i(\delta_j \varepsilon^{-1} + \theta_j)x - i\gamma(\delta_j)(1 + \varepsilon \theta_j \gamma^{-2}(\delta_j) \sin 2\delta_j)t] + \overline{cc}) \right) + \\ + \varepsilon^3 y_3 + \dots, \quad (64)$$

где $z_{j\pm} = x \pm \varepsilon \gamma^{-1} t \sin 2\delta_j$. Подставим ряд (64) в формулу (3). После стандартных процедур приходим к системе краевых задач относительно неизвестных амплитуд ξ_j и η_j

$$L^+(\delta_j)\xi_j = -3b\xi_j \left(2 \sum_{k=1}^N (|\xi_k|^2 + |\eta_k|^2) - |\xi_j|^2 \right), \\ L^-(\delta_j)\eta_j = -3b\eta_j \left(2 \sum_{k=1}^N (|\xi_k|^2 + |\eta_k|^2) - |\eta_j|^2 \right)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi_j(\tau, z_{j+} + 2\pi) \equiv \xi_j(\tau, z_{j+}), \quad \eta_j(\tau, z_{j-} + 2\pi) \equiv \eta_j(\tau, z_{j-}).$$

3.2. Пространственно распределенные в двумерной области системы.

В отличие от предыдущих пунктов, здесь мы изучаем случай бесконечного множества значений δ_n , например когда $\delta_n = n\delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$. В ситуации, когда на параметр δ не накладывается никаких ограничений, получить уравнения, записанные в компактной форме, не удастся. Ниже относительно параметра δ предполагаем, что для некоторых натуральных взаимно простых чисел m_1 и m_2 и для произвольного фиксированного $\alpha > 0$ выполнено равенство $\delta = 2m_1 m_2^{-1} \pi + \varepsilon \alpha$. Будем исследовать такие решения (3), которые формируются на модах с номерами

$$k = \pm \left[\left(\frac{2m_1 \pi}{\varepsilon m_2} + \alpha + \theta \right) n + m \right], \quad n, m = 0, \pm 1, \dots, \quad (65)$$

где $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ дополняет до целого сумму двух предыдущих слагаемых в (65). Тогда для корней $\lambda(n, m)$ в (6) верно равенство

$$\lambda(n, m) = \pm i \left[\gamma \left(\frac{2m_1 \pi}{m_2} n \right) \left\{ 1 + \varepsilon [(\theta + \alpha)n + m] \sin \left(\frac{m_1 \pi}{m_2} n \right) \right\} \left\{ 2\gamma^2 \left(\frac{m_1 \pi}{m_2} n \right) \right\}^{-1} + o(\varepsilon^2) \right]. \quad (66)$$

Заметим, что каждое из значений n можно представить в виде $n = m_2 r + j$, где $r = 0, \pm 1, \dots$, $j = 1, \dots, m_2$. Поэтому выражение (66) можно так разбить на m_2 группы $\lambda_j(n, m)$, $j = 1, \dots, m_2$, что

$$\lambda(n, m) = \pm i \left[\gamma \left(\frac{2m_1 j \pi}{m_2} \right) \left(1 + \varepsilon (\theta + \alpha)(m_2 n + j + m) \sin \left(\frac{2m_1 j \pi}{m_2} \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(2\gamma^2 \left(\frac{m_1 j \pi}{m_2} \right) \right)^{-1} + o(\varepsilon^2) \right], \quad n, m = 0, \pm 1, \dots \quad (67)$$

Тогда аналогом выражений (58) и (59) являются формальные ряды

$$y = \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{m_2} \xi_j(\tau, v_{j+}, z_{j+}) \exp \left[im_2 \varepsilon v_{j+} + i\gamma \left(\frac{2m_1 j \pi}{m_2} \right) t \right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{m_2} \eta_j(\tau, v_{j-}, z_{j-}) \exp \left[im_2 \varepsilon v_{j-} - i\gamma \left(\frac{2m_1 j \pi}{m_2} \right) t \right] \right) + \varepsilon^3 y_3 + \dots \quad (68)$$

Здесь

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad v_{j\pm} = \left(\frac{2m_1 j \pi}{m_2 \varepsilon} + \theta_j \right) x \pm \varepsilon(\alpha + \theta) \left(\frac{2m_1 j \pi}{m_2} \right) t, \\ z_{j\pm} = x \pm \varepsilon \gamma^{-1} \left(\frac{2m_1 j \pi}{m_2} \right) \sin \left(\frac{4m_1 j \pi}{m_2} \right) t,$$

а функция $y_3(\tau, v, z)$, $z = (z_{1\pm}, \dots, z_{m_2\pm})$, $v = (v_{1\pm}, \dots, v_{m_2\pm})$, периодична по всем элементам $v_{j\pm}$ и $z_{j\pm}$.

Подставляя ряды (68) в (3) и производя стандартные действия, для определения неизвестных амплитуд ξ_j и η_j получаем специальные системы уравнений.

Сначала остановимся на двух наиболее простых случаях.

Пусть $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Тогда

$$k = \pm \left[\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \alpha + \theta \right) n + m \right], \quad n, m = 0, \pm 1, \dots \quad (69)$$

Здесь $v = (\pi/\varepsilon + \alpha + \theta)x$, а для y имеем асимптотическое представление

$$y = \varepsilon (\xi(\tau, v, x) e^{ia_0 t} + \bar{\xi}(\tau, v, x) e^{-ia_0 t}) + \varepsilon^3 y_3(\tau, v, x) + \dots, \quad (70)$$

причем зависимость от v и x в (70) является периодической. Для $\xi(\tau, v, x)$ приходим к краевой задаче следующего вида.

Случай 1. Для $a_0 = 0$ имеем $\tau = \varepsilon t$ и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\alpha + \theta)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \xi - a_1 \xi - b \xi^3, \quad (71)$$

$$\xi(\tau, v + 1, x) \equiv \xi(\tau, v, x) \equiv \xi(\tau, v, x + 2\pi). \quad (72)$$

Случай 2. Для $a_0 \neq 0$ имеем $\tau = \varepsilon^3 t$ и получаем двумерное уравнение Шредингера

$$ia_0 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha + \theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \xi - a_1 \xi - 3b\xi|\xi|^2 \quad (73)$$

с краевыми условиями (72).

Положим затем $m_1 = 1$, $m_2 = 4$ и пусть

$$k = \pm \left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon} + \alpha + \theta \right) (2n + 1) + m \right], \quad n, m = 0, \pm 1, \dots \quad (74)$$

В этом случае при $\tau = \varepsilon^2 t$ приходим к уравнению

$$2i\sqrt{4 + a_0^2} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha + \theta}{\pi} \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \xi - a_1 \xi - 3b\xi|\xi|^2$$

с 1-антипериодическими по v и 2π -периодическими по x краевыми условиями

$$-\xi(\tau, v+1, x) \equiv \xi(\tau, v, x) \equiv \xi(\tau, v, x+2\pi). \quad (75)$$

Функция y связана с $\xi(\tau, v, x)$ равенством

$$y = \varepsilon \left(\xi(\tau, v, x) \exp(it \sqrt{4+a_0^2}) + \bar{\xi}(\tau, v, x) \exp(-it \sqrt{4+a_0^2}) + \bar{c}c \right) + \varepsilon^3 y_3 + \dots.$$

Предположим затем, что $k = \pm((\pi/2\varepsilon + \alpha + \theta)n + m)$, $n, m = 0, \pm 1, \dots$. Тем самым при четных n мы попадаем в условие (69), а при нечетных n – в условие (74). Для простоты ограничимся здесь случаем $a_0 \neq 0$.

Для решения y имеем асимптотическое представление

$$y = \varepsilon \left((\xi_1(\tau, v, x) \exp(ita_0) + \xi_2(\tau, v, x) \exp(it \sqrt{4+a_0^2}) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 y_3 + \dots \right),$$

а для определения $\xi_j(\tau, v, x)$ приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 2ia_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha + \theta) \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \xi_1 - a_1 \xi_1 - 3b \xi_1 (|\xi_1|^2 + 2|\xi_2|^2), \\ i\sqrt{4+a_0^2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha + \theta) \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \xi_2 - a_1 \xi_2 - 3b \xi_2 (|\xi_2|^2 + 2|\xi_1|^2). \end{aligned} \quad (76)$$

Для ξ_1 и ξ_2 выполнены краевые условия (72) и (75) соответственно.

Новые интересные моменты возникают при условии $\delta \neq \pi n/2$. Для примера рассмотрим случай, когда $m_1 = 1$, $m_2 = 3$ и

$$k = \pm \left[\left(\frac{2\pi}{3\varepsilon} + \alpha + \theta \right) (3n+1) + m \right], \quad n, m = 0, \pm 1, \dots$$

Здесь

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon \left[\xi(\tau, v_+, z_+) \exp \left(i \left(\frac{2\pi}{3\varepsilon} + \alpha + \theta \right) x + \sqrt{3+a_0^2} \left(1 + \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2(3+a_0^2)} (\alpha + \theta) \right) t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta(\tau, v_-, z_-) \exp \left(i \left(\frac{2\pi}{3\varepsilon} + \alpha + \theta \right) x - \sqrt{3+a_0^2} \left(1 + \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2(3+a_0^2)} (\alpha + \theta) \right) t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{c}c \right] + \varepsilon^3 y(\tau, v, z) + \dots, \end{aligned}$$

где

$$v = \left(1 + \frac{3\varepsilon(\alpha + \theta)}{2\pi} \right) \frac{x}{\varepsilon} \pm \frac{3\sqrt{3}\varepsilon(\alpha + \theta)}{4\pi\sqrt{3+a_0^2}} t, \quad z_{\pm} = x \pm \frac{\sqrt{3}\varepsilon}{2\sqrt{3+a_0^2}} t,$$

а y периодически зависит от v и x . В итоге для $\xi(\tau, v, x)$ приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} i(3+a_0^2) \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= A \left(\frac{\alpha + \theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial v_+} + \frac{\partial}{\partial z_+} \right)^2 \xi - \frac{a_1}{3+a_0^2} \xi - 3b \xi (|\xi|^2 + 2|\eta|^2), \\ -i(3+a_0^2) \frac{\partial \eta}{\partial \tau} &= A \left(\frac{\alpha + \theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial v_-} + \frac{\partial}{\partial z_-} \right)^2 \eta - \frac{a_1}{3+a_0^2} \eta - 3b \eta (|\eta|^2 + 2|\xi|^2), \end{aligned}$$

$$\xi(\tau, v_+ + 1, z_+) \equiv \xi(\tau, v_+, z_+) \equiv \xi(\tau, v_+, z_+ + 2\pi),$$

$$\eta(\tau, v_- + 1, z_-) \equiv \eta(\tau, v_-, z_-) \equiv \eta(\tau, v_-, z_- + 2\pi).$$

Здесь $A = 8^{-1}(3+a_0^2)^{-1/2}(a_0^2(\sqrt{3}-1) + 6\sqrt{3})$.

4. ВЫВОДЫ

Рассмотрены асимптотические по невязке решения исходного дифференциального уравнения с отклонениями пространственной переменной. В различных областях из малой окрестности нулевого состояния равновесия фазового пространства построены специальные нелинейные распределенные уравнения и системы уравнений, зависящие от континуальных семейств некоторых параметров. В частности показано, что решения исходного пространственного одномерного уравнения можно описать решениями специальных уравнений и систем уравнений шредингеровского типа в пространственно двумерной области изменения аргументов.

На первый взгляд может показаться, что получившиеся нормальные формы не проще или даже сложнее исходных уравнений. Но это не так. Суть раскрывают теоремы 1–5. Они говорят о том, что главная часть решений уравнения (3) является решением именно нормализованных уравнений. Таким образом, решая исходные уравнения, приходится не только находить главные части решений, но и вычислять еще ряд довольно сложных функций. Кроме этого важно иметь в виду, что нормальные формы содержат существенно меньше по сравнению с первоначальной задачей гармоник Фурье. Все это говорит о том, что нормальные формы могут существенно помочь в изучении исходной задачи.

Отметим, что только нормальные формы из раздела 1 являются таковыми в традиционном понимании этого термина как системы уравнений для определения медленно меняющихся амплитуд. Повторные нормальные формы из п. 2.2 и нормальные формы из п. 2.3, вообще говоря, таковыми не являются, но по их решениям можно эффективно построить и медленно меняющиеся амплитуды, и сами решения исходной задачи.

Из построенных нормальных форм следуют важные выводы о взаимодействии волн, движущихся в противоположных направлениях, т. е. о влиянии переменных ξ и η друг на друга. Самое главное – это влияние является интегральным: действие одной переменной на другую определяется средним по пространственной переменной квадрата амплитуды ξ или η . Интересно отметить, что в формально близкой задаче Ферми–Паста–Улама ситуация иная. Там взаимодействие приводит лишь к сдвигу фазовых скоростей [9].

Список литературы

- [1] Я. И. Френкель, Т. А. Конторова, “К теории пластической деформации и двойникования. I”, *ЖЭТФ*, **8** (1938), 89–97; “К теории пластической деформации и двойникования. II”, 1340–1348; “К теории пластической деформации и двойникования. III”, 1349–1358.
- [2] Ч. Уэрт, Р. Томсон, *Физика твердого тела*, Мир, М., 1969.
- [3] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of Nonlinear Problems*. I, Report LA-1940, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Los Alamos, 1955.
- [4] T. Genta, A. Giorgilli, S. Paleari, T. Penati, “Packets of resonant modes in the Fermi–Pasta–Ulam system”, *Phys. Lett. A*, **376**:28–29 (2012), 2038–2044.
- [5] Н. А. Кудряшов, *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, ИКИ, М.–Ижевск, 2004.
- [6] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, “Method for solving the Korteweg–de Vries equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.
- [7] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.

- [8] N. A. Kudryashov, “From the Fermi–Pasta–Ulam model to higher-order nonlinear evolution equations”, *Rep. Math. Phys.*, **77**:1 (2016), 57–67.
- [9] Д. С. Глызин, С. А. Кащенко, А. О. Толбей, “Взаимодействие двух волн в модели Ферми–Паста–Улама”, *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:5 (2016), 548–558.
- [10] С. А. Кащенко, “Нормальная форма для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса”, *Докл. РАН*, **468**:4 (2016), 383–386.
- [11] S. A. Kaschenko, “Normalization in the systems with small diffusion”, *Internat. J. Bifur. Chaos*, **6**:6 (1996), 1093–1109.
- [12] I. S. Kaschenko, S. A. Kaschenko, “Local dynamics of the two-component singular perturbed systems of parabolic type”, *Internat. J. Bifur. Chaos*, **25**:11 (2015), 1550142, 27 pp.
- [13] С. А. Кащенко, “О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1049–1052.
- [14] И. С. Кащенко, С. А. Кащенко, “Квазинормальные формы двухкомпонентных сингулярно возмущенных систем”, *Докл. РАН*, **447**:4 (2012), 376–381.
- [15] Н. А. Кудряшов, *Методы нелинейной математической физики*, “Интеллект”, Долгопрудный, 2010.
- [16] N. A. Kudryashov, “Analytical properties of nonlinear dislocation equation”, *Appl. Math. Lett.*, **69** (2017), 29–34.
- [17] П. И. Наумкин, “Асимптотика при больших временах решений нелинейного уравнения Шрёдингера”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:4 (1997), 81–118.
- [18] П. И. Наумкин, “Диссипативное свойство кубического нелинейного уравнения Шрёдингера”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:2 (2015), 137–166.

Поступила в редакцию 19.06.2017,
после доработки 29.08.2017