Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Цзень-Ху Чан, Асимптотический анализ мультилампрешений уравнения Кадомцева–Петвиашвили-I, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 2, 209–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:17:50

© 2018 г.

Цзень-Ху Чан*

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МУЛЬТИЛАМП-РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ-I

Построены ламп-решения для уравнения Кадомцева–Петвиашвили-I с помощью определителей Грамма в духе работ Охта и Яна. Показано, что положение пиков зависит от действительных корней вронскиана системы ортогональных полиномов в некоторых частных случаях асимптотического поведения. Доказано также, что если время стремится к $-\infty$, то все пики размещены на вертикальной линии, а если время стремится к ∞ , они размещаются на горизонтальной линии, т. е. после взаимодействия наблюдается поворот на угол $\pi/2$.

Ключевые слова: определитель Грамма, ламп-решения, ортогональные полиномы, вронскиан.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9428>

1. ВВЕДЕНИЕ

Ламп-решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили-I (уравнения КП-I) представляют собой рационально убывающие решения (типа $O(1/(x^2 + y^2))$), впервые они были обнаружены в работе [1] и построены прямыми алгебраическими методами [2]–[4]. Как известно, для линеаризации уравнения КП-I с помощью метода обратной задачи рассеяния можно использовать уравнение Шредингера (см. ниже (2)). Ламп-решения (безотражательные потенциалы) формируют дискретный спектр уравнения Шредингера, а соответствующие волновые функции мероморфны по отношению к спектру; кроме того, в общем случае соответствующие волновые функции могут быть решениями интегрального уравнения типа уравнения Фредгольма [3]. Ламп-решения уравнения Дэви–Стюартсона исследовались также в работе [5]. С другой стороны, заслуживает внимания и асимптотический анализ ламп-решений. Такие решения можно считать совокупностью индивидуальных

Работа поддержана Ministry of Science and Technology (грант № 104-2115-M-606-001).

*Department of Computer Science and Information Engineering, National Defense University, Tau-Yuan, Taiwan. E-mail: jhchang@ndu.edu.tw

пиков, эволюционная динамика которых в общем случае неоднородна, а их асимптотическое поведение при $|t| \rightarrow \infty$ можно описать неким сложным способом через локализацию и структуру полюсов соответствующих мероморфных волновых функций [2], [3]. Неясно, каким образом можно описать расположение пиков таких решений в виде ламп-решений уравнения КП-I при $|t| \rightarrow \infty$.

Основным уравнением, описывающим волны на мелкой воде в $(2 + 1)$ -мерной интегрируемой модели, является уравнение КП, которое описывает волны малой амплитуды с медленными изменениями в направлении, перпендикулярном распространению волны [6]–[8]:

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x \pm \partial_x^{-1} 3u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где u – высота волны на поверхности воды, x, y – пространственные координаты, а t – время. Здесь нижний индекс означает частную производную, при этом

$$\partial_x^{-1} u(x, y, t) = \int_{-\infty}^x u(x', y, t) dx'.$$

Знак плюс в уравнении (1) соответствует уравнению КП-II, а знак минус – уравнению КП-I. Знак зависит от поверхностного натяжения волны на поверхности воды. Билинейную структуру уравнения КП можно найти в работе [9], а физическую природу и обратное преобразование рассеяния – в работе [10]. Пара Лакса для уравнения КП получена в работе [11], а построение бесконечных семейств явных решений восходит к работе Захарова и Шабата [12].

Для построения ламп-решений уравнения КП-I введем в структуру решений определители Грамма [2], [9]. Уравнение КП-I можно представить в виде условия совместности линейных уравнений

$$\begin{aligned} i\psi_y + \psi_{xx} + u\psi &= 0, \\ \psi_t + 4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + w\psi &= 0, \quad w_x = u. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения, сопряженные (2), имеют вид

$$\begin{aligned} -i\psi_y^* + \psi_{xx}^* + u\psi^* &= 0, \\ \psi_t^* + 4\psi_{xxx}^* + 6(u\psi^*)_x - w\psi^* &= 0, \quad w_x = u. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\{\psi_j, \psi_j^*\}$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$, – различные решения уравнений (2) и (3) соответственно, связанные с данным решением $u(x, y, t)$ уравнения КП-I. Тогда новое решение $\hat{u}$ определяется выражением [13]

$$\hat{u} = u + 2\partial_x^2 \ln(\det M(x, y, t)), \quad (4)$$

где $\det M(x, y, t)$ – определитель Грамма $(m \times m)$ -матрицы с элементами

$$M_{lj} = \int_{-\infty}^x \psi_l(x', y, t) \psi_j^*(x', y, t) dx', \quad l, j = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (5)$$

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 получены ламп-решения с помощью определителей Грамма и элементарных функций Шура. Асимптотическое поведение ламп-решений анализируется в разделе 3. Для некоторых частных случаев показано, что положение пиков зависит от действительных корней вронскиана системы ортогональных полиномов. Раздел 4 содержит заключительные замечания.

2. РЕШЕНИЯ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ГРАММА

В данном разделе строятся мультилам-решения (4) уравнения КП-I.

Без потери общности выберем для асимптотического анализа затравочное решение $u = w = 0$. Следуя работам [14], [15], рассмотрим решение уравнения КП-I в виде волны-убийцы. Пусть

$$\begin{aligned} \psi_l &= A_l e^{\xi_l}, & \xi_l &= p_l x + i p_l^2 y - 4 p_l^3 t, & p_1, p_2, \dots, p_m &\in \mathbb{C}, \\ \psi_j^* &= B_j e^{\eta_j}, & \eta_j &= q_j x - i q_j y - 4 q_j^3 t, & q_1, q_2, \dots, q_m &\in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (6)$$

где A_l и B_j – дифференциальные операторы вида

$$A_l = \sum_{k=0}^{n_l} c_{lk} (p_l \partial_{p_l})^{n_l - k}, \quad B_j = \sum_{s=0}^{n_j} d_{js} (q_j \partial_{q_j})^{n_j - s}, \quad (7)$$

коэффициенты c_{lk} и d_{js} – комплексные числа. Предположим, что

$$A_l e^{\xi_l} = P_l e^{\xi_l}, \quad B_j e^{\eta_j} = Q_j e^{\eta_j},$$

где $P_l(x, y, t)$ и $Q_j(x, y, t)$ являются функциями от x, y, t . Далее, интегрируя по частям, получим

$$M_{lj} = e^{\xi_l + \eta_j} \sum_{\nu=0}^{n_l + n_j} \frac{(-1)^\nu}{(p_l + q_j)^{\nu+1}} \partial_x^\nu (P_l Q_j). \quad (8)$$

Чтобы получить действительные решения u , нужно наложить следующие условия:

$$q_j = \bar{p}_j, \quad d_{lj} = \bar{c}_{lj}, \quad (9)$$

вследствие которых матрица M становится эрмитовой $M_{lj} = \overline{M}_{jl}$ и $Q_j = \bar{P}_j$.

Для нахождения функций P_l введем $S_r(x, y, t, p)$ следующим образом:

$$(p \partial_p)^r e^{\xi(p)} = S_r(x, y, t, p) e^{\xi(p)}, \quad \xi(p) = xp + ip^2 y - 4p^3 t, \quad r \geq 0. \quad (10)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (p \partial_p)^{r+1} e^{\xi(p)} &= (p \partial_p) [(p \partial_p)^r e^{\xi(p)}] = (p \partial_p) [S_r(x, y, t, p) e^{\xi(p)}] = \\ &= p [\partial_p (S_r) + f(x, y, t, p) S_r] e^{\xi(p)} = S_{r+1} e^{\xi(p)}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial \xi(p)}{\partial p} = f(x, y, t, p) = x + 2ipy - 12p^2 t. \quad (11)$$

Следовательно, получим

$$S_{r+1} = p \partial_p (S_r) + p f S_r. \quad (12)$$

Например,

$$\begin{aligned}
 S_0 &= 1, \\
 S_1 &= pf, \\
 S_2 &= pf + p^2 f_p + p^2 f^2, \\
 S_3 &= pf + 3p^2 f^2 + p^3 f^3 + 3p^2 f_p + 3fp^3 f_p + p^3 f_{pp}, \\
 S_4 &= pf + 6p^3 f_{pp} + p^4 f_{ppp} + 18p^3 f_p f + 3p^4 f_p^2 + 4p^4 f f_{pp} + 7p^2 f_p + 7p^2 f^2 + \\
 &\quad + 6p^3 f^3 + 6p^4 f^2 f_p + p^4 f^4.
 \end{aligned}$$

Теперь имеем

$$P_l = \sum_{k=0}^{n_l} c_{lk} S_{n_l-k}.$$

С другой стороны, можно выразить S_r через элементарные функции Шура следующим образом. Элементарные функции Шура H_r задаются уравнением [16]

$$\exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda^k \right] = \sum_{r=0}^{\infty} H_r(\vec{x}) \lambda^r,$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. В общем случае имеем

$$H_r(\vec{x}) = \sum_{n_1+2n_2+\dots+rn_r=r} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_r^{n_r}}{n_1! n_2! \dots n_r!}. \quad (13)$$

Например,

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 1, \quad H_1 = x_1, \quad H_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2, \quad H_3 = \frac{1}{6}x_1^3 + x_1x_2 + x_3, \\
 H_4 &= x_4 + x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2x_1^2 + \frac{1}{24}x_1^4, \\
 H_5 &= x_5 + x_1x_4 + x_3x_2 + \frac{1}{2}x_3x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2x_1 + \frac{1}{6}x_2x_1^3 + \frac{1}{120}x_1^5.
 \end{aligned}$$

Заметим следующее основное свойство H_r :

$$\frac{\partial H_r}{\partial x_s} = H_{r-s}. \quad (14)$$

Используя функциональное тождество

$$e^{\lambda p \partial_p} F(p) = F(e^{\lambda p})$$

и положив $\xi = xp + ip^2y - 4p^3t = px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 = \sum_{\mu=1}^3 p^{\mu} x_{\mu}$, получим

$$\begin{aligned}
 e^{-\xi} e^{\lambda p \partial_p} e^{\xi} &= \exp \left(\sum_{\mu=1}^3 (e^{\mu \lambda} - 1) p^{\mu} x_{\mu} \right) = \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} \sum_{\mu=1}^3 \mu^r p^{\mu} x_{\mu} \right) = \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r H_r(\vec{\chi}_r(p)), \quad (15)
 \end{aligned}$$

где $\vec{\chi}_r(p) = (\chi_1(p), \chi_2(p), \chi_3(p), \dots, \chi_r(p)) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_r)$, т. е.

$$x_n = \chi_n(p) = \frac{\sum_{\mu=1}^3 \mu^n p^\mu x_\mu}{n!} = \frac{xp + ip^2 2^n y - 4p^3 3^n t}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, r. \quad (16)$$

Сравнивая коэффициенты перед λ^r в формуле (15), получим

$$e^{-\xi} \frac{(p \partial_p)^r}{r!} e^\xi = H_r(\vec{\chi}_r(p)).$$

Следовательно,

$$S_r = r! H_r(\vec{\chi}_r(p)). \quad (17)$$

Для случая $m = 1$ в формуле (4) имеем $u = 2\partial_{xx}^2 \ln F_n$, где

$$F_n = M_{11} = \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu}{(p_1 + \bar{p}_1)^{\nu+1}} \partial_x^\nu (|P_1|^2), \quad (18)$$

и

$$P_1 = c_{10}S_n + c_{11}S_{n-1} + c_{12}S_{n-2} + \dots + c_{1n}S_0.$$

При условиях (9) матрица (5) является эрмитовой и положительно определенной. Поясним это следующим образом. Для любого ненулевого вектор-столбца $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ и его эрмитово-сопряженного вектора $\bar{\mathbf{v}}$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} M \mathbf{v} &= \sum_{l,j=1}^m \bar{v}_l M_{lj} v_j = \sum_{l,j=1}^m \bar{v}_l v_j A_l B_j \int_{-\infty}^x e^{\xi_l + \eta_j} dx = \\ &= \int_{-\infty}^x \left(\sum_{l,j=1}^m \bar{v}_l v_j A_l B_j e^{\xi_l + \eta_j} \right) dx = \int_{-\infty}^x \left| \sum_{l=1}^m \bar{v}_l A_l e^{\xi_l} \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (5) следует, что

$$M_{lj} = A_l B_j \frac{1}{p_i + q_j} e^{\xi_l + \eta_j}. \quad (20)$$

С помощью операторных соотношений

$$(p_l \partial_{p_l}) e^{\xi_l} = e^{\xi_l} (p_l \partial_{p_l} + \hat{\xi}_l), \quad (q_j \partial_{q_j}) e^{\eta_j} = e^{\eta_j} (q_j \partial_{q_j} + \hat{\eta}_j),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_l &= p_l \partial_{p_l} \xi_l = xp_l + 2ip_l^2 y - 12p_l^3 t, \\ \hat{\eta}_j &= q_j \partial_{q_j} \eta_j = xq_j - 2iq_j^2 y - 12q_j^3 t, \end{aligned}$$

получим также

$$M_{lj} = e^{\xi_l + \eta_j} \sum_{k=0}^{n_l} c_{lk} (p_l \partial_{p_l} + \hat{\xi}_l)^{n_l - k} \sum_{s=0}^{n_j} d_{js} (q_j \partial_{q_j} + \hat{\eta}_j)^{n_j - s} \frac{1}{p_l + q_j}. \quad (21)$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В этом разделе исследуется асимптотическое поведение мультилампы-решения, которое определяется по формулам (5), (8) и (9) или (21). С помощью асимптотического анализа получим ортогональные полиномы, действительные корни которых используются для определения местоположения пиков при $|t| \rightarrow \infty$. Предположим без потери общности, что $c_{10} = c_{20} = \dots = c_{n0} = 1$, поскольку в (4) мы берем логарифмическую производную. Введем операторы

$$\hat{A}_j = \sum_{k=0}^{n_j} c_{jk} (p_j \partial_{p_j} + \hat{\xi}_j)^{n_j - k}.$$

Нетрудно видеть, что

$$[\hat{A}_l, \hat{A}_j] = 0, \quad [\hat{A}_l, \bar{\hat{A}}_j] = 0, \quad [\bar{\hat{A}}_l, \bar{\hat{A}}_j] = 0, \quad l \neq j. \quad (22)$$

Из соотношений (22) и условия действительности (9) получим выражение

$$\begin{aligned} \tau(x, y, t) &:= \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^m p_j + \bar{p}_j \right) \right] \det M(x, y, t) = \\ &= \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^m p_j + \bar{p}_j \right) \right] A_1 A_2 \dots A_m \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_m \times \\ &\quad \times \frac{\prod_{1 \leq l < j \leq m} (p_l - p_j)(\bar{p}_l - \bar{p}_j)}{\prod_{l,j=1}^m (p_l + \bar{p}_j)} \exp \left(\sum_{j=1}^m p_j + \bar{p}_j \right) = \\ &= \hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_m \bar{\hat{A}}_1 \bar{\hat{A}}_2 \dots \bar{\hat{A}}_m \frac{\prod_{1 \leq l < j \leq m} (p_l - p_j)(\bar{p}_l - \bar{p}_j)}{\prod_{l,j=1}^m (p_l + \bar{p}_j)}, \end{aligned} \quad (23)$$

где используется следующее выражение для определителя Коши:

$$\det \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^m (x_i + y_j)}.$$

Например, при $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} \tau(x, y, t) &= \det \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \bar{\hat{A}}_1 \frac{1}{p_1 + \bar{p}_1} & \hat{A}_1 \bar{\hat{A}}_2 \frac{1}{p_1 + \bar{p}_2} & \hat{A}_1 \bar{\hat{A}}_3 \frac{1}{p_1 + \bar{p}_3} \\ \hat{A}_2 \bar{\hat{A}}_1 \frac{1}{p_2 + \bar{p}_1} & \hat{A}_2 \bar{\hat{A}}_2 \frac{1}{p_2 + \bar{p}_2} & \hat{A}_2 \bar{\hat{A}}_3 \frac{1}{p_2 + \bar{p}_3} \\ \hat{A}_3 \bar{\hat{A}}_1 \frac{1}{p_3 + \bar{p}_1} & \hat{A}_3 \bar{\hat{A}}_2 \frac{1}{p_3 + \bar{p}_2} & \hat{A}_3 \bar{\hat{A}}_3 \frac{1}{p_3 + \bar{p}_3} \end{pmatrix} = \\ &= \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \bar{\hat{A}}_1 \bar{\hat{A}}_2 \bar{\hat{A}}_3 \det \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1 + \bar{p}_1} & \frac{1}{p_1 + \bar{p}_2} & \frac{1}{p_1 + \bar{p}_3} \\ \frac{1}{p_2 + \bar{p}_1} & \frac{1}{p_2 + \bar{p}_2} & \frac{1}{p_2 + \bar{p}_3} \\ \frac{1}{p_3 + \bar{p}_1} & \frac{1}{p_3 + \bar{p}_2} & \frac{1}{p_3 + \bar{p}_3} \end{pmatrix} = \\ &= \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \bar{\hat{A}}_1 \bar{\hat{A}}_2 \bar{\hat{A}}_3 \frac{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(\bar{p}_1 - \bar{p}_3)(\bar{p}_2 - \bar{p}_3)}{\prod_{l,j=1}^3 (p_l + \bar{p}_j)}. \end{aligned}$$

Из (4), (8) и (17) видно, что решение $u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln \tau(x, y, t)$ можно также выразить через элементарные функции Шура (13). При $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ поведение функции $\tau(x, y, t)$ в высших порядках определяется членами, возникающими из всех дифференциальных операторов высшего порядка, а операторы $(p_1 \partial p_1)^{n_1}, (p_2 \partial p_2)^{n_2}, \dots, (p_m \partial p_m)^{n_m}$ и их комплексно-сопряженные действуют только на множитель

$$\prod_{1 \leq l < j \leq m} (p_l - p_j)(\bar{p}_l - \bar{p}_j) \exp\left(\sum_{j=1}^m p_j + \bar{p}_j\right),$$

как в случае, рассмотренном в работе [2]. Отсюда получим $\tau \approx W\bar{W}$, где

$$\begin{aligned} W &= \exp\left[-\sum_{j=1}^m p_j\right] (p_1 \partial p_1)^{n_1} (p_2 \partial p_2)^{n_2} \dots (p_m \partial p_m)^{n_m} \prod_{1 \leq l < j \leq m} (p_l - p_j) \exp\left(\sum_{j=1}^m p_j\right) = \\ &= \text{Wr}(S_{n_1}(p_1), S_{n_2}(p_2), S_{n_3}(p_3), \dots, S_{n_m}(p_m)) = \det \partial_x^{m-1}(S_{n_j}(p_j)) \end{aligned} \quad (24)$$

является вронскианом элементарных полиномов Шура степени $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$. Здесь мы использовали соотношения (10) и формулу для определителя Вандермонда. Кроме того, из (14), (16) и (17) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{n_j}}{\partial x} &= (n_j)! \left(\frac{\partial H_{n_j}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial H_{n_j}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial H_{n_j}}{\partial x_{n_j}} \frac{\partial x_{n_j}}{\partial x} \right) = \\ &= (n_j)! p \left(H_{n_j-1} + \frac{1}{2!} H_{n_j-2} + \frac{1}{3!} H_{n_j-3} + \dots + \frac{1}{(n_j)!} H_0 \right). \end{aligned}$$

Наконец, с точностью до общего постоянного множителя $p^{m(m-1)/2} (n_1)! (n_2)! \dots (n_m)!$ имеем

$$\tau \approx W\bar{W} \approx \Omega\bar{\Omega}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, t) &= \\ &= \det \begin{pmatrix} H_{n_1}(p_1) & H_{n_2}(p_2) & H_{n_3}(p_3) & \dots & H_{n_m}(p_m) \\ H_{n_1-1}(p_1) & H_{n_2-1}(p_2) & H_{n_3-1}(p_3) & \dots & H_{n_m-1}(p_m) \\ H_{n_1-2}(p_1) & H_{n_2-2}(p_2) & H_{n_3-2}(p_3) & \dots & H_{n_m-2}(p_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n_1-(m-1)}(p_1) & H_{n_2-(m-1)}(p_2) & H_{n_3-(m-1)}(p_3) & \dots & H_{n_m-(m-1)}(p_m) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Мы видим, что $\tau(x, y, t) = O(|f|^{2\rho})$, $\rho = \sum_{j=1}^m n_j - m(m-1)/2$.

Далее предположим, что $p_1 = p_2 = \dots = p_m = a + bi$. В пределе $t \rightarrow \pm\infty$ функция $u(x, y, t)$ в общем случае имеет ρ различных пиков, положение которых асимптотически задается формулами [2]

$$\begin{aligned} x^{(j)}(t) &= 12(a^2 + b^2)t + c_j |t|^q + o(|t|^q), \\ y^{(j)}(t) &= 12at + w_j |t|^q + o(|t|^q), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \rho, \quad \frac{1}{3} \leq q \leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (26)$$

где q зависит от m и $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$. Заметим, что условие $1/3 \leq q \leq 1/2$ не объясняется в работе [2], и объясним его далее. Действительные постоянные c_j и w_j

можно найти следующим образом. Подставим выражения (26) в (25) и получим

$$\Omega(x, y, t) = (M(c, w; a, b) + R(c, w; a, b)i)|t|^{\rho q} + o(|t|^{\rho q}), \quad (27)$$

где $M(c, w)$ и $R(c, w)$ – действительные полиномы по c и w . Полагая $M(c, w; a, b) = R(c, w; a, b) = 0$, получим в точности ρ (топологический заряд) действительных корней (c_j, w_j) с учетом их кратности, т. е.

$$M(c_j, w_j; a, b) = R(c_j, w_j; a, b) = 0. \quad (28)$$

Из формул (11) и (26) получим также

$$\begin{aligned} f &= (c - 2bw + 2iaw)|t|^q + o(|t|^q), \\ f_p &= -24at + 2iw|t|^q, \quad f_{pp} = -24t, \quad f_{ppp} = \dots = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Чтобы найти q , введем веса для S_n с учетом (13) следующим образом:

$$\text{weight}(f) = 1, \quad \text{weight}(f_p) = 2, \quad \text{weight}(f_{pp}) = 3, \quad \text{weight}(f_{ppp}) = 4, \quad \dots \quad (30)$$

Чтобы получить высшую степень по $|t|$ в разложении (25) с учетом (17) и (29), рассмотрим только члены $f^\alpha f_p^\beta f_{pp}^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, с высшим весом ρ . Тогда имеем

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = \rho, \quad \alpha q + \beta + \gamma = \rho q.$$

Второе из этих уравнений означает предположение о том, что эти члены имеют высшую степень по $|t|$. Так,

$$q = \frac{\beta + \gamma}{\rho - \alpha} = \frac{\beta + \gamma}{2\beta + 3\gamma}. \quad (31)$$

Нетрудно понять, что $1/3 \leq q \leq 1/2$.

Найдем условие, при котором старшая степень по $|t|$ не меняется. Предположим, что $f^{\alpha'} f_p^{\beta'} f_{pp}^{\gamma'}$ – другой член, имеющий высшую степень по $|t|$, т. е. согласно (31)

$$\frac{\beta + \gamma}{2\beta + 3\gamma} = \frac{\beta' + \gamma'}{2\beta' + 3\gamma'}.$$

Тогда после простых вычислений получим

$$\beta\gamma' = \gamma\beta', \quad \text{или} \quad \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}. \quad (32)$$

Равенство (32) представляет собой условие, налагаемое на члены со старшей степенью по $|t|$.

Теперь заметим, что каждый элементарный полином Шура H_r (13) имеет высшую степень r по переменной $x_1 = xp + 2ip^2y - 12p^3t$. В следующих вычислениях используется пакет Maple. Для простоты положим $a = 1$, $b = 0$, т. е. $p = 1$. Из (16) и (26) получим

$$\begin{aligned} x_1 &= x + 2iy - 12t = (c + 2iw)|t|^q + o(|t|^q), \\ x_2 &= \frac{x}{2} + 2yi - 18t = -12t + \left(\frac{c}{2} + 2iw\right)|t|^q + o(|t|^q). \end{aligned} \quad (33)$$

3.1. Случай $m = 1$, $n_1 = n = \rho$. Из формул (29) следует, что среди членов высшего веса в S_n члены f^n и $f^{n-2}f_p$ веса n имеют высшие степени по t , т.е. $\alpha = n-2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ в (31). Тогда $nq = (n-2)q+1$. Следовательно, $q = 1/2$. Например, в S_4 члены f_{ppp} , f_p^2 , ff_{pp} , f^2f_p , f^4 имеют высший вес, равный 4. Из формул (30) ясно, что f^4 и f^2f_p имеют высшие степени t^{4q} и t^{2q+1} . Тогда получим $q = 1/2$.

1. При $t \rightarrow -\infty$ положим $c = 0$ в выражениях (33), тогда при $t \rightarrow -\infty$ получим $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, поэтому можно использовать асимптотическое разложение (25). Подставляя (33) в полином H_r , находим

$$H_r(t) = \frac{\Gamma_r(w)}{r!} (2i)^r (-t)^{r/2} + O(|t|^{(r-1)/2}), \quad (34)$$

где $\Gamma_r(w)$ – полином по w . Чтобы найти полиномы $\Gamma_r(w)$, заметим, что из формулы (34) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{\Gamma_r(w)}{r!} (2i)^r \frac{r}{2} (-t)^{(r-2)/2} (-1) + O(|t|^{(r-3)/2}) = \\ &= \left(\frac{\partial H_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial H_r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial H_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{\Gamma_{r-1}(w)}{(r-1)!} (2i)^{r-1} 2iw (-t)^{(r-1)/2} \frac{1}{2\sqrt{-t}} + \\ &\quad + (-12) \frac{\Gamma_{r-2}(w)}{(r-2)!} (2i)^{r-2} (-t)^{(r-2)/2} + O(|t|^{(r-3)/2}). \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда после простых вычислений получим рекуррентное соотношение

$$w\Gamma_r(w) = \Gamma_{r+1}(w) + 6r\Gamma_{r-1}(w), \quad \Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = w. \quad (36)$$

Кроме того, уравнение

$$\frac{d\Gamma_r(w)}{dw} = r\Gamma_{r-1}(w) \quad (37)$$

следует из

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial w} &= \left(\frac{\partial H_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w} + \frac{\partial H_r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w} + \dots + \frac{\partial H_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial w} \right) = \\ &= (2i)^{r-1} (-t)^{(r-1)/2} \frac{\Gamma_{r-1}(w)}{(r-1)!} 2i\sqrt{-t} + O(|t|^{(r-2)/2}). \end{aligned} \quad (38)$$

Из уравнений (36) и (37) видно, что $\Gamma_r(w)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\Gamma_r(w)}{dw^2} - \frac{w}{6} \frac{d\Gamma_r(w)}{dw} + \frac{r}{6}\Gamma_r(w) = 0, \quad r \geq 0. \quad (39)$$

Рекуррентные соотношения (49) дают ортогональные полиномиальные решения $\Gamma_r(w)$ уравнения (39), имеющие r действительных корней, как доказано в работе [17]

с помощью тождества Кристоффеля–Дарбу. Приведем несколько полиномов:

$$\begin{aligned}\Gamma_0(w) &= 1, \quad \Gamma_1(w) = w, \quad \Gamma_2(w) = (w^2 - 6), \\ \Gamma_3(w) &= w^3 - 18w, \quad \Gamma_4(w) = w^4 - 36w^2 + 108, \quad \Gamma_5(w) = w^5 - 60w^3 + 540w, \\ \Gamma_6(w) &= w^6 - 90w^4 + 1620w^2 - 3240, \quad \Gamma_7(w) = w^7 - 126w^5 + 3780w^3 - 22680w, \\ \Gamma_8(w) &= w^8 - 168w^6 + 7560w^4 - 90720w^2 + 136080.\end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты в многочленах $\Gamma_r(w)$ определяются условием (32).

2. При $t \rightarrow \infty$ вычисления аналогичны. Но мы рассмотрим случай $w = 0$ в формулах (33). Подставляя (33) в полином H_r , находим

$$H_r(t) = \frac{G_r(c)}{r!} (t)^{r/2} + O(|t|^{(r-1)/2}), \quad (40)$$

где $G_r(c)$ – полином по c . Чтобы найти полиномы $G_r(c)$, будем действовать аналогично методу, использованному при выводе (35) и (38). Имеем

$$cG_r(c) = G_{r+1}(c) + 24rG_{r-1}(c), \quad G_0 = 1, \quad G_1 = c, \quad (41)$$

$$\frac{dG_r(c)}{dc} = rG_{r-1}(c). \quad (42)$$

Из уравнений (41) и (42) также следует, что $G_r(c)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 G_r(c)}{dc^2} - \frac{c}{24} \frac{dG_r(c)}{dc} + \frac{r}{24} G_r(c) = 0, \quad r \geq 0. \quad (43)$$

Кроме того, рекуррентные соотношения (41) дают ортогональные полиномиальные решения $G_r(c)$ уравнения (43), имеющие r действительных корней. Выпишем несколько полиномов:

$$\begin{aligned}G_0(c) &= 1, \quad G_1(c) = c, \quad G_2(c) = c^2 - 24, \\ G_3(c) &= c^3 - 72c, \quad G_4(c) = c^4 - 144c^2 + 1728, \quad G_5(c) = c^5 - 240c^3 + 8640c, \\ G_6(c) &= c^6 - 360c^4 + 25920c^2 - 207360, \\ G_7(c) &= c^7 - 504c^5 + 60480c^3 - 1451520c, \\ G_8(c) &= c^8 - 672c^6 + 120960c^4 - 5806080c^2 + 34836480.\end{aligned}$$

Из формул (26) следует, что все пики лежат на одной вертикальной линии при $t \rightarrow -\infty$, а при $t \rightarrow \infty$ они лежат на горизонтальной линии. Следовательно, после взаимодействия ламп-решений наблюдается поворот на угол $\pi/2$.

3.2. Случай $m = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = n$, $\rho = n$. В этом случае из (25) получаем

$$\Omega_{(1,n)}(x, y, t) = \det \begin{pmatrix} H_1(1) & H_n(1) \\ 1 & H_{n-1}(1) \end{pmatrix} = H_1(1)H_{n-1}(1) - H_n(1). \quad (44)$$

Чтобы найти q , поступим следующим образом. Обратим внимание на члены f^n и $f^{n-2}f_p$ в S_n , т. е. x_1^n и $x_1^{n-2}x_2$ в H_n . Из (13) следует, что коэффициент перед $x_1^{n-2}x_2$

в H_n равен $1/(n-2)!$; следовательно, коэффициент перед этим членом в (44) равен $1/(n-3)! - 1/(n-2)!$. Поэтому при $n = 3$ получим $q = 1/3$; в других случаях получим $nq = (n-2)q + 1$, т. е. $q = 1/2$.

При $n = 3$ и $t \rightarrow -\infty$ из (27) имеем

$$M(c, w) = \frac{1}{3}c^3 - 4cw^2 - 16, \quad R(c, w) = 2c^2w - \frac{8}{3}w^3; \quad (45)$$

если же $t \rightarrow \infty$, получим

$$M(c, w) = \frac{1}{3}c^3 - 4cw^2 + 16, \quad R(c, w) = 2c^2w - \frac{8}{3}w^3. \quad (46)$$

Простые алгебраические вычисления показывают, что оба полинома имеют три действительных корня. Следовательно, существуют три пика, один из которых находится на оси x , а остальные – на линии, перпендикулярной оси x при $|t| \rightarrow \infty$. После взаимодействия движение всплеска вдоль оси x , т. е. при $w = 0$, замедляется.

С другой стороны, в силу (33) в уравнениях (28) при $q = 1/2$ возникают действительные корни либо при $c = 0$, либо при $w = 0$, когда $t \rightarrow \pm\infty$ (см. ниже). Поэтому следует обсудить еще два случая.

1. Положим $w = 0$ в (33) при $t \rightarrow -\infty$. Тогда $x_1 = c\sqrt{-t}$ и $x_2 = -12t + (c/2)\sqrt{-t}$. При подстановке (33) в полином H_r находим

$$H_r(t) = \frac{\hat{\Gamma}_r(c)}{r!}(-t)^{r/2} + O(|t|^{(r-1)/2}), \quad (47)$$

где $\hat{\Gamma}_r(w)$ является также полиномом по c . Чтобы найти полиномы $\hat{\Gamma}_r(c)$, заметим, что из (47) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{\hat{\Gamma}_r(c)}{r!} \frac{r}{2} (-t)^{(r-2)/2} (-1) + O(|t|^{(r-3)/2}) = \\ &= \left(\frac{\partial H_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial H_r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial H_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{\hat{\Gamma}_{r-1}(c)}{(r-1)!} (-t)^{(r-1)/2} \frac{c}{2\sqrt{-t}} + (-12) \frac{\hat{\Gamma}_{r-2}(c)}{(r-2)!} (-t)^{(r-2)/2} + O(|t|^{(r-3)/2}). \end{aligned} \quad (48)$$

После простых вычислений получим рекуррентное соотношение

$$c\hat{\Gamma}_r(c) = \hat{\Gamma}_{r+1}(c) - 24r\hat{\Gamma}_{r-1}(c), \quad \Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = c. \quad (49)$$

В отличие от рекуррентного соотношения (41), соотношение (49) имеет знак минус перед вторым членом в правой части. Кроме того, уравнение

$$\frac{d\hat{\Gamma}_r(c)}{dc} = r\hat{\Gamma}_{r-1}(c) \quad (50)$$

следует из

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial c} &= \left(\frac{\partial H_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w} + \frac{\partial H_r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w} + \dots + \frac{\partial H_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial w} \right) = \\ &= (-t)^{(r-1)/2} \frac{\hat{\Gamma}_{r-1}(c)}{(r-1)!} \sqrt{-t} + O(|t|^{(r-1)/2}). \end{aligned} \quad (51)$$

Из (49) и (50) следует, что $\widehat{\Gamma}_r(c)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \widehat{\Gamma}_r(c)}{dc^2} + \frac{c}{24} \frac{d \widehat{\Gamma}_r(c)}{dc} - \frac{r}{24} \widehat{\Gamma}_r(c) = 0, \quad r \geq 0. \quad (52)$$

Решения уравнения (39) в виде ортогональных полиномов (49) также не имеют действительных корней в случае четной степени, а ноль – единственный действительный корень при нечетной степени. Выпишем несколько полиномов:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_0(c) &= 1, \quad \widehat{\Gamma}_1(c) = c, \quad \widehat{\Gamma}_2(c) = (c^2 + 24), \\ \widehat{\Gamma}_3(c) &= c^3 + 72c, \quad \widehat{\Gamma}_4(c) = c^4 + 144c^2 + 1728, \quad \widehat{\Gamma}_5(c) = c^5 + 240c^3 + 8640c, \\ \widehat{\Gamma}_6(c) &= c^6 + 360c^4 + 25920c^2 + 207360, \\ \widehat{\Gamma}_7(c) &= c^7 + 504c^5 + 60480c^3 + 1451520c, \\ \widehat{\Gamma}_8(c) &= c^8 + 672c^6 + 120960c^4 + 5806080c^2 + 34836480. \end{aligned}$$

2. При $t \rightarrow \infty$ рассмотрим случай $c = 0$ в (33). Тогда $x_1 = 2wi\sqrt{t}$ и $x_2 = -12t + 2wi\sqrt{t}$. При подстановке (33) в полином H_r находим

$$H_r(t) = \frac{\widehat{G}_r(w)}{r!} (2i)^r (t)^{r/2} + O(|t|^{(r-1)/2}), \quad (53)$$

где $\widehat{G}_r(w)$ – полином по w . Для нахождения полиномов $\widehat{G}_r(w)$ по аналогии с (48) и (51) имеем

$$w\widehat{G}_r(w) = \widehat{G}_{r+1}(w) - 6r\widehat{G}_{r-1}(w), \quad \widehat{G}_0 = 1, \quad \widehat{G}_1 = w, \quad (54)$$

$$\frac{d\widehat{G}_r(w)}{dw} = r\widehat{G}_{r-1}(w). \quad (55)$$

В отличие от рекуррентного соотношения (49), соотношение (54) имеет знак минус перед вторым членом в правой части. Из (54) и (55) следует также, что $\widehat{G}_r(w)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \widehat{G}_r(c)}{dc^2} + \frac{c}{6} \frac{d \widehat{G}_r(c)}{dc} - \frac{r}{6} \widehat{G}_r(c) = 0, \quad r \geq 0. \quad (56)$$

Решения уравнения (56) в виде ортогональных полиномов (54) также не имеют действительных корней для четной степени, а ноль – единственный действительный корень для нечетной степени. Приведем несколько полиномов:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_0(w) &= 1, \quad \widehat{G}_1(w) = w, \quad \widehat{G}_2(w) = w^2 + 6, \\ \widehat{G}_3(w) &= w^3 + 18w, \quad \widehat{G}_4(w) = w^4 + 36w^2 + 108, \quad \widehat{G}_5(w) = w^5 + 60w^3 + 540w, \\ \widehat{G}_6(w) &= w^6 + 90w^4 + 1620w^2 + 3240, \quad \widehat{G}_7(w) = w^7 + 126w^5 + 3780w^3 + 22680w, \\ \widehat{G}_8(w) &= w^8 + 168w^6 + 7560w^4 + 90720w^2 + 136080. \end{aligned}$$

Количество действительных корней вронскиана ортогональных полиномов было также исследовано в работах [18], [19]. Пусть мультииндекс $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_m)$ связан с разбиением $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$ соотношением

$$n_j = \zeta_j + j - 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m, \quad d_\zeta = p - q,$$

где p, q – количество нечетных и четных элементов в n_j соответственно. Определим длину разбиения ζ как

$$|\zeta| = \sum_{j=1}^m \zeta_j = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_m.$$

Для симметричного случая вронсиан ϕ_ζ имеет хорошо определенную четность

$$\phi_\zeta(-x) = (-1)^{|\zeta|} \phi_\zeta(x), \quad (57)$$

где $x = c$ или $x = w$. Симметрии уравнения (57) описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1 [8]. 1. Число простых действительных корней вронсиана равно

$$\sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \zeta_j - \frac{|d_\zeta + (m - 2[m/2])|}{2}.$$

2. Кратность нуля равна $d_\zeta(d_\zeta + 1)/2$.

При $m = 1$ и $n_1 = n$ имеем случаи $\Gamma_r(w)$ и $G_r(c)$. Нетрудно понять, что определитель (44) также удовлетворяет симметрии (57) при $t \rightarrow \pm\infty$ в $\Gamma_r(w)$ и $G_r(c)$.

Случай $n = 2k + 1$ ($k \geq 2$). Имеем $d_\zeta = 2$ и $(\zeta_1, \zeta_2) = (1, 2k)$. Из теоремы 1 известно, что существуют $2k - 1 - 1 = 2k - 2$ простых действительных корней, а $(0, 0)$ – тройной корень. Таким образом, имеем $2k - 2 + 3 = 2k + 1$ действительных корней для $\Gamma_r(w)$ при $t \rightarrow -\infty$ и для $G_r(c)$ при $t \rightarrow \infty$. Например, положив $n = 5$, получим при $t \rightarrow \infty$

$$\Omega_{(1,5)}(c, t) = \det \begin{pmatrix} ct + o(t) & \frac{G_5(c)}{5!} t^{5/2} + o(t^{5/2}) \\ 1 & \frac{G_4(c)}{4!} t^2 + o(t^2) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{30} c^5 - 4c^3 \right) t^{5/2} + o(t^{5/2}).$$

Уравнение $c^5/30 - 4c^3 = 0$ имеет пять действительных корней, а $c = 0$ – тройной корень.

Случай $n = 2k$ ($k \geq 1$). Имеем $d_\zeta = 0$ и $(\zeta_1, \zeta_2) = (1, 2k - 1)$. Из теоремы 1 известно, что существуют $2k - 1 - 1 - 0 = 2k - 2$ простых действительных корней, а $(0, 0)$ не является корнем. В принципе, еще два действительных корня можно получить из $\hat{\Gamma}_r(c)$ и $\hat{G}_r(w)$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Это можно объяснить так. Например, рассмотрим предел $t \rightarrow \infty$. Из (44), (55) и (53) следует

$$\begin{aligned} \Omega_{(1,2k)}(x, y, t) &= 2wit^{1/2} \frac{\hat{G}_{2k-1}(w)}{(2k-1)!} (2i)^{2k-1} t^{(2k-1)/2} - \frac{\hat{G}_{2k}(w)}{(2k)!} (2i)^{2k} t^k + \\ &\quad + O(|t|^{(2k-1)/2}) = \\ &= t^k (2i)^{2k} \frac{1}{(2k)!} (2kw \hat{G}_{2k-1}(w) - \hat{G}_{2k}(w)) + O(|t|^{(2k-1)/2}) = \\ &= t^k (2i)^{2k} \frac{1}{(2k)!} \left(w \frac{d\hat{G}_{2k}(w)}{dw} - \hat{G}_{2k}(w) \right) + O(|t|^{(2k-1)/2}). \end{aligned}$$

Из (54) получаем

$$\widehat{G}_{2k}(w) = \alpha_{2k}w^{2k} + \alpha_{2(k-1)}w^{2(k-1)} + \alpha_{2(k-2)}w^{2(k-2)} + \dots + \alpha_2w^2 + \alpha_0,$$

где $\alpha_{2k}, \alpha_{2(k-1)}, \dots, \alpha_2, \alpha_0$ – положительные целые числа. Тогда

$$w \frac{d\widehat{G}_{2k}(w)}{dw} - \widehat{G}_{2k}(w) = L(w) - \alpha_0, \quad (58)$$

где

$$L(w) = (2k-1)\alpha_{2k}w^{2k} + (2k-3)\alpha_{2(k-1)}w^{2(k-1)} + (2k-5)\alpha_{2(k-2)}w^{2(k-2)} + \dots + \alpha_2w^2.$$

Поскольку $(2k-1)\alpha_{2k}, (2k-3)\alpha_{2(k-1)}, (2k-5)\alpha_{2(k-2)}, \dots, \alpha_2$ – положительные целые числа, имеем $L(w) \geq 0$, и единственный минимум существует при $w = 0$. Известно, что при $\alpha_0 > 0$ уравнение (58) имеет только два действительных корня. Можно аналогично рассмотреть $\widehat{\Gamma}_r(c)$ при $t \rightarrow -\infty$.

Заметим теперь, что если $n_1 \neq 1$, то действительные корни уравнения (28) не появляются ни при $c = 0$, ни при $w = 0$. Возьмем в качестве примера $n_1 = 2, n_2 = 4$. Тогда $\Omega_{(2,4)}(x, y, t) = H_2H_3 - H_1H_4$ и $q = 1/2$. Рассмотрев предел $t \rightarrow \infty$ и используя формулы (33), имеем

$$\begin{aligned} M(c, w) &= \frac{1}{24}c^5 - 2c^3 - \frac{5}{3}c^3w^2 + 72c + \frac{10}{3}cw^4 + 24cw^2 = 0, \\ R(c, w) &= \frac{5}{12}c^4w - \frac{10}{3}w^3c^2 - 12c^2w + 144w + 16w^3 + \frac{4}{3}w^5 = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют $\rho = 2 + 4 - 1 = 5$ действительных корней, и некоторые действительные корни $(c, w) \neq (0, 0)$. Предел $t \rightarrow -\infty$ можно рассмотреть аналогично и получить, что некоторые действительные корни $(c, w) \neq (0, 0)$.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы изучили асимптотическое поведение ламп-решений уравнения КП-I, используя структуру определителей Грамма. В частности, для $m = 1$ и $p = 1$ показано, что положения ζ пиков можно описать действительными корнями ортогональных полиномов; кроме того, пики находятся на вертикальной линии при $t \rightarrow -\infty$, а при $t \rightarrow \infty$ они находятся на горизонтальной линии, т.е. после взаимодействия наблюдается поворот на угол $\pi/2$. Кроме того, в специальном случае $m = 2$ и $p = 1$ при $|t| \rightarrow \infty$ положения пиков зависят от действительных корней вронскиана системы ортогональных полиномов. Асимптотические структуры различны в зависимости от структуры разбиения (четная или нечетная), однако после взаимодействия также наблюдается поворот на угол $\pi/2$.

В работе [2] ламп-решения уравнения КП-I (потенциалы, убывающие по рациональному закону) рассмотрены аналогичным способом. Эти решения классифицированы по структуре полюсов соответствующих мероморфных собственных функций и по набору целых значений некоторой величины, называемой зарядом. Функции (11) и рекуррентные соотношения (12) отличаются от полученных в работе [2] ламп-решений. Особенно важным для получения ортогональных полиномов при

асимптотическом анализе является соотношение (17). Такие соотношения в работе [2] получены не были. Насколько известно автору, ортогональные полиномы подобного рода никогда не использовались в асимптотическом анализе убывающих по рациональному закону решений уравнения КП-I.

В работах [20], [21] решения уравнения КП-I в виде совокупности волн-убийц построены другим способом, на основе иерархии нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Это так называемое НУШ-КП-соответствие. Авторы выбрали соответствующие параметры такими, что в некоторый промежуточный момент времени все пики сталкиваются и образуют единственную экстремальную волну-убийцу, т. е. P_m бризера уравнения КП-I для разбиения: $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_m) = (1, 3, 5, 7, \dots, 2m - 1)$. При $|t| \rightarrow \infty$ эти $n(n+1)/2$ пиков разделены, как показано в (45) и (46) для случая $(n_1, n_2) = (1, 3)$. Как указано выше, асимптотические структуры связаны со структурами разбиения. В работе [22], с использованием различных разбиений и параметров, получены концентрические кольца, в центре которых находятся бризеры Перегринна для НУШ. С этой точки зрения наши асимптотические структуры зависят только от разбиений ζ , т. е. от показателя q в формуле (31) и действительных корней полиномов $M(c, w)$ и $R(c, w)$ в формуле (27). Исследование таких структур уравнения КП-I в сравнении с подобными структурами НУШ будет опубликовано в другой работе.

Благодарности. Автор выражает благодарность В. Б. Матвееву, Я. Охте и профессору Ц. Яну за ценные предложения. Он также выражает признательность анонимному рецензенту за важные замечания.

Список литературы

- [1] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev, "Two-dimensional solitons of the Kadomtsev–Petviashvili equation and their interaction", *Phys. Lett. A*, **63**:3 (1977), 205–206.
- [2] M. J. Ablowitz, S. Chakravarty, A. D. Trubatch, J. Villarroel, "A novel class of solutions of the non-stationary Schrödinger and the Kadomtsev–Petviashvili I equation", *Phys. Lett. A*, **267**:2–3 (2000), 132–146.
- [3] M. J. Ablowitz, J. Villarroel, "On the discrete spectrum of the nonstationary Schrödinger equation and multipole lumps of the Kadomtsev–Petviashvili I equation", *Comm. Math. Phys.*, **207**:1 (1999), 1–42.
- [4] B. G. Konopelchenko, *Introduction to Multidimensional Integrable Equations. The Inverse Spectral Transform in 2 + 1 Dimensions*, Springer, Boston, MA, 1992.
- [5] M. Mañas, P. M. Santini, "Solutions of the Davey–Stewartson II equation with arbitrary rational localization and nontrivial interaction", *Phys. Lett. A*, **227**:5–6 (1997), 325–334.
- [6] S. Chakravarty, T. Lewkow, K.-I. Maruno, "On the construction of the KP line-solitons and their interactions", *Appl. Anal.*, **89**:4 (2010), 529–545, arXiv:0911.2290.
- [7] S. Chakravarty, Y. Kodama, "Soliton solutions of the KP equation and application to shallow water waves", *Stud. Appl. Math.*, **123**:1 (2009), 83–151, arXiv:0902.4423.
- [8] Y. Kodama, "KP solitons in shallow water", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:43 (2010), 434004, 54 pp., arXiv:1004.4607.
- [9] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, **155**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [10] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

- [11] В. С. Дрюма, “Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега–де Фриза”, *Письма в ЖЭТФ*, **19**:12 (1974), 753–755.
- [12] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [13] V. B. Matveev, M. A. Salle, “On some class of new solutions of the KP equation and Johnson equation”, *Some Topics in Inverse Problems* (Montpellier, France, November 30–December 4, 1987), ed. P. C. Sabatier, World Sci., Singapore, 1988, 182–212.
- [14] Y. Ohta, J. Yang, “General high-order rogue waves and their dynamics in the nonlinear Schrödinger equation”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **468**:2142 (2012), 1716–1740.
- [15] Y. Ohta, J. K. Yang, “Rogue waves in the Davey–Stewartson I equation”, *Phys. Rev. E*, **86**:3 (2012), 036604, 8 pp.
- [16] V. B. Matveev, “Some comments on the rational solutions of the Zakharov–Schabat equations”, *Lett. Math. Phys.*, **3**:6 (1979), 503–512.
- [17] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **98**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [18] M. Á. García-Ferrero, D. Gómez-Ullate, “Oscillation theorems for the Wronskian of an arbitrary sequence of eigenfunctions of Schrödinger’s equation”, *Lett. Math. Phys.*, **105**:4 (2015), 551–573.
- [19] S. Karlin, G. Szegő, “On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials”, *J. Anal. Math.*, **8**:1 (1960), 1–157.
- [20] P. Dubard, V. B. Matveev, “Multi-rogue waves solutions of the focusing NLS equation and the KP-I equation”, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, **11** (2011), 667–672.
- [21] P. Dubard, V. B. Matveev, “Multi-rogue waves solutions: from the NLS to the KP-I equation”, *Nonlinearity*, **26**:12 (2013), R93–R125.
- [22] P. Gaillard, “Hierarchy of solutions to the NLS equation and multi-rogue waves”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **574**:1 (2015), 012031, 5 pp.

Поступила в редакцию 4.07.2017,
после доработки 5.09.2017