Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Карелин, А. М. Лазарук, Соотношение неопределенности для многомерных корреляционных функций, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 3, 427–434

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf943>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:28:13

© 1998 г.

Н. В. Карелин*, А. М. Лазарук*

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Для частично когерентных полей (смешанных состояний), задаваемых своими корреляционными функциями (матрицей плотности), найдена нижняя граница произведения неопределенности пространственной локализации волны на соответствующую неопределенность локализации ее фурье-образа в зависимости от размерности области определения. Показано, что в состоянии с минимальной неопределенностью при росте размерности пространства аргументов происходит уменьшение характерного фазового объема, приходящегося на одну моду в каноническом разложении корреляционной функции по сравнению со случаем полностью когерентного поля (чистого состояния).

Известно, что для всех процессов волновой природы имеет место ограничение на минимальную величину фазового объема, занимаемого системой. Если в качестве меры характерного фазового объема принять произведение среднеквадратичной ширины пространственного распределения волны Δx на среднеквадратичную ширину ее фурье-образа Δq , то предыдущее утверждение эквивалентно классическому принципу неопределенности. Так, для любого скалярного комплексного поля $\psi(x)$, зависящего от одной переменной и нормированного на единицу, справедливо неравенство [1, 2]

$$v_p = \Delta x \Delta q \geq \frac{1}{2}, \quad (1)$$

где

$$(\Delta x)^2 = \int dx x^2 |\psi(x)|^2, \quad (\Delta q)^2 = \int dx \left| \frac{d\psi(x)}{dx} \right|^2, \quad \int dx |\psi(x)|^2 = 1. \quad (2)$$

Здесь и далее без потери общности предполагается, что координаты “центра” волны и ее спектра приравнены нулю за счет соответствующего выбора начала отсчета в пространстве оригинала и фурье-преобразования.

Неравенство (1) очевидным образом обобщается на случай функций, зависящих от s переменных $\Psi(\mathbf{X}) = \Psi(x_1, \dots, x_s)$. Действительно, если задать величину v_p соотношением

$$v_p = (\Delta x \Delta q)^s, \quad (3)$$

*Институт физики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

где

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \frac{1}{s} \int d^s X \mathbf{X}^2 |\Psi(\mathbf{X})|^2, \\(\Delta q)^2 &= \frac{1}{s} \int d^s X |\nabla_s \Psi(\mathbf{X})|^2, \\ \int d^s X |\Psi(\mathbf{X})|^2 &= 1,\end{aligned}\tag{4}$$

то ограничение, аналогичное неравенству (1), доказывается элементарно и принимает вид

$$v_p \geq \left(\frac{1}{2}\right)^s.\tag{5}$$

Поскольку в состоянии с минимальной неопределенностью все координаты x_i полностью равноправны, определение (3) можно представить в эквивалентной форме

$$v_p = \prod_{i=1}^s \Delta x_i \Delta q_i,\tag{6}$$

и тогда видно, что многомерное соотношение неопределенности (5) фактически не несет новой информации¹⁾ по сравнению с неравенством (1). Оно просто сводится к констатации того, что минимум величины (3) достигается при минимизации неопределенности многомерного поля $\Psi(\mathbf{X})$ по каждой из координат. Естественно, что и пространственная структура оптимальной конфигурации $\Psi_{\text{опт}}(\mathbf{X})$ в данном случае с необходимостью сводится к произведению одномерных функций $\psi_{\text{опт}}(x)$, минимизирующих (1),

$$\Psi_{\text{опт}}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^s \psi_{\text{опт}}(x_i).\tag{7}$$

В работах [3–5] классический принцип неопределенности был обобщен на новый класс объектов – волновые поля, которые не могут быть охарактеризованы одним распределением $\Psi(\mathbf{X})$, а описываются своими корреляционными функциями

$$\rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \langle \Psi(\mathbf{X}_1) \Psi^*(\mathbf{X}_2) \rangle.\tag{8}$$

Такая ситуация возникает, например, в оптике при рассмотрении частично когерентных световых пучков. В квантовой механике объекты вида (8) известны как смешанные состояния, задаваемые, в отличие от чистых состояний, не волновой функцией, а матрицей плотности [6]. Угловые скобки в (8) обозначают некоторую процедуру усреднения, природа которой (среднее по времени, по ансамблю реализаций или по взаимодействию с внешней системой) для дальнейшего несущественна.

¹⁾Если, конечно, переход к высшим размерностям не сопровождается возникновением каких-либо дополнительных ограничений, например связанных с определенной симметрией по отношению к перестановкам аргументов волновой функции.

Принципиально новым в результатах работ [3–5] является то, что они не просто усиливают неравенства (1), (5), а устанавливают связь минимально допустимой величины фазового объема с еще одной характеристикой процесса – эффективным числом членов N в его каноническом разложении. Параметр N возникает как естественная мера сложности функции (8) (ее когерентности или “чистоты”) при использовании для представления величины $\rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ разложения Карунена–Лоева [7], широко применяемого в математической статистике. Согласно этому подходу любая корреляционная функция эквивалентна суперпозиции (ансамблю) некоторого минимального набора ортонормированных мод, определяемых из задачи на собственные функции для интегрального уравнения с ядром $\rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$. В оптике такая процедура известна как разложение по когерентным модам [8–10]; в квантовой механике – как переход к базису из собственных функций оператора плотности [11]. Совокупность собственных значений, соответствующих компонентам разложения Карунена–Лоева, образует убывающую последовательность (вообще говоря, бесконечную), характерное число членов которой задается формулой

$$N = \left(\int d^s X_1 \int d^s X_2 |\rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)|^2 \right)^{-1}. \quad (9)$$

Как следует из работ [3–5], модифицированный принцип неопределенности для корреляционных функций накладывает ограничение на минимально достижимую величину удельного фазового объема v_p/N , т.е. фазового объема, приходящегося на одно эффективное состояние системы.

В статьях [3–5] рассмотрение не выходит за рамки одномерного случая, соответствующего формулам (1), (2). Целью данной работы является обобщение модифицированного соотношения (1) на пространства произвольного числа измерений. Как будет видно из дальнейшего, переход к высшим размерностям в данной ситуации достаточно радикально отличается от того, что можно было бы ожидать исходя из соответствия между соотношениями (1), (2) и (3)–(5). При $s = 2, 3$ такой анализ может найти непосредственное применение в классических задачах [10], когда волновые поля задаются в обычном пространстве с размерностью не выше трех. Общий случай представляет интерес в квантовой механике, где матрица плотности зависит от координат в конфигурационном пространстве и значения s могут быть сколь угодно большими.

Таким образом, наша задача сводится к доказательству неравенства

$$\frac{v_p}{N} \geq C(s) \left(\frac{1}{2} \right)^s, \quad (10)$$

форму которого было несложно предугадать на основании всего сказанного ранее. Коэффициент $C(s)$ собственно и выражает специфику многомерности. Мы используем здесь простейший вариант доказательства (вынесенного для удобства в отдельное приложение), аналогичный доказательству статьи [4] и основанный на применении функции Вигнера системы

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int d^s X' \rho \left(\mathbf{X} + \frac{\mathbf{X}'}{2}, \mathbf{X} - \frac{\mathbf{X}'}{2} \right) \exp(-i\mathbf{X}'\mathbf{Q}),$$

подстановка которой в определения (4) и (9) дает

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{s} \int d^s X \int d^s Q \mathbf{X}^2 W(\mathbf{X}, \mathbf{Q}), \quad (\Delta q)^2 = \frac{1}{s} \int d^s X \int d^s Q \mathbf{Q}^2 W(\mathbf{X}, \mathbf{Q}),$$

$$\int d^s X \int d^s Q W(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = 1, \quad N = \left((2\pi)^s \int d^s X \int d^s Q W^2(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) \right)^{-1}.$$

Единственное дополнительное предположение, используемое в данном подходе, состоит в том, что минимум неравенства (10) ищется в классе неотрицательных функций $W(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) \geq 0$. Тем не менее общность получаемого результата от этого не страдает, и можно показать, что он является абсолютно строгим. Тогда (см. приложение) имеем

$$C(s) = \frac{2^{s+1}(s+1)!}{(s+2)^{s+1}}. \quad (11)$$

Величина $C(s)$ (коэффициент “упаковки”) представляет собой отношение удельного фазового объема, приходящегося на одну моду смешанного состояния, к минимальному фазовому объему для чистого состояния (5). Его зависимость от размерности пространства представлена на рисунке, где * – общий случай $C(s)$ (формула (11)); + – $C_{\text{кю}}(s)$ (формула (13)) для квазиоднородной функции Вигнера; × – для распределения $W_{\text{ф}}(\mathbf{X}, \mathbf{Q})$, факторизованного по отдельным координатам (формула (13а), см. ниже). Из расчета следует, что при переходе к большому числу измерений коэффициент $C(s)$ убывает значительно быстрее, чем функция²⁾ $C(1)^s$. Для асимптотически больших s выполняется соотношение

$$C(s \rightarrow \infty) \sim \left(\frac{2}{e} \right)^{s+2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s,$$

из которого, в частности, видно, что для любых натуральных s и $n > 1$ имеет место неравенство $C(ns) < (C(s))^n$. Данный эффект должен трактоваться как увеличение

²⁾Здесь $C(1) = 8/9$ в полном соответствии с результатами работ [4, 5].

плотности упаковки состояний с ростом размерности пространства аргументов корреляционной функции $\rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ и не может быть отнесен на счет каких-либо частных особенностей доказательства. Существует, конечно, некоторый произвол в выборе меры характерного числа состояний (9), однако можно показать, что указанное выше неравенство сохраняется при любом способе определения N .

В какой-то степени плотность упаковки может быть снижена за счет наложения дополнительных ограничений на возможный вид функции Вигнера. Так, если предположить квазигомогенность распределения $W(\mathbf{X}, \mathbf{Q})$ по пространству [3], т.е. считать, что

$$W_{\text{ко}}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = W_X(\mathbf{X})W_Q(\mathbf{Q}), \quad (12)$$

то форма соотношения неопределенности (10) не изменяется, однако новый коэффициент $C_{\text{ко}}(s)$ (см. приложение) возрастает по сравнению с коэффициентом (11),

$$C_{\text{ко}}(s) = \frac{2^{2s} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) s^2 (s+2)^2}{(s+4)^{s+2}} > C(s). \quad (13)$$

Наиболее жестким в этом смысле является случай полной факторизации функции Вигнера по отдельным координатам, что соответствует требованию взаимной независимости состояний системы по s различным степеням свободы

$$W_{\text{ф}}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = \prod_{i=1}^s w(x_i, q_i). \quad (13a)$$

В таких и только таких условиях модифицированное многомерное соотношение неопределенности принимает вид, аналогичный выражению (5) для чистого состояния,

$$\frac{v_p}{N} \geq \left(\frac{4}{9}\right)^s. \quad (14)$$

Исходя из одномерного случая [4, 5] доказательство неравенства (14) очевидно, причем если вместо определений (3), (4) воспользоваться определениями (1), (2) и (5), то даже нет необходимости полагать все функции $w_i(x_i, q_i)$ одинаковыми.

Соотношение (14) интересно еще и тем, что в нем явно просматривается сходство с одним из основных постулатов статистической физики – о разбиении фазового пространства системы на ячейки заданного объема, каждая из которых соответствует одному квантовому состоянию [11, 12], что в наших обозначениях запишется как

$$\frac{\tilde{v}_p}{N} = (2\pi)^s. \quad (15)$$

Соответствующие символы отмечены здесь тильдой для того, чтобы подчеркнуть различие между (14) и (15) в используемых определениях. В частности, под отдельным

состоянием в (15) понимается стационарное состояние, характеризующееся полным набором квантовых чисел, чему, вообще говоря, не обязаны удовлетворять собственные состояния оператора плотности. Тем не менее ясно, что формулы (14) и (15) выражают идентичную взаимосвязь величин одной и той же физической природы.

В заключение отметим, что избранный в данной статье способ рассмотрения оставляет открытым ряд вопросов, относящихся, в частности, к структуре состояний $\rho_{\text{опт}}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$, реализующих минимум (11), и к причинам возникновения повышенной плотности упаковки в многомерных пространствах. Кроме того, очевидно, что и сам коэффициент упаковки $C(s)$ при детальном анализе должен оказаться функцией не только s , но и N , так чтобы выполнялось условие предельного перехода от (11) к (5)³⁾

$$C(s, N = 1) = 1.$$

Все это требует привлечения несколько иного математического аппарата, сходного с использованным в работе [5], чему будет посвящено отдельное исследование.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В общем случае для доказательства неравенства (10) рассмотрим вспомогательный функционал

$$\mathcal{F} = \left[k(\Delta x)^2 + \frac{1}{k}(\Delta q)^2 \right]^s \frac{1}{N}, \quad (\text{П.1})$$

удовлетворяющий условию $\min_k \mathcal{F} = 2^s v_p / N$, где k – варьируемый положительный масштабный коэффициент. После подстановки в (П.1) величин $(\Delta x)^2$, $(\Delta q)^2$ и N , выраженных через функцию Вигнера, осуществим переход от $2s$ декартовых координат x_i и q_i к $2s$ гиперсферическим координатам [14] так, чтобы в новых переменных квадрат длины радиус-вектора $\mathbf{R}$ подчинялся соотношению

$$\mathbf{R}^2 = \frac{\omega_{2s}^2}{4s^2} \left[k \mathbf{X}^2 + \frac{1}{k} \mathbf{Q}^2 \right]^{2s},$$

здесь $\omega_{2s} = 2\pi^s / \Gamma(s)$ – площадь единичной гиперсферы размерности $2s$.

Наименьшее значение функционала (П.1) достигается для функций $W(\mathbf{R})$, обладающих сферической симметрией, что может быть доказано с помощью разложения $W(\mathbf{R})$ по гиперсферическим гармоникам [14] и достаточно ясно из физических соображений. С учетом сказанного выражение (П.1) преобразуется к виду

$$\mathcal{F} \geq \frac{2(2\pi)^s}{s^{s-1}\omega_{2s}} \left(\int_0^\infty dR \sqrt[s]{R} W(R) \right)^s \left(\int_0^\infty dR W^2(R) \right) \quad (\text{П.2})$$

с условием нормировки

$$\int_0^\infty dR W(R) = 1.$$

³⁾ В одномерном случае строгий вид зависимости $C(1, N)$ был получен в работе [13].

В свою очередь, интегральное выражение в правой части (П.2), будучи возведено в степень $1/(s+2)$, образует форму, удовлетворяющую при условии $W(R) \geq 0$ обобщенному интегральному неравенству Карлсона [15, 16]

$$\left(\int_0^\infty dR \sqrt[s]{R} W(R) \right)^{s/(s+2)} \left(\int_0^\infty dR W^2(R) \right)^{1/(s+2)} \geq c(s).$$

Подстановка сюда явного вида константы $c(s)$ из [15, 16] и последовательный возврат к выражению (П.1) завершают доказательство соотношений (10), (11).

В частном случае квазиоднородной функции Вигнера $W_{\text{ко}}(\mathbf{X}, \mathbf{Q})$ (12) доказательство строится по такой же схеме, причем непосредственно исходя из определения величины удельного фазового объема

$$\begin{aligned} \frac{v_p}{N} = & \left(\frac{2\pi}{s} \right)^s \left(\int d^s X \mathbf{X}^2 W_X(\mathbf{X}) \right)^{s/2} \left(\int d^s X W_X^2(\mathbf{X}) \right) \times \\ & \times \left(\int d^s Q \mathbf{Q}^2 W_Q(\mathbf{Q}) \right)^{s/2} \left(\int d^s Q W_Q^2(\mathbf{Q}) \right). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Правая часть (П.3) включает в себя произведение двух независимых сомножителей идентичного вида, и ее минимум достигается при одновременной минимизации каждого из них. Ясно также, что при этом функции $W_X(\mathbf{X})$ и $W_Q(\mathbf{Q})$ должны иметь одинаковую зависимость от своих аргументов. Тогда, переходя в каждом из сомножителей к гиперсферическим координатам размерности s согласно соотношениям

$$\mathbf{R}_1^2 = \frac{\omega_s^2}{s^2} \mathbf{X}^{2s}, \quad \mathbf{R}_2^2 = \frac{\omega_s^2}{s^2} \mathbf{Q}^{2s}$$

и предполагая сферическую симметрию распределения $\widetilde{W}(\mathbf{R}_{1,2})$, имеем

$$\frac{v_p}{N} \geq \frac{(2\pi)^s}{s^{s-2}\omega_s^2} \left(\int_0^\infty dR \sqrt[s]{R^2} \widetilde{W}(R) \right)^s \left(\int_0^\infty dR \widetilde{W}^2(R) \right)^2 \quad (\text{П.4})$$

с нормировкой

$$\int_0^\infty dR \widetilde{W}(R) = 1.$$

Интегральные выражения в правой части (П.4) после возведения в степень $1/(s+4)$ также подчиняются обобщенному неравенству Карлсона

$$\left(\int_0^\infty dR \sqrt[s]{R^2} \widetilde{W}(R) \right)^{s/(s+4)} \left(\int_0^\infty dR \widetilde{W}^2(R) \right)^{2/(s+4)} \geq \tilde{c}(s),$$

а условие $\widetilde{W}(R) \geq 0$ выполняется автоматически вследствие физического смысла факторизованных частей функции Вигнера. Окончательно подстановка сюда выражения для константы $\tilde{c}(s)$ из [15, 16] и возврат к (П.3) приводят нас в данном случае к неравенству (10) с коэффициентом упаковки в форме (13).

Список литературы

- [1] Г. Вейль. Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
- [2] А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971.
- [3] M. J. Bastiaans. Opt. Acta. 1981. V. 28. P. 1215.
- [4] M. J. Bastiaans. J. Opt. Soc. Amer. 1982. V. 72. P. 1441.
- [5] M. J. Bastiaans. J. Opt. Soc. Amer. 1983. V. 73. P. 251.
- [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
- [7] Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
- [8] H. Gato. Matrix treatment of coherence. In: Progress in Optics. V. 3. Ed. E. Wolf. Amsterdam: North-Holland, 1964. P. 1.
- [9] E. Wolf. J. Opt. Soc. Amer. 1982. V. 72. P. 343.
- [10] Н. В. Карелин, А. М. Лазарук. Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40. С. 903.
- [11] Р. Фейнман. Статистическая механика. М.: Мир, 1978.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Статистическая физика, ч. I. М.: Наука, 1974.
- [13] В. В. Додонов, В. И. Манько. Труды ФИАН. 1987. Т. 183. С. 5.
- [14] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [15] В. И. Левин. ДАН СССР. 1948. Т. 59. С. 635.
- [16] D. S. Mitrinović. Analytic inequalities. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

Поступила в редакцию 11.II.1998 г.,
после доработки 21.VII.1998 г.