Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Ваджахат А. Риаз, М. Хассан, Модель обобщенного магнетика Гейзенберга на решетке и ее квазидетерминантные солитонные решения, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 2, 197–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:09:45

© 2018 г.

Х. Ваджахат А. Риаз*, М. Хассан*

МОДЕЛЬ ОБОБЩЕННОГО МАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА НА РЕШЕТКЕ И ЕЕ КВАЗИДЕТЕРМИНАНТНЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрено преобразование Дарбу обобщенной решеточной (или полудискретной) модели магнетика Гейзенберга. Введены преобразования Дарбу на решениях пары Лакса и на решениях спинового эволюционного уравнения модели обобщенного магнетика Гейзенберга на решетке. Решения выражаются через квазидетерминанты. Приведено общее выражение для K -солитонного решения в терминах квазидетерминантов. С использованием свойств квазидетерминантов построены одно- и двухсолитонные решения модели обобщенного магнетика Гейзенберга на решетке.

Ключевые слова: дискретные интегрируемые системы, солитоны, преобразование Дарбу.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9437>

1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдается возрастающий интерес к изучению непрерывных и решеточных моделей магнетика Гейзенберга [1]–[22]. Модель непрерывного магнетика Гейзенберга является полностью интегрируемой системой, и спиновое эволюционное уравнение для него имеет точные решения, называемые солитонами. Эта модель несет много признаков интегрируемости, такие как наличие бесконечного числа сохраняющихся величин (локальных и нелокальных), представление Лакса и свойства Пенлеве. Солитонные решения изучались методом обратной задачи рассеяния, с помощью преобразования Беклунда, преобразования Дарбу и с использованием других методов построения решений (см., например, [1]–[3], [15]–[21]).

Как и для непрерывной модели, модель магнетика Гейзенберга на решетке сохраняет интегрируемость системы. Модель магнетика Гейзенберга на решетке предложена во многих работах (см., например, [5]–[8]). Полная интегрируемость модели

*Department of Physics, University of Punjab, Lahore, Pakistan.
E-mail: ahmed.phyy@gmail.com, mhassan.physics@pu.edu.pk

магнетика Гейзенберга на решетке проявляется в существовании пары Лакса, высших симметрий, преобразования Беклунда и обратной задачи рассеяния [2], [5]–[14].

В настоящей работе вводится квазидетерминантная матрица Дарбу, которая действует на решениях пары Лакса модели обобщенного магнетика Гейзенберга на решетке (ОМГР) и порождает солитонные решения этой модели. Получено общее выражение для K -солитонного решения в терминах квазидетерминантов. Наконец, используя свойства квазидетерминантов, мы получили явное выражение для односолитонного решения в общем $(N \times N)$ -случае и простейшем случае $N = 2$ модели ОМГР.

2. МОДЕЛЬ ОМГР

Пара Лакса для модели ОМГР [14] имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1} &= A_n \Psi_n, & A_n &= I + \lambda U_n, \\ \frac{d}{dt} \Psi_n &= B_n \Psi_n, & B_n &= \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} J_n + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} J_n U_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Psi_n \equiv \Psi_n(\lambda, t)$ – собственная $(N \times N)$ -матрица. Матричная функция $U_n \equiv U_n(t)$ также является $(N \times N)$ -матрицей, причем на нее налагаются условия $U_n^2 = I$ и $J_n U_n = U_{n-1} J_n$. Последнее условие означает $J_n A_n = A_{n-1} J_n$. Пара Лакса (1) удовлетворяет условию совместности $dA_n/dt + A_n B_n - B_{n+1} A_n = 0$ для любого собственного числа λ , если матричнозначная функция U_n удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{d}{dt} U_n = J_{n+1} - J_n. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует

$$J_{n+1}(U_{n+1} + U_n) = (U_n + U_{n-1})J_n. \quad (3)$$

Уравнение (3) удовлетворяется, если положить

$$J_n = 2iaU_{n-1}(U_n + U_{n-1})^{-1} + 2b(U_n + U_{n-1})^{-1}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), получим

$$\frac{d}{dt} U_n = \Delta_n [2iaU_{n-1}(U_n + U_{n-1})^{-1} + 2b(U_n + U_{n-1})^{-1}], \quad (4)$$

где $\Delta_n f_n = f_{n+1} - f_n$. При $N = 2$ имеем простейший (2×2) -случай, для которого матрицу U_n можно представить в виде $U_n = U_n^a \sigma_a$, где σ_a – известные матрицы Паули, а условие на матрицу U_n принимает вид $U_n^2 = I$, I – единичная (2×2) -матрица. Подставим $2(U_n + U_{n-1})^{-1} = (U_n + U_{n-1})/(1 + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{U}_{n-1})$ в (4), тогда уравнение движения в векторных обозначениях можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_n = \Delta_n \left[a \frac{\mathbf{U}_n \times \mathbf{U}_{n-1}}{1 + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{U}_{n-1}} + b \frac{\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_{n-1}}{1 + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{U}_{n-1}} \right], \quad \mathbf{U}_n^2 = 1. \quad (5)$$

В следующем разделе мы введем преобразование Дарбу на решении Ψ_n пары Лакса (1) и на решении U_n уравнения движения (2) модели ОМГР. Преобразование Дарбу является одним из важных методов построения решений нелинейных интегрируемых систем. Этот метод успешно использовался для одномерных и многомерных интегрируемых систем. Его обобщили на многие другие приложения, также получены решения интегрируемых уравнений в виде квазидетерминантов, грамммианов и вронскианов [23]–[27].

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ

Напишем новое решение $\Psi_n[1]$ для пары Лакса (1), полученное из старого решения Ψ_n с помощью $(N \times N)$ -матрицы Дарбу $D_n(\lambda) = D_n(t, \lambda)$, тем самым преобразование Дарбу на матричном решении Ψ_n задается выражением

$$\Psi_n[1] = D_n(\lambda)\Psi_n, \quad (6)$$

где $(N \times N)$ -матрицу $D_n(\lambda)$ можно определить. Ковариантность пары Лакса относительно преобразования Дарбу требует, чтобы новое решение $\Psi_n[1]$ удовлетворяло паре Лакса (1) и имело вид

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}[1] &= A_n[1]\Psi_n[1], & A_n[1] &= I + \lambda U_n[1], \\ \frac{d}{dt}\Psi_n[1] &= B_n[1]\Psi_n[1], & B_n[1] &= \frac{\lambda}{1 - \lambda^2}J_n[1] + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}J_n[1]U_n[1]. \end{aligned} \quad (7)$$

В нашем случае выберем матрицу Дарбу вида

$$D_n(\lambda) = \lambda^{-1}I - \mathcal{Q}_n, \quad (8)$$

где $\mathcal{Q}_n - (N \times N)$ -матрица, а I – тождественная $(N \times N)$ -матрица. После подстановки выражения для $\Psi_n[1]$ (6) в (7) коэффициент при λ будет преобразованием Дарбу матричных функций U_n и J_n :

$$U_n[1] = U_n - (\mathcal{Q}_{n+1} - \mathcal{Q}_n), \quad J_n[1] = J_n - \frac{d}{dt}\mathcal{Q}_n, \quad (9)$$

а матрица $\mathcal{Q}_n$ должна удовлетворять уравнениям

$$(\mathcal{Q}_{n+1} - \mathcal{Q}_n)\mathcal{Q}_n = U_n\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}_{n+1}U_n, \quad (10)$$

$$\frac{d\mathcal{Q}_n}{dt}(I - \mathcal{Q}_n^2) = [\mathcal{Q}_n, J_n(\mathcal{Q}_n + U_n)]. \quad (11)$$

Найдем теперь явное выражение для матрицы $\mathcal{Q}_n$, которая одновременно удовлетворяет уравнениям (10), (11). Явное выражение можно получить в терминах частных векторных решений пары Лакса модели ОМГР. Заметим, что указанная в работе [14] дискретизация и полученное в результате преобразование Беклунда можно вывести из системы (8), (9), исключив из нее волновые функции.

Возьмем N различных параметров (действительных или комплексных) λ_i ($\lambda_i \neq \lambda_j$), $i = 1, 2, \dots, N$, $j = i + 1, i + 2, \dots, i + N$. Для каждого значения λ_i определим N

независимых собственных векторов – решений $\Psi_n(\lambda_i)|e_i\rangle$ пары Лакса (1) – и по этим собственным векторам построим обратимые $(N \times N)$ -матрицы $\mathcal{H}_n$ вида

$$\mathcal{H}_n = (\Psi_n(\lambda_1)|e_1\rangle, \dots, \Psi_n(\lambda_N)|e_N\rangle) = (|h_1\rangle_n, \dots, |h_N\rangle_n). \quad (12)$$

В этом случае каждый собственный вектор $|h_i\rangle_n = \Psi_n(\lambda_i)|e_i\rangle$ матрицы $\mathcal{H}_n$ является решением (столбцом) пары Лакса (1), т. е.

$$\begin{aligned} |h_i\rangle_{n+1} &= |h_i\rangle_n + \lambda_i U_n |h_i\rangle_n, \\ \frac{d}{dt} |h_i\rangle_n &= \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i^2} J_n |h_i\rangle_n + \frac{\lambda_i^2}{1 - \lambda_i^2} J_n U_{n,i} |h_i\rangle_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Частное матричное решение $\mathcal{H}_n$ удовлетворяет паре Лакса. Возьмем обратимую $(N \times N)$ -матрицу Λ с собственными числами λ_i на диагонали $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ и представим пару Лакса (13) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n+1} &= \mathcal{H}_n + U_n \mathcal{H}_n \Lambda, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{H}_n &= J_n \mathcal{H}_n \Lambda (I - \Lambda^2)^{-1} + J_n U_n \mathcal{H}_n \Lambda^2 (I - \Lambda^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mathcal{H}_n$ – частное матричное решение пары Лакса (1). Введем матрицу $\mathcal{Q}_n$ с помощью частного матричного решения $\mathcal{H}_n$, а именно $\mathcal{Q}_n = \mathcal{H}_n \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1}$. Покажем теперь, что матрица $\mathcal{Q}_n$ удовлетворяет системе уравнений (10), (11). Чтобы проверить уравнение (10), применим разностный оператор Δ_n сдвига вперед к матрице $\mathcal{Q}_n$ и проведем вычисления:

$$\begin{aligned} (\Delta_n \mathcal{Q}_n) \mathcal{Q}_n &= (\mathcal{Q}_{n+1} - \mathcal{Q}_n) \mathcal{Q}_n = \\ &= (\mathcal{H}_{n+1} \Lambda^{-1} \mathcal{H}_{n+1}^{-1} - \mathcal{H}_n \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1}) \mathcal{H}_n \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} = \\ &= \mathcal{H}_{n+1} \Lambda^{-1} \mathcal{H}_{n+1}^{-1} \mathcal{H}_n \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} - \mathcal{H}_n \Lambda^{-2} \mathcal{H}_n^{-1} + \mathcal{H}_{n+1} \Lambda^{-2} \mathcal{H}_n^{-1} - \mathcal{H}_{n+1} \Lambda^{-2} \mathcal{H}_n^{-1} = \\ &= (\mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n) \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} \mathcal{H}_n \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} - \mathcal{H}_{n+1} \Lambda^{-1} \mathcal{H}_{n+1}^{-1} (\mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n) \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} = \\ &= U_n \mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}_{n+1} U_n, \end{aligned} \quad (15)$$

что совпадает с уравнением (10). Чтобы проверить уравнение (11), подействуем оператором d/dt на матрицу $\mathcal{Q}_n$ и проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Q}_n}{dt} (I - \mathcal{Q}_n^2) &= \left(\frac{d}{dt} \mathcal{H}_n \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} \right) (I - \mathcal{H}_n \Lambda^{-2} \mathcal{H}_n^{-1}) = \\ &= \frac{d\mathcal{H}_n}{dt} \Lambda^{-1} (I - \Lambda^{-2}) \mathcal{H}_n^{-1} - \mathcal{H}_n \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} \frac{d\mathcal{H}_n}{dt} (I - \Lambda^{-2}) \mathcal{H}_n^{-1} = \\ &= [J_n \mathcal{H}_n \Lambda (I - \Lambda^2)^{-1} + J_n U_n \mathcal{H}_n \Lambda^2 (I - \Lambda^2)^{-1}] \Lambda^{-1} (I - \Lambda^{-2}) \mathcal{H}_n^{-1} - \\ &\quad - \mathcal{H}_n \Lambda^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} [J_n \mathcal{H}_n \Lambda (I - \Lambda^2)^{-1} + J_n U_n \mathcal{H}_n \Lambda^2 (I - \Lambda^2)^{-1}] (I - \Lambda^{-2}) \mathcal{H}_n^{-1} = \\ &= [\mathcal{Q}_n, J_n (\mathcal{Q}_n + U_n)], \end{aligned} \quad (16)$$

и получим, таким образом, уравнение (11). Поэтому преобразование Дарбу на матричном решении Ψ_n пары Лакса (1) и на матричном решении U_n уравнения (4)

можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Psi_n[1] &= (\lambda^{-1}I - \mathcal{H}_n\Lambda^{-1}\mathcal{H}_n^{-1})\Psi_n, \\ U_n[1] &= U_n - (\mathcal{H}_{n+1}\Lambda^{-1}\mathcal{H}_{n+1}^{-1} - \mathcal{H}_n\Lambda^{-1}\mathcal{H}_n^{-1}) = \\ &= \mathcal{H}_{n+1}\Lambda^{-1}\mathcal{H}_{n+1}^{-1}U_n\mathcal{H}_n\Lambda^{-1}\mathcal{H}_n^{-1}.\end{aligned}\quad (17)$$

На этом этапе можно утверждать, что если (Ψ_n, U_n) являются решениями пары Лакса (1) и (4), то $(\Psi_n[1], U_n[1])$ также являются решениями того же уравнения, они получаются действием матрицы Дарбу $D_n(\lambda)$ на (Ψ_n, U_n) . Преобразование Дарбу (17) сохраняет систему (2), (3), а также оно совместно с редукцией (4). Аналогично, применяя матрицу Дарбу K раз к (Ψ_n, U_n) , мы получим $(\Psi_n[K], U_n[K])$, т. е. K -солитонное решение модели ОМГР.

Можно заметить, что матрица Дарбу–Беклунда, построенная из N собственных векторов, факторизуется на элементарные преобразования Дарбу. В стандартном преобразовании Дарбу мы имеем дело с матричным решением пары Лакса, а в элементарном преобразовании Дарбу – с векторным решением пары Лакса.

4. КВАЗИДЕТЕРМИНАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Если матрица $\mathcal{H}_n$ обратима, то матрицу Дарбу можно выразить через квазидетерминанты. Подробности использования и свойства квазидетерминантов содержатся в работах [28]–[30]. Однократное преобразование Дарбу на матричном решении Ψ_n пары Лакса (1) имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi_n[1] &\equiv D_n(\lambda; t)\Psi_n = (\lambda^{-1}I - \mathcal{H}_n\Lambda^{-1}\mathcal{H}_n^{-1})\Psi_n = \\ &= \begin{vmatrix} \mathcal{H}_n & \Psi_n \\ \mathcal{H}_n\Lambda^{-1} & \boxed{\lambda^{-1}\Psi_n} \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (18)$$

Однократное преобразование Дарбу на матрице U_n можно представить в виде

$$\begin{aligned}U_n[1] &= U_n - (\mathcal{Q}_{n+1} - \mathcal{Q}_n) = \mathcal{Q}_{n+1}U_n\mathcal{Q}_n^{-1} = \\ &= \mathcal{H}_{n+1}\Lambda^{-1}\mathcal{H}_{n+1}^{-1}U_n\mathcal{H}_n\Lambda^{-1}\mathcal{H}_n^{-1} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathcal{H}_{n+1} & I \\ \mathcal{H}_{n+1}\Lambda^{-1} & \boxed{O} \end{vmatrix} U_n \begin{vmatrix} \mathcal{H}_n & I \\ \mathcal{H}_n\Lambda^{-1} & \boxed{O} \end{vmatrix}^{-1},\end{aligned}\quad (19)$$

где O – нулевая $(N \times N)$ -матрица. Полученные результаты (18), (19) можно расширить и обобщить на K -кратное преобразование Дарбу. Чтобы найти K -кратное преобразование Дарбу, введем частные матричные решения $\mathcal{H}_{n,k}$ для пары Лакса, соответствующие $\Lambda = \Lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, K$. Примененное K раз преобразование Дарбу порождает матричное решение $\Psi_n[K]$ для пары Лакса (1) и может быть представлено в виде квазидетерминанта:

$$\Psi_n[K] = \begin{vmatrix} \mathcal{H}_{n,1} & \mathcal{H}_{n,2} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K} & \Psi_n \\ \mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-1} & \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-1} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-1} & \lambda^{-1}\Psi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-(K-1)} & \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-(K-1)} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-(K-1)} & \lambda^{-(K-1)}\Psi_n \\ \mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-K} & \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-K} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-K} & \boxed{\lambda^{-K}\Psi_n} \end{vmatrix}.\quad (20)$$

Аналогичное квазидетерминантное представление $U_n[K]$ имеет вид

$$U_n[K] = \begin{vmatrix} \mathcal{H}_{n+1,1} & \mathcal{H}_{n+1,2} & \cdots & \mathcal{H}_{n+1,K} & I \\ \mathcal{H}_{n+1,1}\Lambda_1^{-1} & \mathcal{H}_{n+1,2}\Lambda_2^{-1} & \cdots & \mathcal{H}_{n+1,K}\Lambda_K^{-1} & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{H}_{n+1,1}\Lambda_1^{-(K-1)} & \mathcal{H}_{n+1,2}\Lambda_2^{-(K-1)} & \cdots & \mathcal{H}_{n+1,K}\Lambda_K^{-(K-1)} & O \\ \mathcal{H}_{n+1,1}\Lambda_1^{-K} & \mathcal{H}_{n+1,2}\Lambda_2^{-K} & \cdots & \mathcal{H}_{n+1,K}\Lambda_K^{-K} & \boxed{O} \end{vmatrix} \times \\ \times U_n \begin{vmatrix} \mathcal{H}_{n,1} & \mathcal{H}_{n,2} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K} & I \\ \mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-1} & \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-1} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-1} & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-(K-1)} & \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-(K-1)} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-(K-1)} & O \\ \mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-K} & \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-K} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-K} & \boxed{O} \end{vmatrix}^{-1}. \quad (21)$$

Выражения (20) и (21) представляют собой соответственно квазидетерминантное решение $\Psi_n[K]$ пары Лакса и квазидетерминантное решение $U_n[K]$ модели ОМГР. Полученные результаты легко доказать методом индукции.

5. ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ

В настоящем разделе получено солитонное решение из затравочного (тривиального) решения с помощью решения пары Лакса модели ОМГР. Для этого перепишем матрицу $\mathcal{Q}_n^{(K)}$ из (21) в следующем более удобном виде:

$$\mathcal{Q}_n^{(K)} = \begin{vmatrix} \mathcal{H}_n & \mathcal{I}^{(K)} \\ \tilde{\mathcal{H}}_n & \boxed{O} \end{vmatrix}, \quad (22)$$

где $\mathcal{I}^{(K)}$, $\tilde{\mathcal{H}}_n$ и $\mathcal{H}_n$ – матрицы размера $(NK \times N)$, $(N \times NK)$ и $(NK \times NK)$ соответственно. Эти матрицы имеют вид

$$\mathcal{I}^{(K)} = (I \quad O \quad \cdots \quad O)^T, \\ \tilde{\mathcal{H}}_n = (\mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-K} \quad \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-K} \quad \cdots \quad \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-K}), \\ \mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{n,1} & \mathcal{H}_{n,2} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K} \\ \mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-1} & \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-1} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{H}_{n,1}\Lambda_1^{-(K-1)} & \mathcal{H}_{n,2}\Lambda_2^{-(K-1)} & \cdots & \mathcal{H}_{n,K}\Lambda_K^{-(K-1)} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Элементы матрицы $\mathcal{Q}_n^{(K)}$ можно представить в виде

$$\mathcal{Q}_{n,ij}^{(K)} = \left(\begin{vmatrix} \mathcal{H}_n & \mathcal{I}^{(K)} \\ \tilde{\mathcal{H}}_n & \boxed{O} \end{vmatrix} \right)_{ij} = \begin{vmatrix} \mathcal{H}_n & \mathcal{I}_j^{(K)} \\ (\tilde{\mathcal{H}}_n)_i & \boxed{0} \end{vmatrix} = \\ = (-1)^{i+j} \frac{\det(\mathcal{H}_n)_{ij}}{\det(\mathcal{H}_n)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, K, \quad (24)$$

где $(\tilde{\mathcal{H}}_n)_i$, $\mathcal{I}_j^{(K)}$ являются i -й строкой и j -м столбцом матриц $\tilde{\mathcal{H}}_n$, $\mathcal{I}^{(K)}$ соответственно. Общую формулу (24) можно использовать для явного построения систем,

имеющих матричные пары Лакса различных размерностей. В простейшем случае $N = 2$ матрица $\mathcal{Q}_n^{(K)}$ имеет следующее представление:

$$\mathcal{Q}_n^{(K)} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{n,11}^{(K)} & \mathcal{Q}_{n,12}^{(K)} \\ \mathcal{Q}_{n,21}^{(K)} & \mathcal{Q}_{n,22}^{(K)} \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_n & \mathcal{I}^{(K)} \\ \tilde{\mathcal{H}}_n & \boxed{O_2} \end{array} \right|, \quad (25)$$

а ее элементы имеют вид

$$\mathcal{Q}_{n,ij}^{(K)} = \left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_n & \mathcal{I}_j^{(K)} \\ (\tilde{\mathcal{H}}_n)_i & \boxed{0} \end{array} \right| = (-1)^{i+j} \frac{\det(\mathcal{H}_n)_{ij}}{\det(\mathcal{H}_n)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (26)$$

Для односолитонного решения ($K = 1$) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(1)} &= I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{H}_{n,1} &= \begin{pmatrix} h_{n,11}^{(1)} & h_{n,12}^{(2)} \\ h_{n,21}^{(1)} & h_{n,22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \bar{\eta}_1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{H}}_n &= \mathcal{H}_{n,1} \Lambda_1^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} h_{n,11}^{(1)} & h_{n,12}^{(2)} \\ h_{n,21}^{(1)} & h_{n,22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{\eta}_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^{-1} h_{n,11}^{(1)} & \bar{\eta}_1^{-1} h_{n,12}^{(2)} \\ \eta_1^{-1} h_{n,21}^{(1)} & \bar{\eta}_1^{-1} h_{n,22}^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим матричный элемент $\mathcal{Q}_{n,12}^{(1)}$ матрицы $\mathcal{Q}_n^{(1)}$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{n,12}^{(1)} &= \left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_n & \mathcal{I}_2^{(1)} \\ (\tilde{\mathcal{H}}_n)_1 & \boxed{O_2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} h_{n,11}^{(1)} & h_{n,12}^{(2)} & 0 \\ h_{n,21}^{(1)} & h_{n,22}^{(2)} & 1 \\ \eta_1^{-1} h_{n,11}^{(1)} & \bar{\eta}_1^{-1} h_{n,12}^{(2)} & \boxed{0} \end{array} \right| = \\ &= (-1)^{1+2} \frac{\det \begin{pmatrix} h_{n,11}^{(1)} & h_{n,12}^{(2)} \\ \eta_1^{-1} h_{n,11}^{(1)} & \bar{\eta}_1^{-1} h_{n,12}^{(2)} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} h_{n,11}^{(1)} & h_{n,12}^{(2)} \\ h_{n,21}^{(1)} & h_{n,22}^{(2)} \end{pmatrix}} = \frac{(\eta_1^{-1} - \bar{\eta}_1^{-1}) h_{n,11}^{(1)} h_{n,12}^{(2)}}{h_{n,11}^{(1)} h_{n,22}^{(2)} - h_{n,12}^{(2)} h_{n,21}^{(1)}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Точно так же получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{n,21}^{(1)} &= \left| \begin{array}{cc} \mathcal{H}_n & \mathcal{I}_1^{(1)} \\ (\tilde{\mathcal{H}}_n)_2 & \boxed{O_2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} h_{n,11}^{(1)} & h_{n,12}^{(2)} & 1 \\ h_{n,21}^{(1)} & h_{n,22}^{(2)} & 0 \\ \eta_1^{-1} h_{n,21}^{(1)} & \bar{\eta}_1^{-1} h_{n,22}^{(2)} & \boxed{0} \end{array} \right| = \\ &= (-1)^{2+1} \frac{\det \begin{pmatrix} \eta_1^{-1} h_{n,21}^{(1)} & \bar{\eta}_1^{-1} h_{n,22}^{(2)} \\ h_{n,21}^{(1)} & h_{n,22}^{(2)} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} h_{n,11}^{(1)} & h_{n,12}^{(2)} \\ h_{n,21}^{(1)} & h_{n,22}^{(2)} \end{pmatrix}} = - \frac{(\eta_1^{-1} - \bar{\eta}_1^{-1}) h_{n,21}^{(1)} h_{n,22}^{(2)}}{h_{n,11}^{(1)} h_{n,22}^{(2)} - h_{n,12}^{(2)} h_{n,21}^{(1)}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{n,11}^{(1)} &= \frac{\eta_1^{-1} h_{n,11}^{(1)} h_{n,22}^{(2)} + \bar{\eta}_1^{-1} h_{n,12}^{(2)} h_{n,21}^{(1)}}{h_{n,11}^{(1)} h_{n,22}^{(2)} - h_{n,12}^{(2)} h_{n,21}^{(1)}}, \\ \mathcal{Q}_{n,22}^{(1)} &= -\frac{\eta_1^{-1} h_{n,11}^{(1)} h_{n,22}^{(2)} + \bar{\eta}_1^{-1} h_{n,12}^{(2)} h_{n,21}^{(1)}}{h_{n,11}^{(1)} h_{n,22}^{(2)} - h_{n,12}^{(2)} h_{n,21}^{(1)}}.\end{aligned}\quad (30)$$

Чтобы получить явное выражение для солитонного решения в общем $(N \times N)$ -матричном случае, возьмем затравочное решение вида

$$U_0 \equiv U_n = i \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_N \end{pmatrix}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad (31)$$

где c_i – действительные постоянные, причем $\text{Tr } U_n = 0$. Тогда простое вычисление приводит к матричному решению Ψ_n пары Лакса (1) в следующем виде:

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \Xi_n(\lambda)_p & O \\ O & \Xi_n(\lambda)_{N-p} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где

$$\Xi_n(\lambda)_p = \begin{pmatrix} \xi_n(\lambda)_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_n(\lambda)_p \end{pmatrix}, \quad \Xi_n(\lambda)_{N-p} = \begin{pmatrix} \xi_n(\lambda)_{p+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_n(\lambda)_N \end{pmatrix}$$

– соответственно $(p \times p)$ - и $(N-p) \times (N-p)$ -матрицы. Здесь нижний индекс n является дискретным индексом и

$$\xi(\lambda) = (1 + ic_i \lambda)^n \exp \left[\frac{-ic_i^{-1} \lambda}{1 - \lambda^2} + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} \right] t. \quad (33)$$

В случае $N = 2$ возьмем затравочное решение вида

$$U_0 \equiv U_n = i \begin{pmatrix} c & \\ & -c \end{pmatrix}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad (34)$$

тогда простые расчеты приводят к следующему матричному решению Ψ_n пары Лакса (1):

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \xi_n(\lambda) & \\ & \bar{\xi}_n(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где

$$\xi_n(\lambda) = (1 + ic\lambda)^n \exp \left[\frac{-ic^{-1} \lambda}{1 - \lambda^2} + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} \right] t. \quad (36)$$

(2×2) -Матричное решение $\mathcal{H}_n$ при $\Lambda = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \bar{\eta} \end{pmatrix}$ имеет вид

$$\mathcal{H}_n = (\Psi_n(\eta)|1\rangle, \Psi_n(\bar{\eta})|2\rangle) = \begin{pmatrix} \xi(\eta) & -\xi(\bar{\eta}) \\ \bar{\xi}(\eta) & \bar{\xi}(\bar{\eta}) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Рис. 1. Полудискретное односолитонное решение U_n^+ ; трехмерное представление (а) и двумерное представление (б) для численных значений $c = -6$, $\eta = -0.029i$.

Подставляя матрицу $\mathcal{H}_n$ в уравнение (25), получим искомое выражение для матрицы $\mathcal{Q}_n^{(1)}$:

$$\mathcal{Q}_n^{(1)} = \frac{1}{X_n^+ + X_n^-} \begin{pmatrix} \eta^{-1} X_n^+ + \bar{\eta}^{-1} X_n^- & -(\eta^{-1} - \bar{\eta}^{-1}) Y_n^+ \\ -(\eta^{-1} - \bar{\eta}^{-1}) Y_n^+ & -\eta^{-1} X_n^+ - \bar{\eta}^{-1} X_n^- \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} X_n^{(\pm)} &= (1 \pm ic\eta)^n (1 \mp ic\bar{\eta})^n \exp \left[\mp ic^{-1} \left(\frac{\eta}{1 - \eta^2} - \frac{\bar{\eta}}{1 - \bar{\eta}^2} \right) t \right], \\ Y_n^+ &= (1 \pm ic\eta)^n (1 \pm ic\bar{\eta})^n \exp \left[\mp ic^{-1} \left(\frac{\eta}{1 - \eta^2} + \frac{\bar{\eta}}{1 - \bar{\eta}^2} \right) t \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

При этом соответствующая матрица Дарбу имеет вид

$$\begin{aligned} D_n(\lambda) &= \lambda^{-1} I - \mathcal{H}_n^{(1)} = \\ &= \frac{1}{X_n^+ + X_n^-} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} (X_n^+ + X_n^-) - & (\eta^{-1} - \bar{\eta}^{-1}) Y_n^+ \\ -(\eta^{-1} X_n^+ + \bar{\eta}^{-1} X_n^-) & \lambda^{-1} (X_n^+ + X_n^-) + \\ (\eta^{-1} - \bar{\eta}^{-1}) Y_n^+ & +(\eta^{-1} X_n^+ + \bar{\eta}^{-1} X_n^-) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Подставляя (38) в (19), получаем в явном виде односолитонное решение

$$U_n[1] = \begin{pmatrix} U_n^+ & U_n^- \\ U_n^- & -U_n^+ \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} U_n^+ &= ic - (\eta^{-1} - \bar{\eta}^{-1}) \frac{(X_{n+1}^+ X_n^- - X_{n+1}^- X_n^+)}{(X_{n+1}^+ + X_{n+1}^-)(X_n^+ + X_n^-)}, \\ U_n^- &= (\eta^{-1} - \bar{\eta}^{-1}) \frac{Y_{n+1}^+(X_n^+ + X_n^-) - Y_n^+(X_{n+1}^+ + X_{n+1}^-)}{(X_{n+1}^+ + X_{n+1}^-)(X_n^+ + X_n^-)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Решения приведены на рис. 1, 2.

Рис. 2. Полудискретное односолитонное решение U_n^- ; трехмерное представление (а) и двумерное представление (б) для численных значений $c = -6$, $\eta = 0.049i$.

Рис. 3. Полудискретное двухсолитонное решение U_n^+ ; рассеяние (а) происходит при $c = 0.6$, $\eta_1 = 0.8i$, $\eta_2 = -1.1i$, а столкновение (б) – при $c = 0.6$, $\eta_1 = -0.8i$, $\eta_2 = -1.1i$.

Скалярные функции $X_n^\pm$, $Y_n^\pm$ представлены выражениями (39). Исходя из двух наборов частных матричных решений $\mathcal{H}_{n,1}$ при $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \bar{\eta}_1 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{H}_{n,2}$ при $\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \eta_2 & 0 \\ 0 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix}$ можно получить двухсолитонное решение с помощью формулы (21). Двухсолитонные решения приведены на рис. 3, 4.

Аналогично с помощью преобразования Дарбу можно найти явные выражения для многосолитонных решений модели ОМГР.

Рис. 4. Полудискретное двухсолитонное решение U_n^- ; рассеяние (а) происходит при $c = -0.8$, $\eta_1 = 0.9i$, $\eta_2 = -0.5i$, а столкновение (б) – при $c = -0.8$, $\eta_1 = -0.9i$, $\eta_2 = -0.5i$.

6. ВЫВОДЫ

В настоящей работе с помощью преобразования Дарбу изучаются квазидетерминантные многосолитонные решения модели ОМГР. Получено преобразование Дарбу на решениях пары Лакса. Затем решения выражены через квазидетерминанты. Наконец, в явном виде выведены многосолитонные решения для простого случая. Путем разложения квазидетерминантов получены также выражения для односолитонного решения. Приведены графические изображения одно- и двухсолитонных решений для полудискретной модели. Модель ОМГР для полностью дискретного случая будет рассмотрена в отдельной работе.

Список литературы

- [1] L. A. Takhtajan, “Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method”, *Phys. Lett. A*, **64**:2 (1977), 235–237.
- [2] Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [3] S. J. Orfanidis, “SU(n) Heisenberg spin chain”, *Phys. Lett. A*, **75**:4 (1980), 304–306.
- [4] J. Honerkamp, “Gauge equivalence of exactly integrable field theoretic models”, *J. Math. Phys.*, **22**:2 (1981), 277–281.
- [5] L. D. Faddeev, “Integrable models in (1 + 1)-dimensional quantum field theory”, *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics* (Les Houches, August 2–September 10, 1982), eds. J.-B. Zuber, R. Stora, North-Holland, Amsterdam, 1984, 561–608.
- [6] Е. К. Склинин, “О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 27–34.
- [7] Y. Ishimori, “An integrable classical spin chain”, *J. Phys. Soc. Japan*, **51**:11 (1982), 3417–3418.
- [8] F. D. M. Haldane, “Excitation spectrum of a generalized Heisenberg ferromagnet spin chain with arbitrary spin”, *J. Phys. C: Solid State Phys.*, **15**:36 (1982), L1309–L1313.
- [9] R. Balakrishnan, A. R. Bishop, “Nonlinear excitations on a ferromagnetic chain”, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:5 (1985), 537–540.

- [10] F. D. M. Haldane, “Geometrical interpretation of momentum and crystal momentum of classical and quantum ferromagnetic Heisenberg chains”, *Phys. Rev. Lett.*, **57**:12 (1986), 1488–1491.
- [11] G. R. W. Quispel, F. W. Nijhoff, H. W. Capel, J. van der Linden, “Linear integral equations and nonlinear difference-difference equations”, *Phys. A*, **125** (1984), 344–380.
- [12] V. S. Gerdjikov, M. I. Ivanov, Y. S. Vaklev, “Gauge transformations and generating operators for the discrete Zakharov–Shabat system”, *Inverse Problems*, **2**:4 (1986), 413–432.
- [13] N. Papanicolaou, “Complete integrability for a discrete Heisenberg chain”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20**:12 (1987), 3637–3652.
- [14] T. Tsuchida, “A systematic method for constructing time discretizations of integrable lattice systems: local equations of motion”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:41 (2010), 415202, 22 pp.
- [15] A. Calini, “A note on a Bäcklund transformation for the continuous Heisenberg model”, *Phys. Lett. A*, **203**:5–6 (1995), 333–344.
- [16] H. J. Shin, “Generalized Heisenberg ferromagnetic models via Hermitian symmetric spaces”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:14 (2001), 3169–3177.
- [17] G. M. Pritula, V. E. Vekslerchik, “Stationary structures in two-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic spin system”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **10**:3 (2003), 256–281.
- [18] H. J. Shin, “SIT-NLS solitons in Hermitian symmetric spaces”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:15 (2006), 3921–3931.
- [19] J. L. Cieśliński, J. Czarnecka, “The Darboux–Bäcklund transformation for the static 2-dimensional continuum Heisenberg chain”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:35 (2006), 11003–11012.
- [20] O. Ragnisco, F. Zullo, “Continuous and discrete (classical) Heisenberg spin chain revisited”, *SIGMA*, **3** (2007), 033, 6 pp., arXiv: nlin.SI/0701006.
- [21] U. Saleem, M. Hassan, “Quasideterminant solutions of the generalized Heisenberg magnet model”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:4 (2010), 045204, 12 pp.
- [22] M. Lakshmanan, “Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system”, *Phys. Lett. A*, **61**:1 (1977), 53–54.
- [23] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin, 1991.
- [24] C. Gu, H. Hu, Z. Zhou, *Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and their Applications to Geometry*, Mathematical Physics Studies, **26**, Springer, Berlin, 2005.
- [25] B. Haider, M. Hassan, “Quasi-Grammian solutions of the generalized coupled dispersionless integrable system”, *SIGMA*, **8** (2012), 084, 15 pp., arXiv: 1211.1762.
- [26] H. Wajahat A. Riaz, M. Hassan, “Darboux transformation of a semi-discrete coupled dispersionless integrable system”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **48** (2017), 387–397.
- [27] H. Wajahat A. Riaz, M. Hassan, “Multisoliton solutions of integrable discrete and semi-discrete principal chiral equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **54** (2018), 416–427.
- [28] И. М. Гельфанд, В. С. Ретах, “Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 13–25.
- [29] P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh, “Nonabelian integrable systems, quasideterminants, and Marchenko lemma”, *Math. Res. Lett.*, **5**:1–2 (1998), 1–12.
- [30] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, R. L. Wilson, “Quasideterminants”, *Adv. Math.*, **193**:1 (2005), 56–141.

Поступила в редакцию 31.07.2017,
после доработки 11.09.2017